DE L'EXACTITUDE DES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES

Autor(en): **Haentzschel, Em.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1907)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10135

DE L'EXACTITUDE DES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES[1]

L'exactitude des constructions géométriques a prêté maintefois matière à discussion dans le courant de ces dernières années. L'impulsion en a été spécialement donnée par le petit volume de M. LEMOINE, intitulé : *Géométrographie* ou *Art des Constructions géométriques* (Paris, Gauthier-Villars, 1902).

On sait que M. Lemoine introduit les notions de *simplicité* et d'*exactitude* d'une construction géométrique et que c'est à la première qu'il accorde le principal rôle dans son Ouvrage. Néanmoins, je n'envisagerai ici que la notion d'exactitude. Voici, à l'aide d'un exemple emprunté à son livre (p. 30 ; XXVII), dans quel sens il prend cette notion.

Par un point E tracer une parallèle à l'une des bissectrices de l'angle formé par deux droites données AB et AC.

Je trace A (AE) qui coupe AB en B et en B′, AC en C et C′. Je trace C′ (BE) qui coupe A (AE) en E′, EB et C′E′ étant de même sens. Je trace EE′, c'est la droite cherchée. Pour la parallèle à l'autre bissectrice je décris C (BE) qui coupe A (AE) en E″, etc. (Voir fig. I).

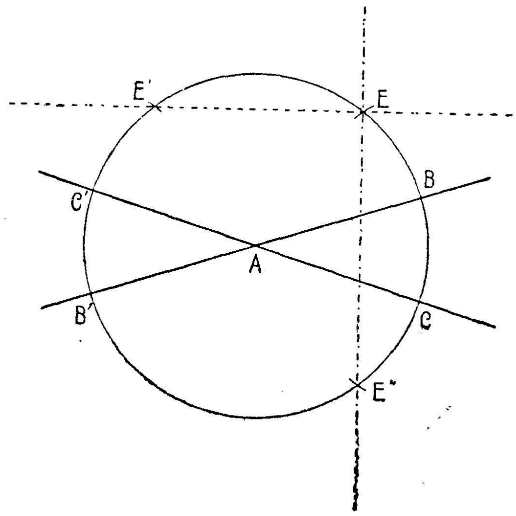


Fig. 1.

Nous avons dû, pour tracer la droite EE′, placer la règle, de sorte qu'elle passât par les *2* points E et E′, et nous aurons exécuté ainsi, selon M. Lemoine, *2 fois* l'opération R_1

[1] A l'occasion du présent article, il faut répéter une fois de plus que l'*Enseignement mathématique* laisse libéralement la porte ouverte à toutes les opinions, mais ne saurait se solidariser avec les auteurs. Certaines appréciations portées ici sur les idées de M. Lemoine, par l'auteur de l'article, n'engagent que ce dernier.

LA RÉDACTION.

(= règle). Ensuite nous avons dû placer la pointe du compas en A, E, B, E et C′, c'est-à-dire répéter 5 *fois* l'opération C_1 (= centre) que M. Lemoine caractérise par le symbole 5 C_1. De là il conclut à l'exactitude de la construction en faisant la somme des coefficients de R_1 et de C_1, soit $2 + 5 = 7$.

Il est curieux que cette énumération mécanique des opérations ait trouvé quelques partisans, même des défenseurs, quoiqu'il ait dû sembler clair, à tout mathématicien, que cette façon absolument artificielle de définir la notion compliquée de l'« Exactitude d'une Construction géométrique » est insoutenable. On sent qu'il s'y trouve une erreur, et si l'on n'a pas pu la saisir exactement, cela tient, selon moi, à la circonstance suivante : les *Mathématiques de précision*, d'après leur sens et leur signification mêmes, ne donnent pas lieu de faire une distinction particulière en faveur de l'« exactitude » d'une construction géométrique. La *Géométrie théorique* définit chaque droite par deux de ses points et chaque point par l'intersection de deux droites. Mais la *Géométrie naturelle ou d'approximation* doit faire la restriction suivante : « les deux points ne doivent cependant pas être trop près l'un de l'autre, et l'angle compris entre les deux droites ne doit pas être trop aigu » (Weber et Wellstein, *Encyclopædie der Elementar-Mathematik*, Bd. 2, p. 115, *Leipzig*, Teubner, 1905).

La Géométrographie est du domaine des Mathématiques de précision; et c'est pourquoi M. Lemoine dit très justement, l. c. p. 18: Une construction, pour être dite la *construction géométrographique* d'un problème doit être I° *générale*, c'est-à-dire s'appliquer à ce problème, *quelles que soient les grandeurs et les positions des données.* II° *la plus simple possible.* Il insiste donc, avec raison, sur la considération suivante, prise parmi celles qui sont à la base de la Géométrographie, c'est-à-dire qu'*elle suppose qu'un point est déterminé parfaitement quelque petit que soit l'angle sous lequel se coupent les lignes qui le placent* (Lemoine, *Archiv d. Math. u. Phys.*, 3. Reihe. Bd. 1, p. 99, 1901).

M. Reusch exprime la même pensée dans la préface de son Ouvrage : *Planimetrische Konstruktionen in geometrogra-*

phischer Ausführung (Leipzig, Teubner, 1904, S. VIII). « La Géométrographie est de nature purement théorique ». M. LEMOINE commit donc une erreur foncière en introduisant la notion d'*exactitude* dans son système. En effet, cette notion étant particulière aux Mathématiques de précision, donna lieu à des équivoques, et M. Lemoine a confondu deux branches essentiellement différentes de la Géométrie. C'est pourquoi Guido HAUCK se prononça franchement contre le point de vue de M. Lemoine, en quelques mots brefs et frappants (*Sitzungsberichte d. Berliner Math. Gesellschaft,* Oktober, 1903). D'après mon avis, la polémique de MM. MEHMKE (*Deutsche Math. Vereinigung* Karlsbad, 1902) et HOLZMÜLLER (*Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturw.*, Jahrg. *11*, 1905) protestant contre l'emprunt fait par la Géométrographie au domaine des Mathématiques de précision, n'a pas eu le résultat espéré, parce que les partisans de la Géométrographie tirent leurs arguments précisément de la Géométrie de précision, et on ne peut évidemment y faire aucune objection, puisqu'il ne s'agit, dans la Géométrographie, que de faire usage de quelques propositions plus ou moins connues de la Géométrie plane élémentaire, en vue des constructions proposées. Mais il n'en devient que de plus en plus difficile d'épuiser la discussion, car — je laisse parler M. Félix KLEIN — « jusqu'aujourd'hui on n'a pas encore développé rationel-« lement une théorie des Erreurs dans les Constructions « géométriques, telle qu'elle se trouve à la base de la Géo-« désie. Je dis qu'une théorie des erreurs est rationnelle « quand elle est basée sur des considérations de probabi-« lité, de sorte que nous devons — pour juger de l'exactitude « d'une méthode de construction — l'appliquer à plusieurs « reprises au même problème, puis comparer les résul-« tats par la méthode des moindres carrés ou de quelque « autre façon » (Félix KLEIN, *Anwendung d. Diff. u. Integralrechnung auf Geometrie.* Autographiertes Vorlesungsheft. Leipzig, Teubner, 1902, p. 359). M. W. Franz MEYER, professeur à l'Université de Königsberg (Prusse) a précisément chargé un de ses jeunes collègues de diriger son attention sur ce point. Et M. Konrad NITZ a développé le résultat de ses études dans une dissertation sur l'*Application de la théorie des erreurs, sur un plan, aux constructions faites au moyen de la règle et du compas*, Königsberg, 1905), et en outre dans ses *Compléments à une Théorie des erreurs des constructions géométriques (Zeitschrift f. Math. 53*, 1906. Leipzig. Teubner). Il existe aujourd'hui une littérature assez riche sur ce sujet qui commence par BRAVAIS *(Analyse math. sur les probabilités des erreurs de situation d'un point.* Paris, Mém. prés. par divers savants, *9*, 1846) et qui comprend entre autres les travaux de Chr. WIENER *(Darst. Geometrie.* Bd. 1 ; p. 190, 1884), de HELMERT *(Studien über rationelle Vermessungen, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 13*, 1868), de JORDAN *(über die Genauigkeit geodätischer Punktbestimmungen, Zeitschr. für Math. u. Phys. 16*, 1871), de CZUBER (*Theorie der Beobachtungsfehler*, 3. Teil. Leipzig 1891) et qui se termine par les dissertations toutes récentes de F. GEUER *(Die Genauigkeit geometrischer Zeichnungen behandelt nach dem Gauss'schen Ausgleichungsverfahren; Freiburg*, i, Br. 1902) et de P. BÖHMER *(Ueber geometrische Approximationen.* Göttingen, 1904). Il est curieux que M. LEMOINE ne connaisse même pas les travaux de ses compatriotes BRAVAIS, BIENAYMÉ (1852), BERTRAND (*C. R.* 1888), d'OCAGNE (*C. R.* 1894 ; *Bull. Soc. Math. de France*, 1895) ou que du moins il ne leur accorde aucune attention.

Pour jeter un coup d'œil dans cet ordre d'idées, je m'attache au problème de construction exposé au commencement. Il est clair que, dans l'exécution du dessin, il n'est nullement indifférent que l'angle sous lequel se coupent les deux droites données soit quelconque. S'il est très petit, que le point A est donc ce qu'on appelle un *point glissé*, on est, dès l'abord, dans le doute si l'on a vraiment mis la pointe du compas en A ; il est pratiquement impossible de distinguer le point A des points voisins. D'autre part la construction finit encore par devenir impossible, quand les points E et E' sont trop rapprochés l'un de l'autre. L'échaffaudage d'une construction géométrographique apparaît donc nébuleux, en ce qui concerne l'exactitude et la simplicité d'une construction ; elle n'est — comme dit Jacob STEINER — qu'une construction exécutée avec la langue. Et indiquer une construction moins simple, dans un cas semblable, serait en contradiction flagrante avec le principe de la Géométrographie de M. LEMOINE.

Dans la théorie des erreurs on énonce la proposition suivante : Tous les points de même probabilité sont, dans l'exécution de l'opération C_1 pour le point d'intersection de deux droites, situés sur des ellipses concentriques et semblablement placées autour du point d'intersection donné ; on les nomme *ellipses d'erreurs ;* c'est le *théorème de Bravais.* Si l'on prend les deux droites données pour axes d'un système de coordonnées obliques, si l'on désigne, en outre, l'angle compris par ω, les erreurs moyennes, commises en plaçant la pointe du compas, par rapport à chacune des droites par m_1 et m_2 — sur une largeur de trait de 0,10 à 0,15 mm., ces erreurs moyennes varient, selon les personnes et les circonstances, entre 0,035 et 0,060 mm. — et k étant une constante arbitraire, on a *pour équation de l'ellipse d'erreurs*

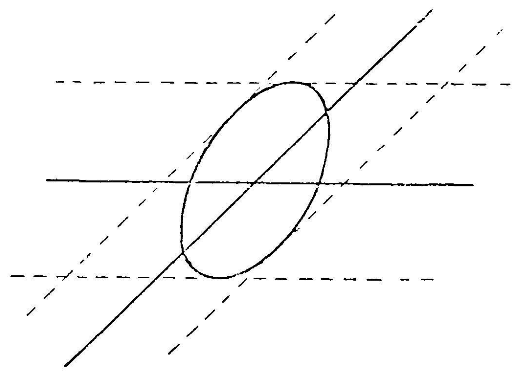


Fig. 2.

$$\frac{x^2}{m_1^2} + \frac{y^2}{m_2^2} = \frac{2k^2}{\sin^2 \omega} .$$

Pour $k^2 = \frac{1}{2}$, on a ce que l'on appelle l'*ellipse d'erreurs moyenne.* L'ellipse est inscrite dans le parallélogramme formé par des droites parallèles aux axes, et coupant ceux-ci à des distances $\pm m_1$ et $\pm m_2$. Dans le plus important des cas particuliers, c'est-à-dire quand on a : $m_1 = m_2 = m$, il vient, pour la longueur des demi-axes :

$$a = \frac{km}{\sin \frac{\omega}{2}} \text{ et } b = \frac{km}{\cos \frac{\omega}{2}} .$$

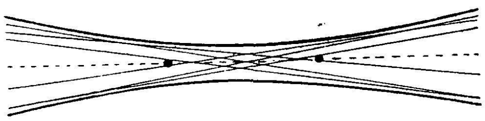
Pour $\omega = 90°$, on a donc un *cercle d'erreurs.*

La définition de la surface d'erreurs, pour les point B et C', qui sont obtenus par l'intersection de chacune des deux droites et d'un cercle, est plus compliquée. La théorie montre ici que l'on a affaire à des courbes de 4e ordre, ce que l'on appelle des *ovales d'erreurs de 4e ordre*. Pour le point E', à l'intersection de deux cercles, la surface d'erreurs est limitée par une *ovale d'erreurs de 8e ordre*.

Enfin, on achève la construction en tirant la droite EE'. Prenons le cas le plus simple : les deux points sont déterminés chacun par l'intersection de deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, ou mieux que cela, supposons les deux points donnés comme des points circulaires marqués au crayon, de telle sorte que l'erreur moyenne est la même dans chaque direction, quand on applique la règle. Alors l'exactitude de toutes les droites joignant les deux points est caractérisée par une série d'hyperboles homofocales, telles que toutes les droites de même probabilité enveloppent chacune des hyperboles. L'équation de ces *hyperboles* est:

$$\frac{y^2(m_1^2 + m_2^2)}{k^2} - \frac{x^2(m_1^2 + m_2^2)^2}{2e^2 - k^2(m_1^2 + m_2^2)} = 2m_1^2 m_2^2 \, .$$

Elle se simplifie lorsque $m_1 = m_2 = m$ et devient



$$\frac{y^2}{k^2 m^2} - \frac{x^2}{e^2 - k^2 m^2} = 1 \, .$$

Fig. 3.

Enfin, il nous faut encore mentionner l'exactitude qui caractérise un cercle de rayon donné et tracé autour d'un point donné.

Puisque l'exactitude de l'opération C_1 est donnée par une série de surfaces ou courbes d'erreurs, ellipses ou ovales d'erreurs, il s'ensuit que tous les cercles de même probabilité *enveloppent* une *courbe parallèle* à une courbe d'erreurs du point centre. Si, en particulier, il s'agit de l'ellipse d'erreurs, les courbes parallèles sont nommées les toroïdes. Le problème de la composition de deux ou plusieurs de ces ellipses d'erreurs a été traité à fond et généralisé par M. d'Ocagne ; mais les formules sont très compliquées.

Les travaux cités plus haut de MM. Mehmke et Holzmüller et le livre de M. Adler sur la théorie des constructions géométriques, p. 268-301 (Leipzig, Göschen, 1906), complètent très bien cet exposé.

Pour terminer je veux attirer l'attention du lecteur sur la copie photographique d'un dessin, exécuté avec les instruments de la maison *Clemens Riefler* par l'ingénieur *Esseling*; ce dessin représente un polygone régulier de 60 côtés, avec toutes ses diagonales, soit en tout 1770 droites. Cette construction suggère les réflexions les plus diverses, par exemple sur le rôle joué par les instruments, dont on sait la perfection, comme facteurs essentiels de l'exactitude d'une construction géométrique; elle fait encore songer à l'habileté du *dessinateur* et à son *équation personnelle*, si je puis m'exprimer ainsi.

(Traduction de *E. Perelmutter*).

Em. HAENTZSCHEL (Berlin).

EN QUEL SENS ET PAR QUELLES PREUVES VALABLES POUVONS-NOUS JUSTIFIER LE SYSTÈME DE COPERNIC?

« Qui veut trop prouver ne prouve rien » dit un proverbe. Il arrive en effet qu'en voulant trop étendre la portée d'une démonstration on finit par lui enlever toute signification. Les preuves invoquées en faveur du système de Copernic, en fournissent un exemple caractéristique, du moins sous la forme qu'on a l'habitude de leur donner.

Nulle part, en effet, il n'est question d'un système de référence; on raisonne comme s'il était possible d'établir que la terre possède certains mouvements lui appartenant en propre, en dehors de toute relation avec des repères.

C'est ainsi qu'à propos du mouvement diurne, il est d'usage constant de poser le dilemme suivant: Ou bien c'est notre globe qui tourne sur lui-même, ou bien c'est le reste de l'Univers qui tourne en sens contraire. »