

# LES LOGARITHMES AVANT NEPER<sup>1</sup>.

Autor(en): **Aubry, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-9279>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## LES LOGARITHMES AVANT NEPER<sup>1</sup>.

Il est assez remarquable que l'idée d'une théorie arithmétique des logarithmes n'ait pris naissance qu'après celle de leur théorie algébrique. Dès l'aurore de l'algèbre, on voit, en effet, considérer les rapports comme des quantités d'un genre spécial, leur donner des noms particuliers<sup>2</sup>, et employer pour leur calcul, un langage logarithmique, pour ainsi dire. Car les opérations que nous appellerions aujourd'hui *multiplication* des rapports, leur *élévation aux puissances*, *l'extraction* de leurs racines, s'appelaient et se sont longtemps appelées *addition*, *multiplication* et *division* de rapports<sup>3</sup>.

La musique est vraisemblablement l'origine de ces déno-

<sup>1</sup> Consulter aussi, outre l'Histoire des mathématiques de M. CANTOR (*Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, 3 vol. parus), l'étude historique que M. TROPKE consacre aux logarithmes dans l'ouvrage intitulé *Geschichte der Elementar-Mathematik*, t. II, p. 141-186. *Die Logarithmen*.  
LA RÉDACTION.

<sup>2</sup> Les rapports  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{5}{4}$ , ...  $\frac{n+1}{n}$ , par exemple, portaient les noms de ἡμιόλιος, ἐπιτρίτος, ἐπιτέταρτος, ... ἐπιμόριος; devenus plus tard *sesquialter*, *sesquitercius*, *sesquiquartus*, ... *superpartiens*.

<sup>3</sup> Ainsi en ajoutant l'ἡμιόλιος  $\left(\frac{3}{2}\right)$  et l'ὑπεπιτέταρτος  $\left(\frac{4}{5}\right)$ , on trouve l'ἐπιπεμπτος  $\left(\frac{6}{5}\right)$ ; doubler, tripler, ... *sesquipler* un rapport, c'est l'élever au carré, au cube, ... à la puissance  $\frac{3}{2}$ ; prendre la moitié d'un rapport, c'est en extraire la racine carrée; etc.

La notion du rapport fut longue à s'éclaircir : Kepler, Mercator, Cotes, Halley, dans leurs écrits logarithmiques, parlent couramment d'addition et de division de rapports; dans le sens qu'on vient d'indiquer. On en voit une autre preuve dans les curieuses remarques d'Arnould, de Leibniz et de d'Alembert, au sujet du rapport de  $-1$  à  $+1$ .

Le mot *logarithme*, imaginé par Neper, pour remplacer le mot *numerus artificialis*, d'abord employé par lui, et qu'on traduisait avec Kepler, par *mesure des rapports* (ἀριθμός τῶν λογῶν), avait contribué à la confusion. Matzka (A. Gr. 1860) en a montré la vraie origine, qui est λογιστικός ἀριθμός. Neper ne parle nulle part, en effet, de mesure de rapports; mais de son temps, le mot *logistique* était souvent pris pour *calcul*, comme on le voit chez Neper même. Déjà Platon distinguait la λογιστική, science du calcul, de l'ἀριθμητική, théorie des nombres.

Ce langage inexact paraît avoir été critiqué d'abord par Clarke, dans sa controverse avec Leibniz. Celui-ci avait dit que « l'ordre a aussi sa quantité... Les raisons ou proportions, dans les mathématiques, ont leur quantité, et se mesurent par les logarithmes ». Clarke répondit à cela que « le temps et l'espace sont des quantités, ce qu'on ne peut dire de la situation et de l'ordre... L'expression logarithmique d'une proportion n'est pas la mesure, mais l'indice ou le signe artificiel de la proportion ».

minations. Comme on sait, Pythagore avait découvert fortuitement que les longueurs des cordes donnant les intervalles de quarte, de quinte et d'octave sont respectivement dans les rapports de 4 à 3, de 3 à 2, de 2 à 1. Il avait conclu que les intervalles musicaux sont régis par des lois numériques, qu'il s'appliqua à découvrir. Pour suivre leurs rêveries numériques, psychologiques et cosmiques, autant que pour régler les instruments de musique, les pythagoriciens en déduisirent plusieurs systèmes, en général très compliqués. C'est probablement d'eux que vient l'usage des noms rappelés plus haut: comme ces noms leur servaient surtout à désigner les intervalles musicaux, ils en vinrent à substituer aux noms des intervalles ceux des rapports qui les représentent. Ainsi ils disaient: le rapport  $\frac{1}{2}$  est composé des deux rapports  $\frac{2}{3}$  et  $\frac{3}{4}$ .

On voit un exemple de ce calcul dans un passage célèbre du *τίμαιος*, où, pour expliquer la formation de l'âme, Platon dit que Dieu sépara du tout une partie, puis une autre double de la première, puis une troisième triple de la première, une quatrième double de la seconde, une cinquième triple de la troisième, une sixième octuple de la première, une septième valant vingt-sept fois la première<sup>1</sup>; qu'ensuite il remplit chacun des intervalles doubles et des triples<sup>2</sup> par deux moyennes, dont l'une<sup>3</sup> surpasse le plus petit et est surpassée par l'autre d'une même fraction de chacun d'eux, et l'autre<sup>4</sup> surpasse le plus petit et est surpassée par l'autre d'une même quantité<sup>5</sup>; qu'il remplit ensuite les intervalles  $\frac{4}{3}$  par des intervalles  $\frac{9}{8}$  et un intervalle de  $\frac{256}{243}$ <sup>6</sup>.

<sup>1</sup> Ce qui donne déjà les nombres 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27.

<sup>2</sup> Ceux des nombres 1, 2, 4, 8 et des nombres 1, 3, 9, 27.

<sup>3</sup> Moyenne harmonique.

<sup>4</sup> Moyenne arithmétique.

<sup>5</sup> On a ainsi les nombres 1,  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{3}{2}$ , 2,  $\frac{8}{3}$ , 3, 4,  $\frac{9}{2}$ ,  $\frac{16}{3}$ , 6, 8, 9,  $\frac{27}{2}$ , 18, 27.

<sup>6</sup> Ainsi le premier intervalle, de  $\frac{4}{3}$  à 1, donne les trois nouveaux intervalles, de  $\frac{9}{8}$  à 1,  $\frac{81}{64}$  à  $\frac{9}{8}$ ,  $\frac{4}{3}$  à  $\frac{81}{64}$ . Le quatrième, de 2 à  $\frac{8}{3}$ , les trois suivants, 2 à  $\frac{9}{4}$ ,  $\frac{81}{32}$  à  $\frac{9}{4}$ ,  $\frac{8}{3}$  à  $\frac{81}{32}$ .

Ces nombres représentent tous des intervalles musicaux: la quarte (*διὰ τεσσάρων*) ou  $\frac{4}{3}$  comprend un ton (*τόνος*) ou  $\frac{9}{8}$ , un second ton et un limma (*λεῖμμα*) de  $\frac{256}{243}$ .

La théorie des rapports, due à Eudoxe, est expliquée par Euclide, dans ses *στοιχειῶν* et ses *δεδόμενον*, sans toutefois qu'il soit parlé de la division des rapports. Cependant les Anciens ont dû faire plusieurs tentatives pour résoudre cette dernière question. Platon, — qui, comme on sait, fut l'inspirateur du problème déliaque ou duplication du cube, — paraît en avoir eu la première idée : on sait la manière dont il divise en trois parties égales, le rapport  $\frac{2}{1}$ , au moyen d'une construction graphique. — Le titre d'un des ouvrages d'Apollonius, *περί λόγον ἀποτομῆς*, bien que n'en énonçant nullement le contenu, témoigne de préoccupations de ce genre : on sait d'ailleurs qu'il a écrit un traité sur les irrationnelles des ordres supérieurs. — Nous voyons que Théon de Smyrne, pour avoir la valeur approchée du demi-ton, laquelle est la moitié du rapport  $\frac{9}{8}$ , ou  $\sqrt{1 + \frac{1}{8}}$ , pose cette racine égale à  $1 + \frac{1}{16}$ . — Enfin, d'après Ptolémée, pour partager pratiquement l'intervalle musical  $\frac{16}{15}$ , par exemple, en deux parties égales, on le traitait ainsi :  $\frac{16}{15} = \frac{48}{45} = \frac{48}{46} \cdot \frac{46}{45}$ , ce qui donnait le célèbre genre *ἐναρμονικόν*, provenant de la division de la quarte  $\frac{4}{3}$ , suivant les intervalles  $\frac{46}{45}$ ,  $\frac{48}{46}$ ,  $\frac{5}{4}$ . De même, pour diviser l'intervalle de quarte en trois intervalles égaux, on le considérait comme composé des trois suivants  $\frac{12}{11}$ ,  $\frac{11}{10}$ ,  $\frac{10}{9}$ , qui sont les rapports approximatifs cherchés ; et en effet ce genre s'appelait *διατονον ὀμαλόν*.

Le premier qui considéra une progression géométrique en nombres, considérait implicitement aussi la progression arithmétique 1, 2, 3, 4, ... et pourrait passer comme ayant eu la première idée des logarithmes, si la théorie logarithmique ne reposait pas précisément sur la difficulté de donner des correspondants dans la progression arithmétique aux nombres intermédiaires de la progression géométrique. Quoi qu'il en soit, on doit cette considération à Archimède, qui outre un théorème important sur le mode de croissance des



deux progressions<sup>1</sup>, remarque dans son  $\psi\alpha\mu\mu\iota\tau\acute{\epsilon}\varsigma$ , que : étant donné des nombres continuellement proportionnels à partir de l'unité, le produit de deux de ces nombres est un terme de la progression autant éloigné du plus grand facteur que le second l'est de l'unité, et autant éloigné de l'unité que les deux facteurs le sont ensemble de l'unité.

Cette remarque d'Archimède a été développée et appliquée par Nicolas Chuquet, aux deux progressions  $\div 1 : 2 : 4 : 8 : \dots$  et  $\div 1 : \frac{5}{3} : \frac{25}{9} : \frac{125}{27} : \dots$  dans son *Triparty*, écrit en 1484, mais publié seulement en 1880 (B. Bon.) par Marre. Voici un extrait du texte de Chuquet :

« De la multiplicacion et prop'ete des  
nombres proporcionalz.

Tous nombres proporcionalz constituez ordonneement en quelque proporcion que ce soit commancant toutesfoiz a 1 et comptant celui qui vient Immediatemmt apres, 1. pour le premier et celui dap's pour le second et consequemment les aultres. Telz nombres ainsi ordonnez ont telle prope'te que... qui multiplie lung diceulx par lung des aultres et qui adioust les deux ordres esquelz sont situez les deux nombres multipliez. Il treuve le lieu ou doit estre situe le nombre venu de la multiplicacion cest a dire qu'il treuve le quantiesme nombre ceste multiplicacion doit produire...

... Aultre exemple a la proporcion superbiparciens. Qui multiplie.  $4 \cdot \frac{17}{27}$  . qui est le 3<sup>e</sup> superbiparciens en soy Il treuve le 6<sup>e</sup> superbiparciens qui est  $21 \cdot \frac{316}{729}$  . Ou qui multiplie le 2<sup>e</sup> superbiparciens qui est  $2 \cdot \frac{7}{9}$  . par le 3<sup>e</sup> qui est  $4 \cdot \frac{17}{27}$  . lon trouuera  $12 \cdot \frac{209}{243}$  . qui est le 5<sup>e</sup>. Car 2 et 3 Joinctz ensemble font 5. Et ainsi des ault's superparciens et semblablement des aultres especes conuient entendre... »

$$1 \cdot \frac{2}{3} = 1$$

$$2 \cdot \frac{7}{9} = 2$$

$$4 \cdot \frac{17}{27} = 3$$

$$7 \cdot \frac{58}{82} = 4$$

$$12 \cdot \frac{209}{243} = 5$$

$$21 \cdot \frac{316}{729} = 6$$

<sup>1</sup> Si entre les quantités H, K, on insère deux moyennes arithmétiques  $\theta$ , I, le cube du rapport de K à I sera inférieur au rapport de K à H. C'est la relation  $(1+x)^n > 1+nx$ , qui nous a servi de point de départ dans notre étude élémentaire des *fonctions hyperboliques*.

Stifel (*Arith. int.* Nürnberg, 1544), outre des considérations semblables, établit nettement le parallèle des opérations élémentaires effectuées sur les deux progressions et étend le théorème d'Archimède aux progressions prolongées aux-dessous de zéro et de l'unité.

« Additio in Arithmeticis progressionibus respôdet multiplicationi in Geometricis...

Subtractio in Aritmeticis respondet in Geometricis divisioni...

Multiplicatio simplex... quæ fit in Arithmeticis, respondet multiplicationi in se quæ fit in Geometricis.

Divisio in Arithmeticis progressionibus, respondet extractionibus radicum in progressionibus Geometricis...

... Sicut supra unitatem ponuntur numeri integri, et infra unitatem finguntur minutie unitatis, et sicut supra unum ponuntur integra, et infra unum ponuntur minuta seu fracta: sic supra o ponitur unitas cum numeris, et infra o fingitur unitas cum numeris. Id quod pulchre repræsentari videtur in progressionem numerorum naturali, dum seruit progressionem.

Sed ostendenda est ista speculatio per exemplum.

|               |               |               |   |   |   |   |    |    |    |
|---------------|---------------|---------------|---|---|---|---|----|----|----|
| — 3           | — 2           | — 1           | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |

Posset hic fere nouus liber integer scribi de mirabilibus numerorum, sed oportet ut me hic subduca, et clausis oculis abea... »

Tartaglia et d'autres ont aussi traité le même sujet, mais sans y apporter de considérations nouvelles. Ainsi, au milieu du XVI<sup>e</sup> siècle, le théorème incidemment énoncé par Archimède n'avait pas encore conduit à l'idée des logarithmes ; on peut croire cependant que les remarques de Stifel ont disposé les esprits à les appliquer à la simplification des calculs numériques.

Le besoin d'abrégé les immenses calculs des astronomes a en effet amené la découverte des logarithmes, que Bürgi paraît avoir faite dès 1588. Mais c'est à Neper seul qu'on en fait honneur, car non seulement il a devancé Bürgi dans la publication des tables, mais il en a donné du même coup la théorie et l'usage, et il en a très bien compris la portée, tant au point de vue arithmétique qu'au point de vue analytique.

Bürgi avait composé vers 1603 une table d'anti-logarithmes, longtemps inconnue. Cette table (*Arith. und Geom. Progress Tabulen*, Prag. 1620), retrouvée par Kæstner, en 1740, contient environ 33,000 logarithmes écrits en rouge (*rothe Zahlen*) à côté des nombres correspondants, écrits en noir (*schwarze Zahlen*).

Il a simplement remplacé la progression  $\div 1:2:4:\dots$  de Chuquet, de Stifel et des autres, par la progression  $\div 1:1,1000^1:1,0001^2:1,0001^3:\dots$  variant très lentement, et en outre très facile à construire. L'usage de cette table n'a été publié qu'en 1856, par Gieswald.

#### APPENDICE : SUR QUELQUES MÉTHODES ÉLÉMENTAIRES

##### DE CALCULS DES LOGARITHMES.

Neper considère deux points mobiles H,  $\eta$ , sur deux droites AO,  $\alpha\omega$ , le premier se mouvant uniformément et l'autre avec une vitesse proportionnelle à la distance variable  $\eta\omega$ . AH est le logarithme de la partie correspondante  $\eta\omega$ . La définition de Neper, d'ailleurs non rigoureusement justifiée, n'est autre que la définition infinitésimale  $Lx = \int \frac{dx}{x}$ , ou, mais moins directement, celle-ci  $Lx = \lim n(\sqrt[n]{x} - 1)$ .

Ses logarithmes, que nous désignerons par la lettre N, peuvent être définis par la relation  $N(a) = 10^7 L \frac{10^7}{a}$  : ils décroissent donc quand le nombre augmente. Neper avait surtout pour but de faciliter les calculs trigonométriques ; aussi, pour ne pas avoir de nombres négatifs, il fait le sinus total

(sin.  $90^\circ$  ou rayon) égal à l'unité (représentée par  $10^7$ ) et fait croître les logarithmes à partir de celui de ce nombre.

Pour calculer sa table, il construit une progression géométrique de cent termes, dont le premier est le sinus total et la raison  $1 - \frac{1}{10^7}$ ; le dernier terme est  $a = 9999900,0004950$ . D'après un théorème de Neper qui peut se rendre par la formule ( $\alpha$ ) de l'exercice 8 de notre *Etude des fonc. hyp.*, — formule qui se déduit immédiatement de la définition cinématique de Neper, — on trouve

$$100 < N(a) < 100,00001 \quad \text{d'où sensiblement } N(a) = 100,000005$$

et de là

$$N(9999900) = 100,00050000.$$

Une autre progression de cinquante termes dont le premier est le sinus total, et le second 999 9900, — la raison par suite étant  $1 - \frac{1}{10^5}$ , lui donne

$$N(9995001,222927) = 50.100,0005 = 5000,025,$$

d'où

$$N(9995000) = 5001,2485387.$$

Il construit ensuite soixante-neuf progressions de vingt termes chacune; la raison est partout  $1 - \frac{1}{2000}$ , les termes initiaux forment eux-mêmes une progression dont le premier terme est le sinus total et la raison  $1 - \frac{1}{100}$ . Il a ainsi les logarithmes de 1380 nombres variant de 1 à 0,5 et qui lui permettent de calculer par approximation ceux des lignes trigonométriques de  $90^\circ$  à  $30^\circ$ .

Neper indique aussi un autre genre de logarithmes plus commode dans la pratique: ce sont ceux qui ont zéro pour logarithme de l'unité et  $10^{10}$  pour logarithme de 10. Pour calculer ces nouveaux logarithmes, il propose trois méthodes élémentaires, ingénieuses mais peu pratiques. Par la première, on déterminera, au moyen de racines cinquièmes successives de 10, les nombres dont les logarithmes sont 2 000 000 000, 400 000 000, 80 000 000, 16 000 000, 3 200 000, 640 000, 128 000, 25 600, 5 120, 1 024; puis, par des extractions

de racines carrées successives de la dernière racine obtenue, les nombres dont les logarithmes sont 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1. Par des multiplications convenables de ces racines, on aurait les anti-logarithmes de tous les nombres <sup>1</sup>.

La seconde méthode ne demande que des extractions de racines carrées. Par exemple, pour trouver  $\log. 5$ , on prendra successivement le moyen géométrique des nombres 10, 1, dont les logarithmes sont connus, puis le moyen géométrique entre 10 et ce moyen, etc., en moyennant toujours deux nombres, l'un plus grand que 5 et l'autre plus petit <sup>2</sup>.

Enfin la troisième méthode de Neper se déduit de cette remarque que le nombre de chiffres de la puissance  $1000^{\text{me}}$  de  $a$  diminué de 1 représente  $\log. a$ . Ainsi comme on a :

$$2^{10000000} = 10^{30102996}$$

on peut écrire  $\log. 2 = 0,30102995$ . Briggs a continué ce calcul et a obtenu ainsi  $\log. 2$  avec treize décimales.

Kepler (*Chil. log.* Marpurg, 1624) considère un rapport fixe et le *mesure* par la différence de ses termes. Tout autre rapport a pour mesure celle du rapport fixe multipliée par le nombre de fois que ce rapport *contient* le rapport type <sup>3</sup>. Par exemple, prenons pour rapport type la racine  $(2^{30})^{\text{me}}$  de  $\frac{1}{0,7}$ , c'est-à-dire le rapport obtenu après trente extractions successives de racines carrées, et que nous désignerons par  $\frac{1}{a}$  : les rapports  $\frac{1}{a}$  et  $\frac{1}{0,7}$  seront mesurés par  $1 - a$  et par  $2^{30} (1 - a)$ . Pour mesurer le rapport  $\frac{1}{1,024}$ , on en extraira des racines

<sup>1</sup> Cette propriété des termes de la progression  $1:2:4:8:\dots$  de donner par multiplication tous les nombres entiers et celle presque identique de la progression  $1:3:9:27:\dots$  se voient dans l'ouvrage cité de Stifel.

<sup>2</sup> Euler, refaisant ce calcul, a dû extraire vingt-deux racines pour obtenir  $\log 5$  avec sept décimales exactes.

<sup>3</sup> Cela veut dire que si  $1 - \omega$  désigne un nombre fixe dont le logarithme soit  $\omega$ , le logarithme de tout nombre  $k$ , dans ce système, sera  $n (1 - \sqrt[n]{k})$ ,  $n$  désignant l'exposant de la puissance de  $\omega$  qui donne le nombre  $k$ , ou, comme dit Kepler, le nombre de fois que le rapport  $\frac{1}{\omega}$  est contenu dans le rapport  $\frac{1}{k}$ .

carrées successives jusqu'à la vingt-cinquième,  $b$ , qui est sensiblement égale à  $\frac{1}{a}$  : la mesure cherchée est donc  $2^{25}(1 - b)$ .

On mesurera de même les rapports

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{0,96}, \frac{1}{0,98}, \frac{1}{0,99}, \frac{1}{0,95}, \frac{1}{0,988}, \frac{1}{0,969}, \frac{1}{0,961}, \dots$$

ce qui donnera les logarithmes kepleriens des nombres 2, 5, 3, 11, 13, 17, 23,...

Il donne, sans démonstration suffisante, plusieurs relations intéressantes, dont la relation ( $\beta$ ) de l'exercice 8 et la première inégalité ( $\alpha$ ) de l'exercice 16, de notre article sur les *fonc. hyp.*

On voit que Kepler peut représenter tous les systèmes, sauf le système neperien. Sa théorie est d'ailleurs bien inférieure à celle de Neper, qu'il se proposait d'éclaircir.

Briggs s'est attaché, comme on sait, au calcul des logarithmes vulgaires. Voulant que la raison de la progression géométrique soit aussi voisine que possible de l'unité, mais ne pouvant se donner celle-ci a priori, puisque la base était fixée d'avance ; voulant d'autre part obtenir ses logarithmes avec quinze décimales exactes ; il calcula d'abord la table suivante de logarithmes vulgaires, qu'il poursuivit jusqu'à ce qu'il ait quinze zéros après la virgule, ce qui lui permettait de concevoir l'insertion de  $10^{15} - 1$  moyens géométriques entre 10 et 1,

$$(\alpha) \quad \log 10 = 1, \quad \log \sqrt[4]{10} = 0,5, \quad \log \sqrt[8]{10} = 0,25, \quad \log \sqrt[16]{10} = 0,125, \dots$$

et dont le cinquante-quatrième terme est <sup>1</sup>

$$\log 1,0^{15}12781914932003235 = 0,0^{16}5551115123125782702.$$

Il remarqua que le rapport de l'excès d'une racine sur

<sup>1</sup> Ces racines successives se déduisent les unes des autres à l'aide de diverses formules, dont voici la plus simple : soient

$$\sqrt[4]{1+A} = 1 + a, \quad \sqrt[8]{1+a} = 1 + \alpha \quad \text{et} \quad \sqrt[16]{1+\alpha} = 1 + x,$$

on aura

$$x = \frac{3}{4} \alpha - \frac{1}{8} \alpha + \frac{A^3}{1024}.$$

l'unité au logarithme correspondant tend vers une limite fixe<sup>1</sup> qui se trouve être le nombre

$$M = 0,434294481903251804.$$

De là une première méthode de calcul des logarithmes. En effet soit à trouver  $\log. 2$  : il extrait quarante-sept fois de suite la racine du nombre 1,024, ce qui lui donne

$$\begin{aligned}\log 1,0^{15}16851605705394977 &= 0,0^{16}731855936906239368 \\ &= M \cdot 0,0^{15}1685165705394977\end{aligned}$$

Multipliant par  $2^{47}$ , il trouve

$$\log 2 = 0,3010299956639111952.$$

Pour  $\log. 3$  il part de  $1,0077696 = \frac{6^9}{10^7}$  ; pour  $\log. 7$ , il agit de même sur  $1 + \frac{1}{2400}$  ; pour  $\log. 11$ , sur  $1 + \frac{1}{9800}$  ; en général, sur des nombres de la forme  $\frac{n^2}{n^2-1}$ , les facteurs des nombres  $n$ ,  $n-1$ ,  $n+1$  ayant leurs logarithmes connus, sauf un.

La table ( $\alpha$ ) permet de trouver autrement  $\log. n$ ,  $n$  étant compris entre 1 et 10. On divise  $n$  par le nombre de la table immédiatement inférieur, puis le quotient par le nombre qui lui est immédiatement inférieur, etc. On ajoute ensuite les logarithmes correspondants.

Briggs donne encore une autre méthode fondée sur l'emploi d'une table des logarithmes des nombres 1,1,1,2, ... 1,9 ; 1,01, ... 1,09 ; ... 1,0<sup>8</sup>1, 1,0<sup>8</sup>2, ... 1,0<sup>8</sup>9.

Ainsi, par les divisions successives, on a :

$$2966,82051458 = 2966 \cdot 1,0^82 \cdot 1,0^47 \cdot 1,0^56 \dots$$

d'où le logarithme du nombre proposé à l'aide de ceux de la table.

Les logarithmes étant calculés par exemple de 10 en 10, Briggs montre à intercaler les autres à l'aide de diverses for-

---

<sup>1</sup> Si  $\sqrt{1+A} = 1 + a$ , on a en effet :  $\frac{A}{\log(1+A)} = \left(1 + \frac{a}{2}\right) \frac{a}{\log(1+a)}.$

mules utilisant surtout les différences secondes et cinquièmes.

Gregory a appliqué au calcul de  $L$  10 le théorème rappelé, exercice 15 de nos *fonc. hyp.* Au vingtième terme, il a trouvé deux limites qui ont vingt-deux décimales communes. Il indique ensuite le calcul des nombres plus petits que 100, comme Briggs :

$$L \left( 1 + \frac{1}{2400} \right) \text{ d'où } L.7; L \left( 1 + \frac{1}{9800} \right) \text{ d'où } L11; \dots$$

Au-delà de 100, il prescrit de calculer

$$L \left[ 1 + \frac{2A - 1}{A^3 (A - 2)} \right]$$

d'où le logarithme de  $A + 1$ , connaissant ceux de  $A - 2$ , de  $A - 1$  et de  $A$ .

Mercator (*Log.* Londres, 1668) a donné une ingénieuse théorie qui s'appuie sur l'étude des proportions à termes équi-différents,

$$\frac{a}{a+b}, \quad \frac{a+b}{a+2b}, \quad \frac{a+2b}{a+3b}, \quad \dots$$

des rapports de ces rapports, de leurs rapports seconds, etc. Par exemple, on a sensiblement :

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{n(b+a) - (b-a)}{n(b+a) + (b-a)}.$$

Ainsi on a :

$$\frac{3}{5} = \frac{15}{17} \frac{17}{19} \frac{19}{21} \frac{21}{23} \frac{23}{25} \quad \text{d'où sensiblement} \quad \sqrt[5]{\frac{3}{5}} = \frac{19}{21}.$$

Cela fait voir que les logarithmes des nombres

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{b+3a}{3b+a}, \quad \frac{2b+4a}{4b+2a}, \quad \frac{3b+5a}{5b+3a}, \quad \dots$$

sont comme les nombres  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$



Il tire de là, par des moyens élémentaires, mais peu rigoureux, les formules approchées

$$(\alpha) \quad \frac{L(a+b) - La}{L(a+c) - La} = \frac{2a+b}{2a+c}, \quad \frac{2L(a+b) - La - L(a+2b)}{2L(a+c) - La - L(a+2c)} = \left(\frac{a+b}{a+c}\right)^2$$

et autres analogues.

Ceci posé, il a, par des calculs faciles à restituer,

$$1005^{461} = 9965774 \quad , \quad 995^{459} = 1001823$$

d'où, par des interpolations linéaires

$$1005^{461,6368} = 10 \quad \text{et} \quad 995^{459,3639} = 0.1$$

De là les logarithmes de 0,995 et de 1,005, d'où, en utilisant  $(\alpha)$ ,  $\log. 101 - \log. 100$ , puis  $\log. 102 - \log. 101$ , etc.

Dans les P. T. de 1714, ont été publiées deux méthodes intéressantes pour le calcul d'un logarithme isolé quelconque. L'une, due à Long est basée sur l'emploi de la table des racines  $10^e$ ,  $100^e$ ,  $1000^e$ ,... de 10 et de leurs neuf premières puissances. On divise le nombre dont on cherche le logarithme par le nombre le plus voisin de la table, puis on agit de même sur le quotient, et ainsi de suite. On n'a plus qu'à ajouter les logarithmes obtenus.

Le second procédé est de Taylor qui l'expose en l'appliquant au logarithme de 2. Posons

$$A = 7 \log 2 - 2 = \log 1,28 > 0, \text{ d'où } \log 2 > 0,28$$

$$B = 3 \log 2 - 1 = \log 0,8 < 0, \text{ d'où } \log 2 < 0,33$$

$$C = A + B = 10 \log 2 - 3 = \log 1,024 > 0, \text{ d'où } \log 2 > 0,3$$

$$D = B + 9C = 93 \log 2 - 28 = \log 0,990352031429 < 0,$$

$$\text{d'où } \log 2 < 0,30107$$

$$E = C + 2D = 169 \log 2 - 59 = \log 1,004336277664 > 0,$$

$$\text{d'où } \log 2 > 0,301020$$

$$N = L + M = 325147 \log 2 - 97879 = \log 1,000000364511,$$

$$\text{d'où } \log 2 > 0,3010299956635$$

$$O = M + 18N = 6107016 \log 2 - 1838336 = \log 0,999999764687,$$

$$\text{d'où } \log 2 < 0,3010299956640$$

On a ainsi deux valeurs très rapprochées de  $\log. 2$  et on

peut en tirer une valeur très exacte en remarquant que si  $x$  est très petit on a sensiblement

$$(1 \pm x)^z = 1 \pm zx \quad \text{d'où sensiblement} \quad x \log(1 - z) + 2 \log(1 + x) = 0.$$

Posant en conséquence

$$3645110 + 235313N = 0.$$

on trouve la valeur de  $\log. 2$  avec quinze décimales exactes.

Dodson (*anti-log. Canon*, 1742) donne avec onze décimales les 100 000 moyens géométriques insérés entre 10 et 1, avec leurs logarithmes vulgaires, c'est-à-dire la table désignée ci-dessous :

$$\begin{array}{l} 1 : a = 1,000023026116 : a^2 : a^3 : \dots : 10 . \\ 0 . \alpha = 0,000001 \quad . \quad 2\alpha . \quad 3\alpha \dots \quad 1 . \end{array}$$

Euler, dans son *Alg.* enseigne ainsi à trouver la valeur de  $\log. 2$ . Il s'agit de résoudre l'équation  $10^x = 2$ . Or on a :

$$2^4 > 10 > 2^3, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{3} > x > \frac{1}{4}$$

La fraction  $\frac{1}{6}$ , formée en additionnant les numérateurs et les dénominateurs de ces deux limites de  $x$ , est comprise entre elles<sup>1</sup> : c'est donc une nouvelle approximation. Or

<sup>1</sup> Cette remarque, que les Anciens paraissent avoir connue et utilisée, se voit pour la première fois chez Chuquet (l. cit.), qui l'appelle « la règle des moyens » et l'emploie ainsi pour « l'extraction des racines imparfaites. »

Soit  $\sqrt{6}$  ; l'essai direct donne  $2 < \sqrt{6} < 3$ . Essayons successivement  $2 \frac{1}{2}$ ,  $2 \frac{1}{3}$ ,  $2 \frac{1}{4}$ ,  $2 \frac{1}{5}$ , ...  $2 \frac{1}{3}$ ,  $2 \frac{2}{3}$ , ... nous trouvons :

$$2 \frac{1}{2} > \sqrt{6} > 2 \frac{1}{3},$$

d'où le moyen  $2 \frac{2}{5}$ , qui après essai, se trouve être trop petit. Moyennons les deux limites  $2 \frac{1}{2}$  et  $2 \frac{2}{5}$ , il vient  $2 \frac{3}{7}$ , valeur trop petite. « Et par ceste manière peulx proceder en adjoustant le moins avec le plus ou le plus avec le moins Jusques a ce que lon s'approche bien pres de . 6 . ung petit plus ou ung petit moins et tant qu'il souffise. Et doit on scavoir que tant plus lon continueroit par ceste manie tant plus pres de . 6 . lon s'approcheroit mais Jamais on ne lattaindroit pcisemet. »

Estienne de la Roche, dans son *Arismétique* (Lyon, 1520) emploie également ce procédé, qu'il appelle *par médiacion*.

On appelle aujourd'hui *médiantes* le genre de moyennes dont il vient d'être parlé, et leur étude a mené à la connaissance de diverses suites importantes étudiées par Farey, Cauchy, Brocot, Halphen, etc.

on a :

$$10^2 < 2^7 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{3} > x > \frac{2}{7} .$$

De même, on trouve :

$$\frac{1}{3} > x > \frac{3}{10} , \frac{4}{13} > x > \frac{3}{10} , \frac{7}{23} > x > \frac{3}{10} , \dots \frac{28}{93} > x > \frac{3}{10} , \frac{31}{103} < x .$$

La relation  $\frac{28}{93} > x > \frac{31}{103}$  donne l'approximation  $\frac{59}{196}$ , qui se trouve être trop petite. Combinons-la avec  $\frac{28}{93}$ , il vient  $\frac{87}{299}$ , trop forte. Combinons cette dernière avec  $\frac{59}{196}$ , il vient  $\frac{146}{485}$ ; et ainsi de suite.

Cette méthode serait certainement la moins pratique de toutes celles qu'on a imaginées dans ce but.

La méthode de Briggs, décrite plus haut a été modifiée heureusement par Flower (*New way of making log.* 1771.) Le diviseur est formé de l'ensemble des quatre premiers chiffres, en ajoutant 1, ce qui fournit un quotient de la forme  $0,9^n ab\dots$ . On multiplie ce quotient par  $1,0^n \alpha$ ,  $\alpha$  étant le complément à 9 de  $a$ . On répète la même opération sur le produit et on continue jusqu'à ce que la première moitié des chiffres du produit soit composée de 9: on écrit, immédiatement les derniers facteurs, en prenant les compléments des derniers chiffres. Ainsi par exemple

$$\frac{2966,82051456}{2967} = 0,943950608695$$

le quotient multiplié par  $1,0^46$ , donne  $0,9^502457315$ ; ce produit, multiplié par  $1,0^64$ , donne  $0,9^702457116$ ; celui-ci, multiplié par  $1,0^79$ , donne  $0,9^82457107$ ; ce dernier résultat fournit les facteurs

$$1,0^87 , \quad 1,0^95 , \quad 1,0^{104} , \quad 1,0^{112} , \quad 1,0^{128} , \quad 1,0^{189} , \quad 1,0^{142} ;$$

d'où

$$\log 2966,8\dots = \log 2967 - (\log 1,0^46 + \log 10^64 + \dots)$$

Cette méthode a reçu plusieurs perfectionnements de détails de Lefort, Fedor Thoman, Burnier, Gray et Hopp. Byrne (*Dual log.* 1863) a proposé de la modifier en remplaçant dans la table, les logarithmes de 1,2, 1,3,... 1,02, 1,03,... par ceux de  $1,1^2, 1,1^3, \dots 1,01^2, 1,01^3, \dots$  ce qui réduit la construction de la table au calcul des logarithmes de 1,1, 1,01, 1,001,...

Garnier dans son *Alg.* (Paris, 1800), apprend à développer les logarithmes en fractions continues. Soit à trouver  $\log. 2$ ; on a  $10^x = 2$ , d'où  $x < 1$ . Posons  $x = \frac{1}{\alpha}$ ; on aura  $2^\alpha = 10$ , d'où  $\alpha = 3 + \beta$  et  $2^\beta = 1,25$ . Donc  $\beta < 1$ ; posons  $\beta = \frac{1}{\gamma}$ , on aura de la même manière

$$\gamma = 3 + \delta, \quad 1,25^\delta = 1,024, \quad \text{d'où } \delta < 1;$$

posons donc  $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ , ce qui donnera

$$\varepsilon = 9 + \zeta, \quad 1,024^\zeta = \frac{1,25}{1,23794} = 1,0097,$$

$$\zeta = \frac{1}{\eta}, \quad \eta = 2 + \theta, \quad 1,0097^\theta = \frac{1,024}{1,019494} = 1,0044.$$

Il arrive finalement à ce résultat

$$\log 2 = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5 + \frac{1}{\nu}}}}} = \frac{729}{2621} = 0,3010301.$$

Enfin nous signalerons la méthode de Namur (*Tables de log.* Bruxelles, 1877), qui prescrit de multiplier le nombre dont on cherche le logarithme par un facteur convenable, de manière que le produit soit voisin de 1 000 000 M: les différences des logarithmes sont, aux environs de ce nombre, de la forme 100..., ce qui rend l'interpolation très aisée.

Nous aurions voulu faire encore ressortir davantage l'importance de l'admirable découverte de Neper, en signalant l'influence qu'elle eut sur les progrès du calcul, de la trigonométrie, de la cinématique, de l'algèbre; sur l'extension de celle-ci aux quantités transcendantes; ainsi que sur la

découverte du calcul des fonctions et du calcul infinitésimal. Mais cela eût dépassé notre but, et nous nous contenterons de rappeler, en nous y associant, l'une des épigraphes placées en tête de la *Mirifici Descriptio* :

« Hic liber est minimus, si spectes verba ; sed usum  
Si spectes, Lector, maximus hic liber est.  
Disce ; scies parvo tantum debere libello  
Te, quantum magnis mille voluminibus. *Andreas Junius.* »

A. AUBRY (Beaugency, Loiret).

## LA MATHÉMATIQUE PURE ET L'APPROXIMATION

1. — Dans l'évolution actuelle de l'enseignement des sciences, on constate un mouvement bien marqué vers l'utilité. Trop longtemps on a dit que le seul but des mathématiques était de former le raisonnement ; on les a enseignées comme s'il ne s'agissait que de créer de futurs mathématiciens. Aujourd'hui, on veut faire voir aux élèves que les sciences exactes ont de nombreuses applications pratiques, que la mathématique pure n'est pas seulement une excellente gymnastique de l'esprit, un admirable modèle de pensée logique, mais encore une interprétation approchée et comode de la réalité. Il n'est guère besoin de rappeler ici les nombreux écrits de M. KLEIN<sup>1</sup> en Allemagne, de M. PERRY<sup>1</sup> en Angleterre et de beaucoup d'autres auteurs<sup>2</sup>. Signalons toutefois, parmi les ouvrages français, les volumes très suggestifs de M. LAISANT, *La Mathématique ; Philosophie-En-*

<sup>1</sup> Voir l'aperçu qu'en donne M. Marotte dans sa note sur *L'évolution actuelle de l'enseignement mathématique en Angleterre et en Allemagne*, publiée dans le *Bull. des sciences math.* de 1905, p. 281-306.

<sup>2</sup> Consulter les divers volumes de *L'Enseignement Mathématique*.