

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 8 (1906)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES FONCTIONS ANGULAIRES DANS LA GÉOMÉTRIE DE L'AJUSTAGE  
**Autor:** Andrade, Jules  
**Kapitel:** III. — Composition des vecteurs.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-9270>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

4. L'opération est associative (plusieurs vecteurs composants sont remplaçables par leur vecteur résultant) ;

5. L'opération est continue ;

6. L'ensemble de deux vecteurs n'est équivalent à zéro que si ces vecteurs, portés par une même droite, sont égaux et contraires.

### III. — Composition des vecteurs.

#### *Composition des vecteurs concourants d'un plan.*

Nous allons indiquer l'interprétation analytique des faits qui précèdent. Soit  $F$  un vecteur, d'intensité  $f$ , émanant de  $O_1$  et défini dans un plan en *direction autour de ce point* par l'angle *orienté*  $\alpha$  que sa direction fait avec une droite  $OX$ .

Il résulte des propriétés de l'opération de composition des vecteurs que ce vecteur peut être décomposé en deux vecteurs  $X$  et  $Y$  agissant suivant  $Ox$  et  $Oy$  et que

$$X = f \cdot g(\alpha) , \quad Y = f \cdot h(\alpha) ,$$

$g$  et  $h$  désignant deux fonctions *continues* de l'angle  $\alpha$ .

L'invariance donne de suite les propriétés :

$$(I) \quad \begin{cases} g(-\alpha) = g(\alpha) , & h(-\alpha) = -h(\alpha) , \\ g(\alpha + 1^{\text{dr}}) = -h(\alpha) , \\ h(\alpha + 1^{\text{dr}}) = h(\alpha) , \end{cases}$$

enfin l'associativité et l'invariance combinées, nous donnent après une rotation arbitraire du système des axes de repère :

$$(E) \quad \begin{cases} g(u + v) = g(u)g(v) - h(u)h(v) , \\ h(u + v) = h(u)g(v) + h(v)g(u) . \end{cases}$$

Les propriétés (I) et (E) nous donnent de suite l'équation fonctionnelle

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} g(u + v) + g(u - v) = 2g(u)g(v) , \\ \text{que nous associerons à la condition de continuité} \\ g(0) = 1 . \end{array} \right.$$

Nous aurons d'ailleurs ici la condition supplémentaire  $g(1^{\text{droit}}) = 0$ . (8 bis). Or, j'ai démontré (*Bull. Soc. Mathém. de France*, Année 1900) que toute fonction  $g$  continue, solution de (8) doit admettre une fonction dérivée et que les seules solutions continues de (8) sont alors :

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \text{ou bien} \quad g(u) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{u}{k}\right)^{2n} \frac{1}{1.2.3...2n} \equiv \cos \frac{u}{k}, \\ \text{ou bien} \quad g(u) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{u}{k}\right)^{2n} \frac{1}{1.2.3...2n} \equiv \cos \text{hyp} \frac{u}{k}, \\ \text{ou bien} \quad g(u) = 1. \end{array} \right.$$

Dans le cas qui nous occupe nous avons la condition supplémentaire  $g(1^{\text{dr}}) = 0$  et le premier type de solution convient seul ici ; la constante  $k$  dépend du choix de l'unité d'angle.

$k$  sera égal à 1 si on adopte une unité d'angle dans laquelle l'angle droit sera représenté par la plus petite racine  $\frac{\pi}{2}$  de l'équation :

$$1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{1.2.3...2n} = 0.$$

*Composition des vecteurs concourants dans l'espace.* — En décomposant un vecteur suivant les 3 arêtes d'un trièdre trirectangle, on voit qu'on peut effectuer cette décomposition, en apparence de trois manières différentes, et en exprimant que ces trois modes sont : 1° compatibles, 2° uniques ; d'après le 6<sup>me</sup> caractère de la composition on obtient les relations fondamentales qui existent entre les six éléments d'un triangle sphérique.

Pour compléter l'étude du système (8), j'ajoute que si l'on pose

$$H(\alpha) = \int_0^{\alpha} g(z) dz,$$

on aura, en laissant de côté le cas de  $g(z) = 1$ , et après un choix convenable de la variable  $z$ ,

$$g(\alpha + \beta) = g(\alpha)g(\beta) - \varepsilon H(\alpha)H(\beta) ,$$

$$H(\alpha + \beta) = g(\alpha)H(\beta) + g(\beta)H(\alpha) ,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 \text{ si } g(\alpha) = \cos \alpha , & \quad \text{et en ce cas } H(\alpha) = \sin \alpha ; \\ (\varepsilon = -1) \text{ si } g(\alpha) = \cos \text{hyp } \alpha , & \quad \text{et en ce cas } H(\alpha) = \sin \text{hyp } \alpha . \end{aligned}$$

*Composition des vecteurs d'un plan perpendiculaires à une même droite et agissant d'un même côté.* — Si on considère 2 rotations successives autour d'axes perpendiculaires à un plan P et dirigés d'un même côté de ce plan, on voit que si elles sont suffisamment petites, elles sont remplaçables par une rotation unique perpendiculaire à ce plan; cette circonstance va remplacer ici le rôle joué par le théorème 9 pour les vecteurs concourants. De là et par les lemmes déjà utilisés on conclut que :

Deux vecteurs d'égale intensité  $p$ , tous deux situés dans un même plan, perpendiculaires à une même droite de ce plan, et tirant d'un même côté de cette droite, admettent un vecteur résultant perpendiculaire à la même droite et de plus l'intensité de ce vecteur résultant a pour valeur  $2 p S(x)$ ;  $x$  désignant la demi-distance des points où les vecteurs composants coupent la perpendiculaire commune, et  $S$  désignant une fonction continue.

De plus, en considérant 2 paires de tels vecteurs dont les pieds sur leur perpendiculaire commune sont distribués sur cette droite symétriquement par rapport à un même point, on voit que le caractère continu et le caractère associatif de la composition se traduisent encore par les conditions :

$$(11) \quad \begin{cases} S(x+y) + S(x-y) = 2S(x)S(y) , \\ S(0) = 1 . \end{cases}$$

Mais, cette fois la condition supplémentaire  $g(1^{\text{droit}}) = 0$  de la composition des vecteurs concourants n'a plus son analogue; en sorte que nous avons ici le choix entre les trois solutions du problème 8, c'est-à-dire entre les trois déterminations :

$$(11) \quad \begin{cases} \text{ou} & S(x) = 1 . \\ \text{ou} & S(x) = \cos \frac{x}{k} , \\ \text{ou} & S(x) = \cos \text{hyp } \frac{x}{k} , \end{cases}$$

ce qui nous indique que la géométrie de l'ajustage va alors bifurquer en trois variétés dont la géométrie d'Euclide est un cas particulier.

La composition dans un plan de deux vecteurs inégaux perpendiculaires de même sens sur une même droite s'obtient d'ailleurs immédiatement en introduisant la fonction  $R(r)$  de l'équation 5; il suffit de comparer les vitesses des pieds A et B des deux vecteurs  $\omega_1$  et  $\omega_2$  dans les mouvements composants et dans le mouvement résultant, soit C situé entre A et B le pied du vecteur résultant  $\omega_3$ ; en faisant  $AC = x$ ,  $CB = y$ .

Nous aurons de suite :

$$\frac{\omega_1}{R(y)} = \frac{\omega_2}{R(x)} = \frac{\omega_3}{R(x+y)} .$$

Comparons ce résultat qui concerne les vecteurs vitesses de rotations à celui que fournit l'emploi de la fonction S; notre argument de comparaison sera la généralisation d'une méthode indiquée par Archimède. En effet, introduisons la fonction H, définie plus haut; soit C' un point intermédiaire entre A et B sur AB et soient C'A = x', C'B = y', D le symétrique de C' par rapport au pied A, E le symétrique de C' par rapport au pied B.

Par le rôle de la fonction H ou par sa forme analytique déjà indiquée, nous voyons que cette fonction est croissante dans la géométrie de la droite ouverte, de même cette fonction est croissante tant que la valeur de la variable n'atteint pas le quart du tour de la droite, dans la géométrie de la droite fermée, or on peut s'assurer en prenant la distance A B moindre qu'un demi-tour de droite qu'il n'existe entre A et B qu'un point C' tel que

$$\frac{\omega_1}{H(x')} = \frac{\omega_2}{H(y')} .$$

Supposons le point C' ainsi déterminé, nous pourrions poser :

$$\omega_1 = 2q \int_0^{x'} S(t) dt = 2qH(x') ,$$

$$\omega_2 = 2q \int_0^{y'} S(t) dt = 2qH(y') ,$$

on peut alors considérer le vecteur  $\omega_1$  comme le vecteur résultant d'une infinité de paires de vecteurs chargeant uniformément le segment C'D avec la densité de charge  $q$  par unité de longueur et en même temps le vecteur  $\omega_2$  sera le résultat d'une charge de vecteurs infiniment petits chargeant le vecteur C'E avec la même densité de charge; le vecteur résultant de  $\omega_1$  et de  $\omega_2$  sera donc un vecteur  $\omega_3$  perpendiculaire à AB et dont le pied C'' est au milieu de DE; ce vecteur  $\omega_3$  est alors déterminé par la relation :

$$\omega_3 = 2q \int_0^{x'+y'} S(t) dt = 2qH(x' + y') ,$$

d'ailleurs, si  $x''$  et  $y''$  sont les distances du point C'' à A et B, on a évidemment;

$$x'' = y' , \quad y'' = x' ,$$

en sorte que nous avons

$$\frac{\omega_1}{H(y'')} = \frac{\omega_2}{H(x'')} \quad \text{avec la condition } x'' + y'' = AB = s ,$$

comme nous avons tout à l'heure

$$\frac{\omega_1}{R(y)} = \frac{\omega_2}{R(x)} \quad \text{avec la condition } x + y = s ,$$

mais de plus le point C'' est le pied de vecteur résultant de  $\omega_1$  et de  $\omega_2$  comme le point C est le pied du vecteur résultant des deux mêmes; donc C et C'' se confondent et nous concluons avec  $x'' = x$ , et  $y'' = y$

$$\frac{R(y)}{R(x)} = \frac{H(y)}{H(x)} ,$$

et comme  $x$  et  $y$  peuvent être pris quelconques avec  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , il en résulte que les fonctions  $R(x)$  et  $H(x)$  sont proportionnelles l'une à l'autre.

La formule d'addition de la fonction  $H$  est donc applicable à la fonction  $R$  et nous avons alors comme conséquence des proportions

$$\frac{\omega_1}{R(y)} = \frac{\omega_2}{R(x)} = \frac{\omega_3}{R(x+y)} ,$$

la relation

$$\omega_3 = \omega_1 S(x) + \omega_2 S(y) .$$

REMARQUE. — Le raisonnement précédent eut pu s'appliquer mot pour mot, par l'emploi d'une sphère, aux vecteurs concourants et nous aurions trouvé alors pour la fonction analogue de  $R(x)$  sur la sphère  $\psi(\alpha)$  la même proportionnalité :

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) &= h(\alpha) \cdot m = \sin \alpha \cdot m \\ R(x) &= H(x) \cdot m' . \end{aligned}$$

Il reste à déterminer la constante  $m'$  car  $m$  est évidemment égal à 1.

Pour y parvenir exprimons que la vitesse d'un point situé sur le vecteur  $\omega_3$  résultant des vecteurs qui représentent les vitesses des rotations concourantes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  est nul ; en nommant  $x$  et  $y$  les distances d'un point de  $\omega_3$  aux droites  $\omega_1$  et  $\omega_2$  qui font avec  $\omega_1$  et  $\omega_2$  les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  nous aurons :

$$\frac{R(x)}{\sin \alpha_1} = \frac{R(y)}{\sin \alpha_2} ,$$

car

$$\omega_1 R(x) = \omega_2 R(y)$$

et par la composition des vecteurs concourants

$$\omega_1 \sin \alpha_1 = \omega_2 \sin \alpha_2 ,$$

puisque

$$\omega_1 H(\alpha_1) = \omega_2 H(\alpha_2)$$

par la méthode d'Archimède.

Rapprochons ce résultat du théorème fondamental sur le dièdre.

Considérons une droite  $OA$  qui tourne d'un angle infiniment petit autour d'un axe  $OI$ , soit  $OA'$  la position infiniment voisine de  $OA$  ;  $AA'$  est la corde d'un arc de cercle de centre  $I$  ; soit de même  $B$  un autre point de  $OA$  qui vient

en  $B'$  par la même rotation,  $BB'$  est la corde d'un arc de cercle de centre  $J$  situé sur l'axe  $OI$  et d'après la propriété du dièdre, les angles  $AOA'$  et  $BOB'$  angles rectilignes d'un même dièdre sont égaux.

D'autre part, dans le triangle isocèle  $AOA'$ , et lorsque la rotation considérée tend vers zéro, on a :

$$\lim \frac{AA'}{\text{angle } AOA'} = R(OA), \quad \lim \frac{AA'}{\text{angle } AIA'} = R(AI);$$

d'où, en divisant ces égalités membre à membre

$$\lim \frac{\text{angle } AIA'}{\text{angle } AOA'} = \frac{R(OA)}{R(OI)} = \frac{R(OB)}{R(OI)}, \quad \text{puisque } \widehat{AIA'} = \widehat{BJB'}.$$

Ainsi donc le rapport  $\frac{R(OI)}{R(OA)}$  est une simple fonction de l'angle  $\alpha = AOI$ ; désignons cette fonction par  $f(\widehat{AOI})$ .

En rapprochant ce résultat de la proportion tout à l'heure obtenue, savoir

$$\frac{R(x)}{\sin \alpha_1} = \frac{R(y)}{\sin \alpha_2}$$

nous aurons :

$$\frac{f(\alpha_1)}{\sin \alpha_1} = \frac{f(\alpha_2)}{\sin \alpha_2},$$

c'est-à-dire  $f(\alpha) = \sin \alpha \cdot n$ ,  $n$  étant constant.

Or, pour  $\alpha = 1^{\text{droit}}$ ,  $f(\alpha) = 1$ , comme  $\sin \alpha$ ; donc  $n = 1$ .

Démontrons enfin que  $m' = 1$ , c'est-à-dire, en écartant le cas euclidien, qu'une fois l'unité de longueur droite adoptée de manière que

$$S(x) = \begin{cases} \text{soit } \cos x \\ \text{soit } \cos \text{ hyp. } x \end{cases}$$

on aura

$$R(x) = H(x) = \int_0^x S(z) dz,$$

il n'y a d'ailleurs besoin de démontrer le théorème que dans la géométrie de la droite ouverte. Pour cela considérons sur une sphère déterminée un petit cercle de la sphère dont 2 rayons sphériques  $PA$  et  $PB$  issus du pôle  $P$  font entre eux

l'angle  $\alpha$ , soit  $l$  la longueur de l'arc de ce petit cercle intercepté, si  $r$  est le rayon de la sphère, on a :

$$\frac{l}{R(r)} = \sin \left( \frac{AP}{R(r)} \right) \alpha.$$

Si les rayons AP et PB deviennent infiniment petits on pourra donc écrire en vertu des résultats déjà acquis :

$$\lim \frac{l}{\text{corde AP}} = \alpha.$$

Or si on projette la figure sur le plan du petit cercle, si P'A est la projection de la corde AP, on a :

$$\lim \frac{\text{corde PA}}{P'A} = 1, \quad \text{donc aussi,} \quad \lim \frac{l}{P'A} = \alpha;$$

or

$$l = H(P'A) \cdot \alpha \cdot m',$$

et comme  $\frac{H(P'A)}{P'A}$  a pour limite 1 quand P'A tend vers zéro, on a

$$\lim \frac{l}{P'A} = \alpha \cdot m',$$

d'où, en comparant les deux limites de  $\frac{l}{P'A}$ , on conclut  $m' = 1$ .

REMARQUE. — Dans la géométrie de la droite ouverte et dans un triangle plan qui a deux côtés infiniment petits le déficit de la somme des angles à 2 angles droits est infiniment petit.

#### IV. — Rotations relatives autour d'axes quelconques.

L'étude déjà faite d'un système de rotations relatives autour d'axes concourants fournit un lemme important qui nous permettra d'aller plus loin.

LEMME FONDAMENTAL. — Soient  $U_1$  et  $U_2$  deux droites actuellement données et ne se coupant pas ; considérons un premier corps solide  $S_1$  animé d'une rotation uniforme de vitesse angulaire  $\omega_1$  autour de  $U_1$ , considérons la droite  $\Delta_2$  de ce solide qui coïncidait avec  $U_2$  à l'époque  $t$ , et envisageons par rapport au solide  $S_1$  un second solide  $S_2$  tournant sur  $S_1$  avec une vitesse angulaire constante  $\omega_2$  ; soit un certain point