Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 8 (1906)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

hyperkomplexe Zahlensysteme (m. geometrischen Anwendungen). — HAHN : Theor. Arithmetik, 3. — WEISS : Prakt. Astronomie, 4. — v. HEPPERGER : Astrophysik, 3 ; Theorie der speziellen Störungen, 2. — SCHRAM : Die Zeitrechnungen verschiedener Völker und die Umrechnung fremder Daten (mit besonderer Rücksicht auf Historiker), 2. — HERZ : Die Störungen der Rotationsachse der Erde, 2. — PREY : Photogrammetrie, 2.

BIBLIOGRAPHIE

Paul BACHMANN. — **Zahlentheorie.** Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen. *Fünfter Teil:* Allgemeine Arithmetik der Zahlenkörper. — 1 vol. relié in-8°, XXII, 548 p. ; prix 16 Mk. ; B. G. Teubner, Leipzig.

L'ouvrage de M. Bachmann est consacré à la théorie générale des nombres et des corps algébriques. Cette belle théorie, dont Kummer, Dedekind et Kronecker ont été les fondateurs, a pris depuis une quinzaine d'années un développement extraordinaire. Enseignée dans un certain nombre d'Universités d'Allemagne, elle est très bien connue de la jeune génération des géomètres d'Outre Rhin. Aussi existe t-il en Allemagne des ouvrages excellents sur la matière, parmi lesquels je citerai en première ligne la « Zahlentheorie » de M. Dedekind, l'Algèbre de M. H. Weber (2e volume) et surtout la « Theorie der algebraischen Zahlkörper » de M. Hilbert, connue sous le nom de « Zahlbericht ». Ce dernier ouvrage, qui résume les résultats principaux acquis à la science avant 1896, servira pendant longtemps encore de guide aux chercheurs, mais il n'est pas toujours facile à lire. M. Hilbert n'a pu dans ce Rapport entrer dans les détails de toutes les démonstrations. L'ouvrage de M. Bachmann au contraire ne saurait arrêter un commençant. Ce que M. Hilbert se borne à indiquer, M. Bachmann l'explique longuement. Son livre pourrait donc servir de commentaire aux deux premières parties du Zahlbericht, de commentaire et de complément, car M. Bachmann nous fait connaître aussi quelques uns des résultats publiés depuis 1896.

Son livre contient douze chapitres et un appendice. Dans le premier chapitre nous trouvons d'abord les définitions des notions fondamentales. M. Bachmann nous explique ce qu'on entend par nombre et corps algébrique, domaine de rationalité et d'intégrité, « Unterkörper » et « Oberkörper » etc. Laissant de côté les corps algébriques quelconques, l'auteur nous fait connaître les propriétés essentielles des corps finis qui seuls présentent un intérêt réel. De nouvelles notions s'introduisent alors : celles de base, de norme, de discriminant etc., qui sont d'une si grande importance dans l'étude des propriétés arithmétiques des nombres algébriques. En suivant toujours la route tracée par M. Dedekind, l'auteur expose dans le 2e chapitre les principes de la théorie des modules et des « Ordnung » de Dedekind (« Ring » d'après

M. Hilbert.) Après cette étude préparatoire il serait facile d'aborder la théorie des idéaux de Dedekind. Mais M. Bachmann ouvre une parenthèse, et le chapitre suivant, consacré à la théorie des congruences, est destiné surtout à servir d'introduction à l'étude des méthodes de Kronecker et des recherches de M. Hensel que l'auteur nous fera connaître dans le 7e chapitre.

Après cette excursion dans un domaine connexe, nous reprenons l'étude de la théorie de Dedekind. Nous voici en possession d'une notion nouvelle, celle d'idéal, et nous pouvons enfin aborder l'Arithmétique des nombres algébriques entiers. Cette belle théorie peut être comparée, en se servant d'une expression due à M. Hilbert, à un édifice puissant soutenu par trois piliers : le théorème sur la décomposition univoque des nombres algébriques entiers en facteurs premiers (idéaux), le théorème sur l'existence des unités complexes et le théorème sur la détermination transcendante du nombre des classes.

Le premier de ces théorèmes, avec les nombreuses conséquences qui en découlent, est démontré dans le chapitre 6, la théorie des unités complexes basée sur le deuxième théorème est exposée dans le chapitre 8, enfin le problème si difficile de la détermination du nombre des classes est traité dans le chapitre 9.

Ces chapitres contiennent des développements curieux. Dans le chapitre 6, par exemple, nous trouvons une analyse détaillée des démonstrations si intéressantes du premier théorème fondamental qui ont été données par M. Dedekind et M. Hurwitz (celle de M. Hilbert a trouvé place dans un chapitre différent consacré aux corps de Galois.)

Les autres chapitres du livre de M. Bachmann ne présentent pas un intérêt moindre.

Nous avons déjà dit que le 7e chapitre est consacré aux méthodes de Kronecker et aux recherches de M. Hensel. Ces recherches peuvent être rattachées aux célèbres travaux de Kummer. Dans le domaine particulier étudié par Kummer il existe, comme M. Bachmann l'a très bien expliqué dans un autre volume de sa « Zahlentheorie », une corrélation étroite entre la décomposition d'un nombre premier p en facteurs idéaux et la décomposition d'une certaine équation en facteurs irréductibles mod. p. M. Bachmann nous montre, et c'est en cela que consiste le résultat principal dû à M. Hensel, qu'il en est de même dans le cas général d'un corps quelconque, pourvu que les équations particulières soient remplacées par l'équation fondamentale de Kronecker, équation qui contient les fameuses indéterminées de Kronecker.

Un autre chapitre (le 10e) est consacré aux formes décomposables Quels sont les rapports entre la théorie de ces formes et celle des nombres algébriques entiers ? A quoi correspond dans cette dernière théorie une classe de formes équivalentes etc. ? Telles sont les questions traitées par M. Bachmann dans le chapitre 10. Elles jouent un rôle important dans certaines recherches d'analyse et de théorie des nombres et en particulier dans l'étude des problèmes relatifs à la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques.

Il nous reste à dire quelques mots des derniers chapitres du livre consacrés aux travaux de M. Hilbert sur les corps relatifs et les corps de Galois et aux recherches plus récentes de M. Hensel. On connaît l'importance de la théorie des corps relatifs. M. Bachmann en fait connaître les points principaux dans le chapitre 11 ; et dans le chapitre suivant nous trouvons la belle théorie des corps de Galois qui offre un exemple nouveau des relations étroi-

tes existant entre l'arithmétique des idéaux et la théorie de la résolution algébrique des équations. M. Bachmann met très bien en lumière l'importance de ce fait dû à M. Hilbert.

Quant aux recherches récentes de M. Hensel, il est à regretter que M. Bachmann se soit contenté d'un aperçu et de quelques courtes indications qui ne sauraient donner au lecteur une idée suffisamment complète de la théorie nouvelle de M Hensel. Il est vrai que le volume de M. Bachmann contient déjà bien des choses, il rendra donc des services réels et nous croyons qu'on le lira avec fruit et avec plaisir. Les commençants y puiseront les principes d'une théorie importante et belle ; et quant à ceux qui connaissent déjà les traités de M. Hilbert ou de M. Weber, ils trouveront dans le livre de M. Bachmann des indications prècieuses et des éclaircissements utiles

D. Mirimanoff (Genève.)

W.-W. Rouse Ball. — **Histoire des Mathémathiques.** Edition française revue et augmentée, traduite sur la troisième édition anglaise par *L. Freund.* T. I. — 1 vol. gr. in-8o, 422 p. ; Hermann, Paris.

Ce premier volume contient la traduction des quinze premiers chapitres de l'ouvrage anglais. « A short account of the history of mathematics » de Rouse Ball (3e édit. Londres 1901), et embrasse l'histoire des mathématiques depuis les temps les plus anciens jusqu'à Newton. Ainsi que l'a déjà remarqué G. Eneström dans une analyse de l'édition anglaise (*Biblioth. mathém.* 1902 p. 244 et suiv.) R. Ball a eu beaucoup moins en vue le développement des idées mathématiques qu'un exposé biographique et bibliographique de la matière. Il s'en suit que la plupart des chapitres laissent à désirer, en ce qui concerne l'exposition de la science mathématique et particulièrement ses points caractéristiques ; c'est le cas en premier lieu de la période florissante de la géométrie grecque : on ne retire qu'une bien vague idée de ses méthodes de démonstration et de sa manière de manier l'infiniment petit (méthode d'exhaustion) ; de même des mathématiques des Indiens et des Arabes : l'analyse indéterminée pour les premiers, la trigonométrie pour les derniers auraient mérité mieux ; tout ce que nous apprenons de la trigonométrie arabe est que Albattani a établi la relation du cosinus de la trigonométrie sphérique et que Aboulwafa a découvert la variation de la lune, deux assertions également inexactes. Il est à ce propos très regrettable que pour n'avoir pas tenu compte de travaux récents parus notamment dans la *Bibl. mathem.* et les *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften* beaucoup d'inexactitudes se soient glissées dans l'ouvrage, inexactitudes qui, malheureusement, n'ont été rectifiées par le traducteur que dans la minorité des cas ; par exemple, des vingt cinq remarques que G. Eneström (loc. cit.) fait à propos du texte anglais, six seulement ont été prises en considération dans la traduction française. Pour ce qui concerne les mathématiques modernes au XVIIe siècle, nous devons reconnaître que l'auteur a traité cette période, d'une façon bien supérieure à l'Antiquité et au Moyen-Age.

On pourrait aussi critiquer l'orthographe défectueuse des noms arabes. A la vérité, la faute principale incombe ici à R. Ball ; mais même les noms que celui-ci à écrits justes n'ont pas été rendus correctement par le traducteur, car un Français ne peut adopter simplement la méthode anglaise de transcription sans qu'il en résulte une prononciation parfaitement fausse. Ainsi R. Ball écrit correctement (en négligeant toutefois de marquer la voyelle longue) : Albuzjani, mais à tort : Alkarismi, Alkayami, Alkarki. Ces noms doi-

vent être transcrits en français : Albouzdjani, Alkhouarizmi ou Alkhwarizmi, Alkhayyami, Alkarkhi. Au lieu des noms du Moyen-âge Albategni, Alhazen et Arzachel, on pourrait bien écrire aujourd'hui Albattani, Alhasan ibn al-Haitam et Alzarkali. Le traducteur aurait d'ailleurs pu trouver l'orthographe française des noms arabes dans la publication de l'algèbre d'Alkhayyami par Woepcke (Paris 1851), ouvrage qu'il doit cependant bien connaître s'il s'occupe d'histoire des mathématiques.

G. Eneström a corrigé seulement une partie minime des indications fausses de R. Ball, il s'en trouve dans l'ouvrage un nombre beaucoup plus considérable ; qu'on nous permette de citer encore ici les plus importantes :

P. 36. Hippias d'Elée est incorrect, le sophiste Hippias n'est pas originaire d'Elée (Elea) dans la Basse Italie, comme Xénophane et Zénon, mais d'Elis (ou Elide) dans le Péloponèse ; la même erreur a été commise par G. Loria (Le scienze esatte nell' antica Grecia, I. p. 64-66) qui l'appelle Ippia d'Elex au lieu de Ippia d'Elide.

P. 42-43. Pour avoir ignoré les récents mémoires de F. Rudio dans la Bibl. math. (3e Folge, 3n Band, 1902, p. 7-62), tout l'exposé des quadratures de l'Hippocrate est erroné.

P. 77. IV a. L'œuvre mécanique d'Archimède étudiée ici aurait été mieux introduite par le titre connu « l'équilibre des surfaces planes » que par « mécanique ».

P. 82. « Nous possédons des copies des commentaires faits sur l'ensemble de l'ouvrage (d'Apollonius) par Pappus et Entocius » n'est pas exact : de Pappus nous possédons un certain nombres de lemmes concernant les trois premiers livres et d'Entocius seulement les commentaires sur les quatre premiers livres des sections coniques d'Apollonius.

P. 92. Que le théorème de Ptolémée se trouve dans le sixième livre des éléments d'Euclide est probablement une faute d'impression : il se trouve dans le premier livre de l'Almageste (édition de Heiberg, p. 37 etc.)

P. 93. Le traducteur ne cite de la publication des œuvres d'Héron que le premier volume de 1899, il ignore encore les deux suivants parus en 1900 et 1903.

P. 150. L'Université de Prague n'a pas été fondée au 13e siècle mais en 1347 ; parmi celles du 14e siècle ne sont pas mentionnées celles d'Heidelberg, de Cologne et d'Erfurt. Le chapitre sur la « création des premières universités au Moyen-âge » contient d'ailleurs maintes inexactitudes.

P. 155. Le récit de l'invasion des Aryens est complètement erroné ; celle-ci n'eut pas lieu au 5e ou au 6e siècle, mais environ 2000 à 1500 ans avant J.-C. voire, même plus tôt d'après certains historiens.

P. 158. A propos de l'équation $nx^2 + 1 = y^2$, il aurait été plus intéressant de voir comment Brahmagupta et Bhaskara la résolvaient en nombres entiers au lieu de donner la solution en fractions rationnelles ; car celle-ci n'est pas le grand progrès des mathématiciens indiens mais bien la solution en nombres entiers (dite « méthode cyclique ») que Lagrange a retrouvée seulement en 1767.

P. 165. Nous ne savons pas où l'auteur a appris qu'Alkhouarizmi a été en Afghanistan et peut-être aussi en Inde ; nous n'avons en tout cas connaissance d'aucune source qui mentionne ceci.

P. 166 et 167. Le système de numération décimale arabe ou indien n'a pas été apporté en Occident par l'Algèbre de Khouarizmi, mais bien par son Arithmétique.

P. 170 et 171. Qui était Abd-al-Gehl (un géomètre vers 1100), c'est ce que j'ignore ; est-ce peut-être Ibn Abdaldjalil ou Aboul-Djoud ?

P. 173. Il n'est pas exact qu'Arzachel ait émis l'idée du mouvement elliptique des planètes.

P. 187. Il est dit ici que l'ouvrage sur lequel est basée la plus grande partie de la célébrité d'Oresme traite de monnaies et de change commercial. Nous avouons ne connaître d'Oresme aucun ouvrage de ce genre.

Nous pourrions allonger encore beaucoup cette liste de fautes ; mais nous terminons ici par la remarque que le traducteur aurait bien fait d'accorder à son travail une dernière revision, afin de pouvoir le compléter par une liste de fautes d'impression, liste qui certes n'aurait pas été superflue, car la quantité de celles-ci n'est pas des moindres. Qu'on me permette de citer comme pièces à conviction du fait que la traduction a été exécutée un peu superficiellement les détails suivants : Pour les renvois à des pages précédentes ou suivantes, on a redonné simplement les numéros de l'édition anglaise quoiqu'ils ne correspondent pas à ceux de la traduction française (p. exemple, p. 111, note 1 on indique p. 111-112 au lieu de 115-116) ; p. 158, M. Freund traduit « ape » (= singe) par « ascète » (!)

On peut enfin reprocher à l'auteur, en partie aussi au traducteur, les nombreuses citations incorrectes ou tout au moins incomplètes de titres de publications ; par exemple p. 13 : Hankel, Geschichte der Mathematik, au lieu de : Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter.

L'ouvrage se termine par cinq Notes (p. 327-412) :

I. Sur Viète considéré comme géomètre d'après Michel Chasles. — Analyse des ouvrages originaux de Napier relatifs à l'invention des logarithmes, par Biot. — III. Sur Kepler, d'après Michel Chasles et Joseph Bertrand. — IV. Développement des principes de la Dynamique. Travaux de Galilée et Hughens. par Mach, traduction Emile Bertrand. — V. Sur les origines de la statique. Préface de l'ouvrage de Pierre Duhem.

H. Suter, (Zurich.)

Ettore Bortolotti. — **Aritmetica generale ed Algebra per la 1ª classe liceale,** in conformità dei programmi governativi, 11 nov. 1904. — 1 vol. in-8°, 120 p. ; prix : L. 1,50 ; Soc. editrice Dante Alighieri di Albrighi, Segati & C°, Roma-Milano.

Conformément à son titre, cet Ouvrage comprend deux parties : I Arithmétique générale (les cinq premières opérations sur des nombres positifs et négatifs et sur des polynomes) ; II Algèbre (les équations des premier et deuxième degrés, les progressions et les logarithmes.)

La première renferme l'exposé des propriétés des opérations tirées d'un petit nombre de définitions et de principes fondamentaux ; il est accompagné d'exercices faciles.

Dans la deuxième partie les équations du premier degré donnent lieu à 70 exemples très intéressants et bien choisis. Les équations du second degré sont précédées, à titre d'introduction, de l'extraction de la racine carrée. La forme de résolution est fort bien déduite elle est suivie de 24 exemples d'application. Viennent un chapitre consacré aux progressions arithmétiques et géométriques, puis l'étude des logarithmes introduits sur la remarque suivante (p. 105) : « *Deux progressions, toutes deux croissantes, l'une géométrique et l'autre arithmétique, constituent un* SYSTÈME DE LOGARITHMES, *si la première contient parmi ses termes l'unité et l'autre le zéro et si, à partir de ces*

termes on associe deux à deux les termes correspondant à un même rang, c'est-à-dire si l'on pose :

$$\log q^n = nd .$$

Il est regrettable que la table de logarithmes à 3 décimales (p. 113) contiennent des erreurs dans le dernier chiffre.

Dans les applications on trouve le problème des intérêts composés suivi de six jolis petits problèmes.

Nous avons eu beaucoup de plaisir à examiner cet excellent petit manuel.

Ern. Kaller (Vienne.)

R. Gans. — **Einführung in die Vektoranalysis** mit Anvendungen auf die mathematiche Physik. — 1 vol. cart. in-8°, 100 p. ; prix : 2 Mk. 80 B.-G. Teubner, Leipzig.

E. Jahnke. — **Vorlesungen über die Vektorenrechnung** mit Anvendungen auf die Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. — 1 vol. cart. in-8°, 235 p.; prix: 5 Mk. 60; B.-G. Teubner, Leipzig.

Les idées de Möbins, de Bellavitis, de Grassmann et de Hamilton sur le rôle utile du calcul géométrique finissent peu à peu par triompher. Elles ont permis d'introduire d'importantes simplifications non seulement dans plusieurs domaines de la Géométrie, mais aussi en Mécanique et en Physique. C'est surtout dans ces deux dernières branches que l'emploi des méthodes vectorielles a pris, depuis quelques années, un développement très réjouissant. Aujourd'hui il n'est guère possible de lire dans ces domaines certains mémoires et traités fondamentaux, sans connaître quelques notions du Calcul vectoriel.

En attendant que ses notions essentielles soient introduites dans les cours et les manuels de Géométrie analytique, l'Analyse vectorielle fait l'objet de cours spéciaux dans quelques universités et écoles polytechniques. Elle a donné lieu à plusieurs ouvrages élémentaires auxquels viennent s'ajouter aujourd'hui ceux de M. Gans et de M. Jahnke.

Dan son *Introduction à l'Analyse vectorielle et son application à la Physique mathématique,* M. Gans présente d'abord les opérations élémentaires, puis les opérateurs différentiels. On lira avec intérêt les applications aux théorèmes de Stokes et de Green, à la notion de potentiel, à l'Hydrodynamique et à la Statique.

Les *Leçons de Calcul vectoriel* de M. Jahnke sont beaucoup plus développées ; elles insistent davantage non seulement sur les propriétés du calcul vectoriel proprement dit, mais aussi sur le calcul géométrique d'une manière générale. Ces leçons contiennent aussi les applications fondamentales à la Mécanique et à la Physique, mais on y trouve encore des applications fort intéressantes aux domaines les plus divers de la Géométrie. Elles se recommandent tout particulièrement à ceux qui désirent approfondir les méthodes du calcul géométrique.

H. F.

Œuvres de Laguerre publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par MM. Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché. Tome II : Géométrie. — Vol. in-8 de IV-715 pages ; prix : 22 fr. ; Gauthier-Villars ; Paris.

« Edmond Laguerre fut, en Mathématiques, un des esprits les plus originaux de notre temps. Il s'est successivement attaché aux sujets les plus

variés et sur chacun d'eux il a répandu les idées les plus neuves et les plus fécondes, traçant des voies auxquelles nul avant lui n'avait songé. »

« Peu soucieux de la renommée, il a semé ses découvertes en une foule de courtes notes éparses en divers recueils, sans se préoccuper de faire ressortir aux yeux du public l'ampleur et l'unité de son œuvre. »

« En outre, sauf en ce qui concerne la doctrine des imaginaires, à laquelle il a, en 1870, consacré quelques conférences libres, il n'a jamais eu occasion d'exposer publiquement ses idées personnelles. »

« Cette double circonstance explique comment celles-ci sont loin de jouir de la notoriété que devrait leur valoir leur importance intrinsèque et comment des Ouvrages didactiques, pourtant excellents, publiés sur les branches de la Science qu'a le plus enrichies Laguerre, mentionnent à peine ses admirables travaux. »

« On peut donc affirmer que la réunion des Œuvres de Laguerre réserve de véritables surprises au public mathématique qui se trouvera, pour la première fois, à même de les juger dans leur ensemble et dans mesurer toute la portée ».

C'est en effet ce que l'on a constaté après l'apparition du premier volume, paru il y a dejà plusieurs années. On sait qu'il contient les recherches sur l'Algèbre et le Calcul intégral et qu'il débute par une Notice sur la vie et les travaux de Laguerre par M. Poincaré.

Le Tome II renferme l'œuvre géométrique ; on y trouve plus de quatre-vingt Mémoires, dont les trois premiers, consacrés à la théorie des foyers, ont été publiés dans les *Nouvelles Annales* des années 1852 et 1853, alors que, candidat à l'Ecole polytechnique Laguerre était encore élève de l'Institution Barbet. Il est impossible de donner un aperçu même très succinct de ces Mémoires qui se répartissent sur les domaines les plus divers de la Géométrie. Laguerre abordait avec une égale facilité les questions de Géométrie synthétique et les applications de l'Algèbre à la Géométrie. Nous rappellerons cependant ses intéressantes recherches sur la Géométrie de direction et ses nombreuses Notes sur les surfaces algébriques et sur la Géométrie infinitésimale.

H. F.

Ernest Lebon. — **Table des Caractéristiques** relatives à la base 2310 des facteurs premiers d'un nombre inférieur à 30030. — 1 fasc. in-8°, 20 tableaux ; Delalain frères, Paris.

Cette *Table de Caractéristiques* permet de résoudre très rapidement le problème suivant : Un nombre étant donné reconnaître s'il est premier ou composé, et dans le second cas, trouver ses facteurs premiers. M. Lebon l'a construite en s'appuyant sur des propriétés non encore signalées de certaines progressions arithmétiques. Dans le présent opuscule l'auteur a du se limiter aux nombres inférieurs à 30030. On trouvera d'abord un exposé très élémentaire de la théorie de la construction de cette Table dont l'emploi est des plus faciles. Grâce à leur disposition à la fois simple et ingénieuse, ces tableaux sont appelés à jouer un rôle très utile, mais, ils devraient être continuées. La Table de base 30030, analogue à celle-ci, permettrait d'aller jusqu'au nombre 510510 ; la Table de base 510510 servirait à son tour pour les nombres inférieurs à 9699690, etc.

Nous croyons que de telles Tables rendraient de grands services et nous

espérons, qu'encouragé par le succès de cet essai, M. Lebon continuera cette publication. [1] H. F.

Ed. Maillet. — **Essais d'hydraulique souterraine et fluviale.** — 1 vol. gr. in-8° de VI — 218 pages avec tableaux numériques ; prix : 11 fr. ; A. Hermann, Paris.

Le présent volume cause à première inspection un bien légitime étonnement. Ouvert au hasard il peut nous montrer des pages tellement remplies de symboles analytiques qu'on ne doute pas d'être en présence de méthodes relevant de la Physique mathématique. Ailleurs, il nous montre les résultats numériques, des débits soigneusement calculés pour des sources n'ayant aucun caractère fictif. Traiter analytiquement le régime des sources et des nappes d'eau et obtenir des résultats concordant avec les observations ou mieux encore permettant de prévoir celles-ci, voilà qui est bien fait pour déconcerter beaucoup d'esprits. C'est cependant ce qui se trouve dans le présent ouvrage. Certes, ces questions ne sont pas absolument nouvelles et le régime des sources alimentant Paris est une question tellement capitale quant à l'hygiène de la grande ville que les ingénieurs ont dû mettre beaucoup de science à faire des observations et des prévisions. C'est ainsi que depuis plus de trente ans certaines lois à apparences assez rigoureuses ont été formulées, telles que celles de Dausse sur les profits qu'une nappe souterraine tire de certaines pluies.

D'autre part et dans un ordre d'idées beaucoup plus abstrait, M. Boussinesq a fait des théories mathématiques entre lesquelles et les précédentes M. Maillet semble avoir établi un admirable trait d'union.

Et comme il est rare qu'un ingénieur descendant jusqu'aux côtés pratiques des questions soit en même temps un géomètre de grande valeur à qui des points récents de la théorie des fonctions doivent beaucoup on comprend tout l'intérêt et toute l'originalité du présent ouvrage.

D'ailleurs on y pénètre sans peine. Les méthodes graphiques y sont mises continuellement à contribution. Ainsi, tout au début, nous envisageons des généralités sur le débit des nappes. Au temps t_0 nous avons un débit Q_0, au temps t_1, un débit Q_1 quantités entre lesquelles une intégration très simple nous donne une relations de la forme.

$$t_1 - t_0 = \varphi_1 (Q_0) - \varphi_1 (Q_1) \ .$$

Portant les Q_0 en abscisses, les Q_1 en ordonnées on a une courbe pour chaque valeur de $t_1 - t_0$. On voit sans peine que toutes ces courbes se déduisent de l'une d'entre elles par une construction géométrique simple. Dans le cas où le débit varie exponentiellement les courbes précédentes sont des droites passant par l'origine. Dans le chapitre suivant ces considérations sont reprises d'une manière légèrement différente et nous envisageons aussi les cas très intéressants où le débit est inversement proportionnel au carré d'une fonction linéaire du temps ce qui parait se rapprocher du régime d'une des sources de la Vanne située à Armentières.

Dans le chapitre IV s'introduisent les considérations véritablement savantes. On part ici d'une équation aux dérivées partielles du second ordre dont on connaît quelques solutions exactes données par M. Boussinesq et c'est

[1] Voir, dans le présent n°, le compte rendu du 44e Congrès des Soc. Savantes, Paris, 1906.

ici aussi que la question capitale de la *stabilité* est envisagée. Il est très important en effet de savoir si après une perturbation brusquement apportée au régime d'une source, par exemple après une pluie soudaine, la source manifestera un dérèglement prolongé où reprendra au contraire presque immédiatement le régime normal. Il faut signaler ici la propagation des ondes dans les nappes souterraines qui donne lieu à une analyse très remarquable. Dans tous les cas où les nappes sont insérées entre un fond et une voûte de formes bien déterminées M. Maillet arrive à des résultats analytiques d'une élégance surprenante. Il considère surtout les cas où ces surfaces sont planes ou paraboliques et il peut alors terminer ses opérations qui présentent parfois de curieuses analogies avec d'autres problèmes de physique mathématique (Emploi de l'équation de Riccati, des fonctions de Bessel, etc...)

La prévision des bas débits des cours d'eau et des sources termine la partie théorique. Je ne puis ici donner idée de la partie pratique qui achève le volume ; si ce n'est en disant qu'elle justifie la première et qu'elle témoigne encore une fois de l'esprit pratique et consciencieux de l'auteur. Son volume et les récents mémoires de M. Boussinesq font faire un grand pas à la science pure et à de nombreuses questions d'hydraulique et d'hydrographie.

A. Buhl (Montpellier.)

H. Poincaré. — **Leçons de Mécanique Céleste** professées à la Sorbonne. Tome I. — Théorie générale des perturbations planétaires. — 1 vol. in-8° de VI-368 p. ; prix : 12 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

M. Poincaré nous indique très nettement dans sa préface quel est le caractère des leçons qu'il publie aujourd'hui. Elles ne font double emploi ni avec les *Nouvelles Méthodes de la Mécanique Céleste*, ni avec le Traité de Tisserand. Ce sont les leçons faites à la Sorbonne par l'illustre professeur ; elles partent des principes mêmes de la Mécanique analytique et étudient le problème des trois corps en restant beaucoup plus près des considérations astronomiques proprement dites que les *Nouvelles Méthodes* qui, elles, sont surtout caractérisées par une minutieuse discussion analytique de résultats dans lesquels l'astronome ne voyait guère que le caractère formel. En parcourant les présentes pages on éprouve encore une sensation très différente de celle éprouvée en parcourant Tisserand.

Les créateurs de la Mécanique Céleste, à commencer par Laplace, n'eurent pas à leur disposition de puissants et uniformes moyens d'investigation.

Que l'on compare par exemple la théorie de la Lune du savant précité et sa théorie des perturbations planétaires. On aura pendant très longtemps l'illusion que l'on étudie des choses totalement différentes. Le premier moyen véritablement général devait être fourni par les équations canoniques d'Hamilton et Jacobi qui permirent tout d'abord de dégager le caractère si simple en principe de la fameuse méthode de la variation des constantes arbitraires. Le grand mérite du Traité de Tisserand est de dévoiler cela tout de suite. Du présent ouvrage de M. Poincaré, dans un ordre d'idées analogue, on peut dire plus encore : il est le triomphe de la canonisation des équations. Elles apparaissent tout de suite au premier paragraphe, à la première page ; les transformations qui n'altèrent pas la forme canonique sont étudiées immédiatement ensuite, les théorèmes généraux y relatifs tels ceux de Jacobi et de Poisson nous mettent à même de manier les instruments

à peu près uniques à l'aide desquels nous allons aborder le redoutable problème des trois corps.

M. Poincaré nous en montre rapidement les intégrales élémentaires connues, élimine le centre de gravité, les nœuds et montre aussi comment on est conduit à étudier tout d'abord le problème restreint, c'est-à-dire le cas où l'un des corps a une masse assez petite pour ne pas troubler sensiblement le mouvement képlérien des deux autres. La théorie de la Lune se rapproche de ce problème restreint car, fortement troublée elle-même, elle ne peut guère troubler le mouvement képlérien du Soleil autour du centre de gravité du système qu'elle forme avec la Terre. D'ailleurs on peut encore un peu simplifier les choses en supposant circulaires les orbites non troublées. Mais avant de développer complètement ce problème et d'aborder les vues si originales de l'auteur nous revoyons en quatre chapitres le mouvement elliptique non troublé puis les orbites osculatrices d'un mouvement troublé. C'est d'abord la méthode de Jacobi qui sert et elle introduit naturellement des constantes canoniques que l'on fait varier ensuite ; ici l'usage habile des *crochets de Jacobi* nous montre immédiatement les résultats qui dans l'ouvrage de Tisserand par exemple, n'apparaissent qu'après des calculs plus longs. Et c'est ici aussi que nous pouvons nous rendre compte de progrès très grands. Passer des éléments canoniques aux éléments elliptiques a, e, φ, π. ϑ, ε c'est détruire malheureusement le caractère canonique des équations et c'est pourquoi M. Poincaré nous propose d'autres systèmes de variables n'ayant pas cet inconvénient. Il s'ensuit naturellement de grandes différences dans les développements terminaux des éléments, mais des calculs devant lesquels l'imagination recule tant ils semblent menacer de devenir inextricables restent ici élégants et faciles à suivre. Le regretté Callandreau n'a-t-il pas dit quelque part que M. Poincaré avait traité ces questions avec une facilité qui déconcerte absolument ?

Revenons au problème restreint. On sait qu'il admet une intégrale importante et célèbre dite *intégrale de Jacobi*. Cela se met tout de suite en évidence par un choix heureux d'éléments canoniques avec lesquels la fonction caractéristique du système d'équation ne contient pas le temps. Il s'ensuit qu'elle est constante et c'est le cas d'un problème de Dynamique admettant l'intégrale des forces vives. Il y a quelque chose d'absolument analogue dans la théorie des perturbations séculaires que M. Poincaré traite ensuite. La question de la stabilité apparaît encore sous un jour excessivement simple, les éléments figurant dans des formes quadratiques à termes tous positifs et qui doivent rester constantes. Dans ces conditions la variation des éléments en question est évidemment limitée.

Au fond la question la plus importante de toutes est de faire disparaître des développements terminaux les termes séculaires, c'est-à-dire ces termes qui menacent de croître indéfiniment avec le temps. Dès qu'ils s'aperçurent de leur existence, les créateurs de la Mécanique Céleste eurent bien l'intuition que ces termes n'avaient pas d'existence objective dans le système planétaire et que c'était la méthode de calcul qui les introduisait ; ce ne fut cependant pas une chose aisée que de se débarrasser de cet encombrant apanage.

Un immense mérite revient à Delaunay car cet illustre et patient esprit, dans sa théorie de la Lune, donne une méthode précise pour empêcher le temps de sortir des fonctions sinus et cosinus, mais il fallait la persévérance qui lui fut spéciale pour ne pas reculer devant la solution effroyable-

ment longue qu'il imaginait. M. Poincaré, continuateur de Delaunay, a perfectionné ces méthodes. A coup sûr on peut se demander si la nouvelle analyse n'entraînerait pas aussi de grandes longueurs lors ds ses applications numériques mais nous voyons maintenant les choses d'assez haut et d'une façon assez simple pour nous rendre compte du fait que là où la longueur subsiste il est dans la nature des choses qu'il en soit ainsi.

Dans les derniers chapitres du livre, nous revenons sur le cas général du problème des trois corps et le souci qui domine est précisément de démontrer que là encore on peut débarrasser les développements des termes séculaires tout comme dans les cas plus simples étudiés précédemment. Delaunay dont je parlais plus haut a été invoqué par M. Poincaré pour terminer ce bel ouvrage où les astronomes pourront se familiariser avec beaucoup de méthodes encore imparfaitement connues par beaucoup d'entre eux et où les analystes pourront trouver de féconds sujets de méditation tout en s'apercevant que beaucoup de concepts de pure analyse pourront être appliqués par eux aux besoins de la Mécanique Céleste.

A. Buhl (Montpellier).

G. Scheffers. — **Lehrbuch der Mathematik** für Studierende der Naturwissenchaften und der Technik mit 344 Figuren — 1 vol. gr. in-8°, 682 p.; prix : 16 mk. ; Veit & C°, Leipzig.

En raison de l'importance croissante que prennent les mathématiques dans les sciences les plus diverses, on demande de plus en plus aux établissements supérieurs de mieux adapter leur enseignement mathématique aux exigences actuelles des autres branches scientifiques. Plusieurs universités ont compris qu'à côté des cours et des conférences destinés aux étudiants en mathématiques, il y avait lieu d'organiser un enseignement s'adressant plus particulièrement à ceux qui ne cherchent dans mathématiques qu'un simple instrument auxiliaire. C'est à ce public, de plus en plus nombreux, qu'est destiné le bel Ouvrage de M. Scheffers.

D'une forme très élémentaire au début, n'exigeant que des connaissances tout à fait rudimentaires, ce traité conduit l'étudiant à des applications d'un caractère très élevé. La marche, bien ordonnée, est très lente, surtout dans la première moitié de l'ouvrage ; elle est originale par le groupement des matières et par les applications bien choisies et fort intéressantes.

L'auteur part de la mesure des grandeurs, des notions de fonctions et de coordonnées et donne des exemples très variés de la représentation graphique. La notion de dérivée et la différentiation d'expressions algébriques fait l'objet d'une étude très approfondie avec des nombreux problèmes pratiques. Viennent ensuite les fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires. Les dérivées d'ordre supérieur sont suivies de leurs applications géométriques et cinématiques (courbure, mouvement rectiligne, mouvement curviligne.) Dans le chapitre consacré à l'étude des fonctions on trouve les formules d'interpolation, puis une très belle étude du théorème de Taylor et de ses applications. L'étude de la série de Fourier, placée à la suite des méthodes d'intégration, sera bien accueillie des physiciens. Du reste, qu'il s'agisse de ces derniers, ou d'une manière générale des étudiants des diverses branches scientifiques, tous trouveront dans cet Ouvrage de nombreuses applications bien approfondies, qui les initiera à l'emploi du Calcul différentiel et intégral dans les sciences appliquées.

Il suffira, pour faire ressortir le caractère de ce volume, de signaler les

intéressants développements qui accompagnent l'étude de la fonction exponentielle ; on oublie trop souvent de faire remarquer aux étudiants pourquoi cette fonction e^x intervient constamment dans les applications les plus diverses et l'on se borne, le plus souvent, au problème des intérêts composés. Après l'étude du paragraphe consacré à la fonction exponentielle et à la croissance organique, les lecteurs de l'Ouvrage de M. Scheffers en auront une idée très nette.

Le volume se termine par plusieurs tables numériques et par une table analytique des matières.

Il faut remercier M. Scheffers d'avoir entrepris la publication de ce Traité, qui est appelé à rendre de grands services à une catégorie très importante d'étudiants. H. Fehr.

H. Schubert. — **Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis.** — 2 vol. in-16°, 239 et 218 p.; prix 4 Mk. le volume; G.-J. Göschen, Leipzig.

Donner une analyse de ces deux intéressants petits volumes est plutôt difficile. L'on est d'un bout à l'autre charmé par l'ingéniosité de l'auteur, en même temps qu'un peu étonné de la diversité des sujets traités.

Dans son premier volume, après avoir indiqué une méthode d'une extrême simplicité pour le calcul des valeurs approchées des logarithmes, M. Schubert s'occupe entre autres de la construction du polygone régulier de dix-sept côtés, des équations de la division du cercle, du nombre des images réfléchies par deux miroirs plans, d'une certaine inconséquence commise dans l'établissement des mesures absolues, etc. Le livre se termine par un chapitre consacré au problème d'Apollonius et autres questions analogues.

Le second volume comprend tout d'abord une étude relative aux triangles et pyramides de Héron, autrement dit relative à des figures géométriques limitées par des droites et dont certains éléments essentiels, tels que côtés, surface par exemple, volume s'il y a lieu, etc. — sont exprimables en nombres entiers. Un autre chapitre se rapporte aux fractions continues de l'arithmétique, puis le recueil s'achève sur une seconde méthode permettant de trouver facilement la valeur d'un logarithme.

M. Schubert se proposait de donner à ceux qui enseignent le moyen de traiter certaines questions pour elles-mêmes. Nous pensons qu'il a fait mieux encore, puisqu'il rend ainsi service à tous ceux qui, sans être mathématiciens de profession, aiment à s'occuper des problèmes intéressants auxquels conduit notre belle science. G. Dumas (Zurich).