

SUR LE CONTOUR APPARENT DE LA SURFACE D'UN CORPS DÉFINITION, COMPOSITION ET DETERMINATION PAR POINTS, AU MOYEN DES PROCÉDÉS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, DU CONTOUR APPARENT DE LA SURFACE d'un CORPS. SÉPARATION D'OMBRE ET DE LUMIÈRE.

Autoren: **Chené F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-9255>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LE CONTOUR APPARENT DE LA SURFACE D'UN CORPS

DÉFINITION, COMPOSITION ET DÉTERMINATION
PAR POINTS, AU MOYEN DES PROCÉDÉS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,
DU CONTOUR APPARENT DE LA SURFACE D'UN CORPS. —
SÉPARATION D'OMBRE ET DE LUMIÈRE. — TECHNOLOGIE.

1. Introduction. — La définition, la composition et la détermination du contour apparent de la surface d'un corps semblent avoir été données jusqu'ici d'une manière bien imparfaite. Trop souvent encore, on lit par exemple, que le contour apparent de la surface d'un corps est la courbe de contact d'un cône, circonscrit à la surface et ayant l'œil pour sommet, alors qu'on soupçonne immédiatement toutes les restrictions et additions que cette définition exige dans les applications, puisque la courbe de contact à laquelle on a même donné le nom de *Courbe de perspective*, n'appartient pas toujours, ni en tout, ni en partie, à ce qu'il convient d'appeler le *Contour apparent*. (Voir I. M. 1898, p. 6).

Nous avons en vue de donner, dans cette Note, pour le contour apparent et la séparation d'ombre et de lumière sur la surface d'un corps, une définition mathématique complète, la composition précise, une technologie et enfin, une règle générale et méthodique de recherche par points au moyen des procédés de la Géométrie descriptive.

2. Colliers. — Si l'on appelle *tangente à une surface*, une droite tangente à une courbe de la surface, on sait que le lieu a des points de contact des tangentes menées par un point O à une surface est le même que le lieu des points de contact des plans tangents menés par le point O à la surface, ou que la courbe de contact du cône ayant O pour sommet et circonscrit à la surface. La ligne a peut donc être désignée sous

trois appellations différentes, sans compter l'appellation abusive de *contour apparent* ou de *courbe de perspective*, et comme ces trois dénominations sont également désagréables, par leur longueur, dans les raisonnements géométriques, nous désignerons le lieu α sous le nom de *collier pour le point O*. (Voir Int. d. Math. 1898, p. 6).

De même, pour une surface donnée, nous appellerons *collier pour une droite d*, le lieu des points de contact des droites tangentes à la surface et parallèles à d , ou encore le lieu des points de contact des plans tangents à la surface et parallèles à d , ou enfin la courbe de contact du cylindre parallèle à d et circonscrit à la surface.

En particulier, on pourra appeler *collier horizontal*, celui qui correspond à une verticale, et *collier vertical*, celui qui correspond à une droite de bout.

Le collier d'une surface α est considéré fréquemment en projection sur une surface π , plane ou non, à l'intersection de cette surface π avec le cône ou le cylindre circonscrit à la surface α . Cette projection prendra naturellement le nom de *collier projeté sur π* , ou simplement de *collier projeté*, s'il n'en résulte aucune ambiguïté au sujet de la surface de projection pour laquelle on parle. Le collier horizontal, projeté sur le plan horizontal de projection pourra être appelé simplement *collier horizontal projeté*; le collier vertical, projeté sur le plan vertical de projection pourra être appelé simplement *collier vertical projeté*.

Les colliers et les colliers projetés jouissent d'importantes propriétés¹ et se déterminent en Géométrie descriptive d'après des méthodes qu'il est inutile de rappeler dans cette Note, pour le but que nous avons en vue.

3. Définition du Contour apparent. — Dans le langage vulgaire, on appelle *contour apparent de la surface α d'un*

¹ On sait, par exemple, que la tangente en un point du collier d'une surface α et la génératrice de la développable circonscrite correspondante sont deux diamètres conjugués dans l'indicatrice de la surface α , que le collier peut présenter des points remarquables où ces deux diamètres conjugués sont confondus et que la projection, sur une surface π , d'un point remarquable est un point de rebroussement de première espèce du collier projeté, si le point remarquable est un *point ordinaire de seconde espèce*. (Voir Mathesis, 1898, t. VIII (2), pp. 177 à 185).

corps, pour une position déterminée de l'œil O , la ligne qui sépare sur la surface α , la partie vue de la partie cachée de cette surface.

Pour donner à cette définition vulgaire un sens mathématique, nous supposerons :

1° Que l'œil O est réduit à un point géométrique et peut donc être considéré comme un pôle dans les projections polaires ;

2° Que les projetantes polaires issues de l'œil sont considérées comme des rayons visuels ;

3° Que si deux points A et B appartiennent à un même rayon visuel et sont situés sur ce rayon d'un même côté de l'œil, le point A est dit *au-dessus* ou *au-dessous* de B suivant que l'on a

$$OA < OB \text{ ou } OA > OB;$$

4° Qu'un point A est dit *vu*, quand sur le rayon visuel allant de A à l'œil O et se terminant en O , il n'y a dans le corps considéré aucun point placé au-dessus de A ; qu'un point A est dit *caché* dans le cas contraire.

Si l'œil, assimilé à un point géométrique, s'éloigne au-delà de toute limite sur une semi-droite d , donc dans un sens bien connu, les trois dernières conventions se transforment aisément et nous saurons dans ce cas :

1° Que l'œil est réduit à un point géométrique situé à l'infini sur une semi-droite d ;

2° Que les rayons visuels convergents ont pour limites des rayons visuels parallèles à d et de même sens ;

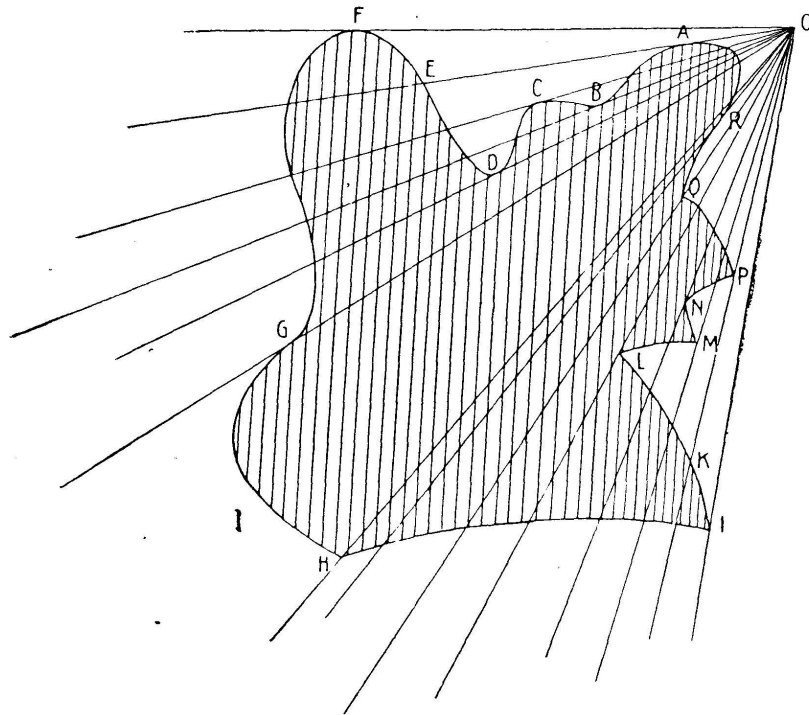
3° Que si deux points A et B appartiennent à un même rayon visuel, le point A est au-dessus ou au-dessous de B , suivant qu'en partant de B , dans le sens de la semi-droite d , on passe par A ou non ;

4° Qu'un point A est *vu*, quand sur le rayon visuel passant par A , il n'y a dans le corps considéré, aucun point placé au-dessus de A ; qu'un point A est *caché* dans le cas contraire.

D'après ce qui précède, nous pouvons dire, comme dans le langage vulgaire, mais en employant des termes ayant un

sens mathématique, que *le Contour apparent de la surface d'un corps, pour un œil placé à distance finie ou infinie, c'est-à-dire pour des rayons visuels convergents ou parallèles, est la ligne qui sépare sur la surface, la partie vue de cette surface de la partie cachée.*

4. **Composition du contour apparent.** — Proposons-nous maintenant de rechercher la composition du contour apparent. Coupons la surface donnée α au moyen d'un plan passant par l'œil, ou parallèle aux rayons visuels dans le cas d'un œil situé à l'infini. Soit l la section (voir la figure) et indiquons par des hachures la position du corps par rapport à la surface.



I. — Menons à la section l tous les rayons visuels tangents. En faisant varier le plan sécant, de manière à engendrer au moyen de la ligne l la surface tout entière, le lieu des points de contact obtenus dans chaque plan sécant est le collier de α pour l'œil O (n° 2) ou pour une droite d parallèle aux rayons visuels.

Dans chaque section, aux environs d'un point de contact, la tangente ne peut être qu'extérieure au corps comme en

A, C, F; ou intérieure au corps, comme en B, D; ou intérieure au corps d'un côté du point de contact et extérieure au corps de l'autre côté de ce point, comme en G ou R.

On appelle *point réel*¹ du collier, tout point à tangente extérieure, tels sont les points A, C, F; un pareil point peut être *vu* ou *caché*.

Un point réel est *vu*, si la tangente en ce point ne perce la surface d'aucun corps au-dessus du point, tels sont les points A et F. Les points *réels vus* séparent chacun sur la section plane, une partie vue d'une partie cachée et appartiennent donc au *contour apparent*.

Un point réel est *caché*, si la tangente en ce point perce la surface du corps au-dessus du point; tel est le point C. Tout point *réel caché* appartient à une partie entièrement cachée de la section et ne saurait faire partie du contour apparent, à moins qu'il ne soit une extrémité d'un lieu de points réels vus.

On appelle *point virtuel*¹ du collier, tout point à tangente intérieure; tels sont les points B, D; un pareil point est nécessairement caché et sur la tangente, au-dessus du point de contact, il existe toujours au moins un point appartenant à la surface du corps, *supposé limité de tous côtés*. Tout point virtuel, appartenant à une partie entièrement cachée de la section plane, ne saurait faire partie du contour apparent, à moins d'être une extrémité d'un lieu de points réels vus.

Nous appellerons *point intermédiaire*¹ du collier, tout point tel que G ou R, pour lequel la tangente est extérieure au corps, d'un côté du point, et intérieure au corps de l'autre côté du point. Un pareil point peut être vu comme le point R, ou caché comme le point G, mais il appartiendra toujours à une partie entièrement vue ou entièrement cachée de la section plane et ne saurait faire partie du contour apparent, à moins qu'il ne soit une extrémité d'un lieu de points réels vus.

Nous voyons donc que le contour apparent de la surface

¹ J. De La Gournerie est, pensons-nous, le premier géomètre qui ait employé les dénominations de *point réel* et de *point virtuel*, en vue d'arriver aux points remarquables des colliers (Traité de Perspective linéaire. Paris, 1859). Nous avons introduit les *points intermédiaires*.

d'un corps comprend les points réels vus du collier de la surface. Nous désignerons le lieu de ces points sous le nom de Contour apparent tangentiel.

II. — Si la surface α présente des arêtes, droites ou courbes, nous pouvons considérer aussi, sur la section l , les rayons visuels passant par les intersections des arêtes avec le plan sécant. Le lieu de ces points est évidemment constitué par les arêtes de la surface, si l'on fait varier le plan sécant de manière à engendrer la surface tout entière au moyen de la ligne l .

Dans chaque section, aux environs du point situé sur une arête, le rayon visuel ne peut être qu'extérieur au corps comme en P, M, I; ou intérieur au corps comme en L, N, ou extérieur au corps d'un côté du point et intérieur au corps de l'autre côté de ce point, comme en H ou Q.

Nous appellerons *point réel d'une arête*, tout point à rayon visuel extérieur, tels sont les points P, M, I; un pareil point peut être *vu* ou *caché*.

Un point réel est *vu*, si le rayon visuel passant par ce point ne perce la surface d'aucun corps au-dessus du point, tels sont les points P et I. Les points *réels vus* séparent chacun sur la section plane, une partie vue d'une partie cachée et appartiennent donc au *Contour apparent*.

Un point réel est *caché*, si le rayon visuel passant par ce point perce la surface du corps au-dessus du point; tel est le point M. Tout point réel caché appartient à une partie entièrement cachée de la section et ne saurait faire partie du contour apparent, à moins qu'il ne soit une extrémité d'un lieu de points réels vus.

Nous appellerons *point virtuel d'une arête*, tout point à rayon visuel intérieur au corps; tels sont les points L, N; un pareil point est nécessairement caché et sur le rayon visuel, au-dessus du point considéré, il existe toujours au moins un point appartenant à la surface du corps supposé *limité de tous côtés*. Tout point virtuel, appartenant à une partie entièrement cachée de la section plane, ne saurait faire partie du contour apparent, à moins d'être une extrémité d'un lieu de points réels vus.

Nous appellerons *point intermédiaire* d'une arête, tout point tel que H ou Q, pour lequel le rayon visuel est extérieur au corps d'un côté du point considéré et intérieur au corps de l'autre côté du point. Un pareil point peut être vu comme le point Q, ou caché comme le point H, mais il appartient toujours à une partie entièrement vue ou entièrement cachée de la section plane et ne saurait faire partie du contour apparent, à moins qu'il ne soit une extrémité d'un lieu de points réels vus.

Nous voyons donc que le contour apparent de la surface d'un corps comprend les points réels vus des arêtes de la surface. Nous désignerons le lieu de ces points sous le nom de *Contour apparent rasant*.

Nous appellerons *Contour apparent propre*, l'ensemble du contour apparent tangentiel et du contour apparent rasant.

III et IV. — Il existe sur la surface, un troisième et un quatrième lieu de points faisant partie du contour apparent. Car si nous considérons le rayon visuel passant par un point réel vu tel que A ou P, ce rayon visuel peut percer la surface en un point E ou K, situé *immédiatement au-dessous* de A ou P. Or, le point E ou K sépare sur la section plane, une partie vue d'une partie cachée et appartient donc au contour apparent.

Nous désignerons tout point tel que E ou K, sous le nom de *point consécutif* du point réel vu A ou P.

Nous voyons donc que *le contour apparent de la surface d'un corps comprend le lieu des points consécutifs des points du contour apparent tangentiel et du contour apparent rasant.* Nous désignerons le lieu de ces points sous le nom de *Contour apparent consécutif* et il peut comprendre deux parties : l'une provenant du contour apparent tangentiel et que nous appellerons *Contour apparent consécutif tangentiel* ; l'autre provenant du contour apparent rasant et que nous appellerons *Contour apparent consécutif rasant*.

V. — Il n'est pas nécessaire d'examiner les rayons visuels autres que ceux qui sont tangents à la surface ou qui s'ap-

puient sur des arêtes de la surface, car un point situé sur la surface et correspondant à tout autre rayon visuel, appartient nécessairement à une portion entièrement vue ou entièrement cachée autour du point considéré. Le contour apparent d'un corps ne comprend donc pas d'autres points que ceux que nous avons indiqués aux §§ I, II, III et IV.

VI. — En résumé, nous pouvons indiquer dans le tableau synthétique suivant, la composition du contour apparent et la technologie que nous proposons pour ses différentes parties :

Contour apparent	}	Contour apparent propre	{	Contour apparent tangentiel.	
			{	Contour apparent rasant.	
	}	Contour apparent consécutif		{	Contour apparent consécutif tangentiel.
				{	Contour apparent consécutif rasant.

5. Criterium permettant de reconnaître dans une épure les points du contour apparent propre. — Le théorème suivant donne un moyen géométrique infallible pour reconnaître dans une épure, les points réels vus du collier ou des arêtes de la surface d'un corps.

Théorème. — *Pour qu'un point A situé sur une arête ou sur le collier de la surface d'un corps pour des rayons visuels convergents ou parallèles, appartienne au contour apparent propre de la surface, il faut et il suffit que le rayon visuel correspondant ne rencontre pas la surface du corps au-dessus du point et rencontre cette surface, au-dessous du point, en un nombre de points pair ou nul, les points de contact ou d'appui, réels ou virtuels ne comptant pas, les points intermédiaires comptant pour un point. On suppose le corps limité de tous côtés.*

En effet, si le point A appartient à la partie tangentielle ou rasante, il est réel et vu. Le point étant vu, le rayon visuel correspondant ne rencontre pas le corps au-dessus du point. Le point considéré étant réel, le rayon visuel correspondant est extérieur au corps aux environs du point et s'il pénètre dans celui-ci, au-dessous du point, en un premier point d'intersection, il devra en sortir en un second point et ainsi de

suite; de sorte qu'au-dessous du point considéré, il y aura nécessairement un nombre nul ou pair de points d'intersection, à condition de négliger tout point de contact ou d'appui, réel ou virtuel, et de compter tout point intermédiaire pour un point.

On voit que les conditions énumérées sont nécessaires; elles sont du reste suffisantes, car on en conclut aisément, que tout point qui y est soumis, est réel et vu.

6. Méthode générale pour la détermination par points du contour apparent. — Nous pouvons enfin donner pour la détermination complète du contour apparent de la surface d'un corps, dans une épure, le procédé général suivant dont la justification se trouve dans ce qui précède. Les rayons visuels convergent en un point O ou sont parallèles à une droite d .

1° On cherchera le collier de la surface pour le point O ou la droite d ;

2° On déterminera l'intersection de la surface du corps, préalablement limité de tous côtés s'il y a lieu, avec le cône ou le cylindre visuel circonscrit à la surface;

3° On distinguera sur le collier cherché au 1°, les points réels vus qu'on reconnaîtra au moyen de l'intersection déterminée au 2°, grâce au théorème du n° 5. On aura, de cette manière, éliminé les points réels cachés, les points virtuels et les points intermédiaires, pour obtenir le *contour apparent tangentiel*;

4° On prendra, sur l'intersection déterminée au 2°, les points consécutifs des points trouvés au 3° et l'on aura ainsi le *contour apparent consécutif tangentiel*;

5° On considérera les arêtes de la surface du corps et le cône ou cylindre visuel ayant ces arêtes pour directrice;

6° On déterminera l'intersection de la surface du corps avec le cône ou cylindre visuel considéré au 5°;

7° On distinguera, sur les arêtes du corps, les points réels vus qu'on reconnaîtra, au moyen de l'intersection déterminée au 6°, grâce au théorème du numéro 5. On aura ainsi éliminé, sur les arêtes, les points réels cachés, les points vir-

tuels et les points intermédiaires, pour obtenir le *contour apparent rasant* ;

8° On prendra, sur l'intersection déterminée au 6°, les points consécutifs des points réels vus trouvés au 7°, et l'on aura ainsi le *contour apparent consécutif rasant*, quatrième et dernière partie à trouver pour le contour apparent.

7. Remarque. — La méthode donnée au numéro précédent, pour la détermination d'un contour apparent, est générale et complète ; elle conduit infailliblement au résultat cherché, mais elle peut donner lieu, surtout chez les commençants, à des tracés très compliqués. Il faudra faire les constructions sur l'épure, en tâchant d'être sobre dans le tracé des lignes et en examinant attentivement si certaines constructions ne peuvent être évitées ¹.

Il en est ainsi du reste pour l'emploi de toutes les méthodes générales dans toutes les branches des mathématiques, et pour n'en citer qu'un exemple, nous rappellerons de combien de remarques utiles et pratiques on fait suivre, en Algèbre, la méthode générale pour la résolution de n équations du premier degré à n inconnues.

8. Technologie complémentaire. — Pour compléter la technologie relative au contour apparent, il y aurait lieu de définir les expressions ; *Contour apparent horizontal*, *contour apparent vertical*, *contour apparent projeté sur une surface*, *contour apparent horizontal projeté*, *contour apparent vertical projeté*, mais ces expressions se comprendront comme les termes analogues relatifs aux colliers (n° 2) avec lesquels il ne peut être permis de les confondre.

9. Séparation d'ombre et de lumière. — Faisons remarquer enfin que si au lieu de rayons visuels, on considère des rayons lumineux issus d'un point ou parallèles à une droite, on trouve, au lieu du contour apparent, la *séparation d'ombre et de lumière* appelée aussi *ombre sur le corps* ou simple-

¹ Voir F. Chomé. Cours de Géométrie descriptive, I^{re} Partie, Livre I n° 93, Livre II n° 433.

ment *ombre*. Cette ligne comprend donc *l'ombre propre* et *l'ombre consécutive* qu'on appelle *ombre portée*. *L'ombre propre* comprend du reste *l'ombre tangentielle* et *l'ombre rasante*, *l'ombre portée* comprend *l'ombre portée tangentielle* et *l'ombre portée rasante*.

La règle générale pour rechercher l'ombre d'un corps peut être déduite immédiatement de celle que nous avons donnée au numéro 6 pour la détermination du contour apparent.

Octobre 1905.

F. CHOMÉ (Bruxelles).

ENQUÊTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATIENS

LES RÉSULTATS¹ — III

Questions 2 et 3.

2. — *Quelles sont les branches de la science mathématique vers lesquelles vous vous êtes senti plus particulièrement attiré ?*

3. — *Etes-vous plutôt attiré par l'intérêt de la science mathématique en elle-même, ou par les applications de cette science aux phénomènes de la nature ?*

Quatre-vingt-deux mathématiciens ont répondu à ces deux questions. Comme on devait s'y attendre, leurs réponses présentent une grande variété. Tandis que les uns ont porté leur attention principalement sur la méthode et le côté logique des mathématiques, il en est un grand nombre qui se

¹ Voir l'*Ens. math.*, 7^e année, n^o 5, p. 387-395 ; n^o 6, p. 473-478, 1905.