

# SUR UNE EXTENSION POSSIBLE DE LA NOTION DE VRAIE VALEUR

Autor(en): **Pompeiu, D.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-9267>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

suffit de *démontrer* la propriété qui, dans cette méthode, sert de définition. On se trouve ensuite naturellement amené à la considération des notions introduites par G. Cantor : ensembles enchaînés, parfaits, etc., en adjoignant au besoin, aux termes de la suite S, d'autres ensembles dont chacun doit posséder la propriété de contenir les ensembles  $G'(m)$  relatifs à tous ses éléments. G. COMBEBIAC (Bourges).

---

## SUR UNE EXTENSION POSSIBLE DE LA NOTION DE VRAIE VALEUR

---

Toute collection de faits analytiques conduit à un essai de coordination et cet essai peut quelquefois aboutir à l'établissement d'une théorie. C'est ainsi que des faits analytiques relatifs aux séries divergentes ont conduit tout récemment d'illustres mathématiciens à poser les premiers fondements d'une théorie des séries divergentes.

Je me propose de montrer, dans cette note, comment quelques faits analytiques semblent indiquer une *extension possible de la notion de vraie valeur*.

I.—Prenons d'abord le problème ordinaire de la vraie valeur.

Considérons une fonction définie par une certaine expression analytique  $F(x)$ . Il peut arriver que pour une certaine valeur  $x = a$ , de la variable, l'expression analytique  $F(x)$  cesse d'avoir un sens : la fonction n'est donc pas définie au point  $x = a$ . Pour la définir on regarde si l'expression analytique  $F(x)$  tend vers une valeur limite lorsque  $x$  tend vers  $a$ . Si cette valeur existe et si elle est égale à  $A$  on convient de poser, par définition,

$$F(a) = A$$

et c'est ce nombre  $A$  qu'on appelle *vraie valeur* de  $F(x)$  au point  $x = a$ .

On voit donc que pour définir la fonction considérée au

point  $x = a$ , on lui impose la condition d'être *continue* en ce point. C'est sur cette convention que repose la notion ordinaire de vraie valeur.

Considérons maintenant un cas moins simple : une fonction est définie, dans un certain intervalle  $(x', x'')$  par une expression analytique qui cesse d'avoir un sens pour une certaine valeur  $a$  de la variable ; mais l'expression analytique qui définit la fonction ne tend vers aucune limite déterminée lorsque  $x$  tend vers  $a$ . Il n'est donc pas possible de définir la fonction au point  $a$  par la *vraie valeur* ordinaire, parce que cette vraie valeur n'existe pas.

Mais, au lieu d'imposer à la fonction la condition d'être *continue* au point  $a$  (ce qui ne réussit pas dans le cas actuel) on peut lui imposer la condition d'être, dans l'intervalle  $x' < a < x''$  une *fonction dérivée*. Si cela réussit, la fonction ne peut avoir, au point  $a$ , qu'une valeur  $A$  bien déterminée et l'on pose, par définition,

$$F(a) = A$$

On peut continuer à appeler le nombre  $A$  vraie valeur de la fonction au point  $a$ , ou plutôt *vraie valeur généralisée*.

Il n'y a là qu'une convention, mais si l'on peut montrer que cette convention est utile, alors elle est aussi légitime que la convention ordinaire sur laquelle repose la notion commune de vraie valeur.

II. — Je vais donner seulement deux exemples, mais on peut les multiplier à volonté.

Considérons la fonction  $f(t) = \sin \frac{1}{t}$ , qui est indéterminée au point  $t = 0$ . On démontre facilement que  $\sin \frac{1}{t}$  est une fonction dérivée et alors on a  $f'(0) = 0$ . Ce sera, par définition, la vraie valeur de  $\sin \frac{1}{t}$  au point  $t = 0$ .

Cela admis, la transformée de  $\sin \frac{1}{t}$ , en posant  $t = \frac{1}{x}$ , est  $\sin x$ . On en déduit la convention suivante : pour  $x = \infty$  on a  $\sin \infty = 0$ . Et, l'on peut facilement montrer qu'on a aussi  $\cos \alpha x = 0$ ,  $\sin \alpha x = 0$  pour  $x = \infty$ ,  $\alpha$  étant un nombre fixe quelconque.

Voici maintenant deux faits analytiques qui légitiment cette convention.

(1°). — On a

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin \alpha x dx = \frac{\alpha}{a^2 + \alpha^2},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos \alpha x dx = \frac{a}{a^2 + \alpha^2},$$

avec  $a > 0$ .

Supposons maintenant  $a = 0$  : il vient,

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \sin \alpha x dx = \frac{1}{\alpha}, \quad \int_0^{\infty} \cos \alpha x dx = 0.$$

Mais

$$\int \sin \alpha x dx = -\frac{\cos \alpha x}{\alpha}, \quad \int \cos \alpha x dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha}.$$

En comparant avec (1) on voit que

$$\cos \infty = 0, \quad \sin \infty = 0,$$

ce qui s'accorde avec notre convention.

Cet exemple est pris dans le *Traité de Calcul intégral* de Todhunter.

(2°). — Considérons maintenant avec M. Picard (*Traité d'Analyse* : I, 32 ; 1<sup>re</sup> édition) l'intégrale :

$$(2) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx,$$

où nous supposons  $\alpha > 0$  ; le changement de variable  $\alpha x = y$  ramène cette intégrale à la suivante

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy.$$

L'intégrale (2) ne dépend donc pas de  $\alpha$ . En effet, si nous la dérivons par rapport à  $\alpha$  nous trouvons

$$\int_0^{\infty} \cos \alpha x dx$$

et cette intégrale est nulle d'après notre convention.

III. — Le principe qui doit servir de guide pour légitimer cette extension de la notion de vraie valeur est le même que celui qui a servi pour édifier la théorie des séries divergentes. Je le copie, en ne changeant que quelques mots dans le livre de M. Borel *sur les séries divergentes* :

*Faire correspondre à une expression analytique  $F(x)$ , en un point d'indétermination, une valeur telle que la substitution de cette valeur à  $F(x)$ , dans les calculs usuels où elle peut se présenter, donne des résultats exacts, ou du moins presque toujours exacts.*

Une conséquence immédiate, qu'on tire de ce principe, c'est que la notion généralisée doit comprendre comme cas particulier la notion ordinaire.

Une autre remarque essentielle et qui s'impose par les faits analytiques eux-mêmes c'est que certaines opérations qu'on peut effectuer, dans les conditions ordinaires, cessent d'être légitimes avec la notion généralisée. Cela devait naturellement arriver puisque cela arrive dans toute extension : c'est ainsi, par exemple, que par l'introduction des variables complexes, les propriétés exprimées par des *inégalités* cessent, soit d'avoir un sens, soit d'être vraies lorsqu'on ne suppose plus les variables réelles.

Quelles sont, après l'introduction de la notion de vraie valeur généralisée, les opérations du calcul algébrique et du calcul intégral qui continuent à être légitimes ?

Voilà la question essentielle. Je n'ai pas l'intention de l'aborder ici ; mais je crois avoir montré par ce qui précède, qu'elle mérite d'être examinée.

D. POMPEIU (Jassy, Roumanie).

NOTE DE LA RÉDACTION. — Nous rappelons, à propos de cet article, que la *Rédaction* laisse toute liberté aux auteurs, dont la responsabilité scientifique seule est engagée. Cet essai d'une extension de la notion de vraie valeur nous a paru intéressant, mais il y aurait lieu de faire certaines réserves, principalement pour ce qui concerne  $\cos \infty$  et  $\sin \infty$ .