

# NOTE SUR UN POINT DE LA THÉORIE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE ET DES LOGARITHMES

Autor(en): **Padé, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4644>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# NOTE SUR UN POINT DE LA THÉORIE

DE LA

## FONCTION EXPONENTIELLE ET DES LOGARITHMES

---

Après avoir défini la fonction  $a^x$  dans le cas où  $x$  est irrationnel, on démontre aisément que la formule

$$(1) \quad a^x \times a^{x'} = a^{x+x'}$$

subsiste alors même que les exposants sont irrationnels ; on en conclut ensuite la formule correspondante pour la fonction logarithmique, à savoir, en posant  $a^x = y$ ,  $a^{x'} = y'$  :

$$\log_a yy' = \log_a y + \log_a y'.$$

Il est singulier que presque tous les traités omettent alors de démontrer, pour le même cas où les exposants sont entièrement quelconques, c'est-à-dire peuvent être irrationnels, la propriété exprimée par la formule

$$(2) \quad (a^x)^{x'} = a^{xx'}$$

à laquelle correspond, pour le logarithme, la formule

$$(3) \quad \log_a y^{x'} = x' \log_a y.$$

Ce n'est pas que les auteurs n'aient pas à faire ensuite usage de cette formule (2), puisque, pour établir la formule (3), presque tous partent de l'identité de définition

$$y = a^{\log_a y},$$

et, élevant les deux membres à la puissance d'exposant  $x'$ , concluent

$$y^{x'} = (a^{\log_a y})^{x'} = a^{x' \log_a y}.$$

Le logarithme de  $y$  étant, en général, même pour  $a$  et  $y$  rationnels, un nombre irrationnel, ils font ainsi usage de la formule (2) pour le cas d'exposants irrationnels, sans l'avoir aucunement établie. Quelques-uns même, après avoir démontré la formule (3) comme je viens de le dire, vont plus loin, et s'en servent pour en conclure la formule (2), qui se trouve ainsi démontrée après avoir été implicitement admise.

Je ne connais, pour ma part, qu'un seul ouvrage où les choses soient correctement présentées ; c'est le *Traité d'Algèbre élémentaire* de MM. Cor et Riemann ; encore que la démonstration de la relation (2), directe il est vrai, me paraisse un peu compliquée pour l'objet dont il s'agit.

Que l'on regarde le nombre irrationnel comme défini par la méthode de Dedekind ou par celle de G. Cantor, la difficulté à laquelle on se heurte pour établir la relation (2) par le même procédé que celui employé pour la relation (1), provient toujours de la même source. En se plaçant, par exemple, au point de vue de M. G. Cantor, elle réside en ce que l'on n'est pas assuré que la limite de

$$(ax_n)^{x'_n}$$

soit  $(a^x)^{x'}$ ,  $x_n$  et  $x'_n$  désignant deux nombres rationnels, fonctions d'un indice entier et positif  $n$ , qui ont respectivement  $x$  et  $x'$  pour limites quand  $n$  grandit indéfiniment. On a, en effet, ici affaire à une exponentielle d'exposant variable  $x'_n$ , dont la base,  $a^{x_n}$ , varie aussi avec  $n$  ; en sorte que la question revient, au fond, à la démonstration de la continuité de la fonction  $u^v$ , où  $u$  et  $v$  sont deux fonctions continues, dont la première est essentiellement positive.

Et cette continuité ne saurait, comme le font beaucoup d'auteurs, être conclue de la formule

$$u^v = a^{v \log_a u},$$

jointe à la continuité de la fonction exponentielle, puisque, ainsi que je l'ai fait remarquer plus haut, cette formule n'est qu'une conséquence de la relation (2) qu'il s'agit précisément d'établir. Mais elle se démontre aisément en faisant intervenir les propriétés les plus simples de la fonction  $x^m$ , où  $x$  est une variable

positive et  $m$  un exposant entièrement quelconque. La démonstration, très facile, de ces propriétés, à savoir, que la fonction est continue et qu'elle varie toujours dans le même sens, ne suppose d'ailleurs que la formule (1). (Voir J. Tannery. *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. Paris, 1886 ; n° 83.)

Soient, alors,  $p$  et  $q$  les limites respectives de  $u$  et  $v$ ,  $p$  étant un nombre positif ; soient  $\alpha$  et  $\beta$  les différences infiniment petites  $u - p$ ,  $v - q$  ; on a, en vertu de (1)

$$u^v = (p + \alpha)^{q + \beta} = (p + \alpha)^q (p + \alpha)^\beta$$

De la propriété de  $x^m$  d'être continue, on conclut que  $(p + \alpha)^q$  a pour limite  $p^q$ , quand  $\alpha$  tend vers zéro ; de la propriété de  $x^m$  de varier toujours dans le même sens, on conclut que,  $\varepsilon$  désignant un nombre fixe satisfaisant aux conditions

$$|p| > \varepsilon > |\alpha|,$$

$(p + \alpha)^\beta$  est compris entre  $(p - \varepsilon)^\beta$  et  $(p + \varepsilon)^\beta$ , quantités qui, en vertu des propriétés de la fonction  $a^x$ , tendent vers 1, quand  $\beta$  tend vers zéro.

Donc  $u^v$  tend bien vers  $p^q$ , et la fonction  $u^v$  est continue.

Revenant alors à la relation (2), on voit que  $a^{x^n}$  ayant, quand  $n$  grandit indéfiniment, le nombre positif  $a^x$  pour limite, la quantité  $(a^{x^n})^{x/n}$  a pour limite  $(a^x)^{x'}$ , comme il fallait l'établir.

Il est très vraisemblable que cette démonstration si simple a été déjà établie ailleurs, bien que je l'ignore. Je l'ai donnée dans mon enseignement et communiquée autrefois à plusieurs professeurs. Il est seulement assez surprenant qu'une telle lacune s'observe si généralement dans les traités didactiques en un même point aussi important de la théorie de l'exponentielle.

H. PADÉ (Lille).