PEUT-ON VULGARISER LES MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES?

Autor(en): **de Montessus, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-4642

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

PEUT-ON VULGARISER
LES MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES?

Le physicien, le naturaliste, chacun en ce qui le concerne, découvrent volontiers les mystères de leurs sciences et leurs ouvrages de vulgarisation, chroniques scientifiques de revues philosophiques ou littéraires et traités didactiques, sont toujours les bienvenus.

A l'opposé, les mathématiciens, sauf exceptions, se tiennent à l'écart et « le monde des nombres et des formes géométriques, infini, sans doute aussi émouvant que l'univers des formes sensibles, est, par là-même, interdit aux profanes ».

Il nous paraît cependant possible de mettre à la portée des non-spécialistes quelques-unes des questions qui sont l'objet des mathématiques supérieures et, tout particulièrement, certaines questions de Géométrie. Il y aurait là, croyons-nous, œuvre utile à faire, tant pour les esprits nombreux que la science intéresse, mais que les symboles mathématiques effrayent, que pour les professeurs d'Enseignement secondaire qui, le plus souvent, ne peuvent consacrer un temps précieux à la recherche des figures usuelles de langage et des comparaisons simples, propres à introduire leurs meilleurs élèves dans un domaine supérieur à celui de leurs études journalières.

J'essayerai de justifier cette assertion, qu'il est possible de vulgariser la mathématique, ou du moins certaines questions de la mathématique, en exposant ici, dans leurs grandes lignes, la théorie des Surfaces minima et des surfaces applicables.

On me pardonnera d'être bref. Je ne veux pas vulgariser; les lecteurs d'une revue spécialement consacrée aux mathématiques n'ont nul besoin qu'on mette à leur portée des théories qu'ils connaissent dans leur forme technique, mais simplement montrer qu'on veut vulgariser.

I. — On dit, en langage vulgaire, la surface des eaux, la surface de la terre, entendant ainsi « l'extérieur, le dehors », de la mer, du globe. De même, en Géométrie, la surface est ce qui « circonscrit les corps; cet élément de l'étendue est d'abord conçu par l'esprit ayant en tous ses points une certaine épaisseur; si l'on imagine que cette épaisseur aille en diminuant de plus en plus, on obtient, *à la limite*, la notion de surface géométrique ».

Une des représentations physiques les moins imparfaites de la surface géométrique est la bulle de savon, dont l'épaisseur, sans doute très réelle, est si faible que la lumière incidente produit ces curieux jeux de couleurs que tous nous avons admirés dans notre enfance. La bulle, qui s'évanouit au premier choc, devient beaucoup plus stable si l'on substitue à l'eau savonneuse, comme l'a imaginé Plateau, une certain mélange d'eau savonneuse et de glycérine. On peut alors la fixer à un cadre en fil de fer, à la manière d'une bande de gaze tendue sur le cadre, et étudier à son aise et les phénomènes lumineux et la forme de la surface, forme qui dépend de celle du cadre.

Si le cadre est plan, c'est-à-dire s'applique de lui-même et dans toutes ses parties sur une table bien dressée, la surface est plane, telle une feuille de papier; si le cadre est gauche, ne peut s'appliquer sur un plan, la surface est plus ou moins bombée, mais est toujours concave en un sens et convexe dans l'autre, comme serait une lentille allongeant les objets de bas en haut et les rétrécissant de gauche à droite ou encore comme quelques-uns de ces miroirs déformés dont on avait réuni de si curieux spécimens au palais de l'Optique, à la dernière Exposition.

Or, la surface obtenue jouit de la propriété très remarquable d'être *Minima* par rapport au cadre fermé qui la supporte : entre toutes les surfaces susceptibles de contenir le cadre, la bulle est la surface dont l'aire est la plus petite.

Les surfaces minima forment une classe des plus intéressantes. On y rencontre la surface qui serait celle d'un escalier en colimaçon dont les marches seraient comblées avec du ciment; cette surface se retrouve dans la vis à filets carrés. On y rencontre aussi l'alysséide, dont les hellénistes rattacheront aisément le nom au mot chaînette.

Si l'on imagine, comme nous l'avons dit, un escalier en coli-

maçon dont les marches soient nivelées, une sorte de plan incliné tournant, on se rendra compte, avec un peu d'attention, qu'on peut placer une règle sur cette surface, de manière que tous les points d'une des arêtes de cette règle soit sur la surface : il suffit, après avoir comblé les marches, de marquer en bleu les arêtes de l'une d'elles et de placer la règle sur cette ligne. Même on peut *engendrer* la surface en question, l'hélicoïde gauche à plan directeur, en plaçant la règle de manière que l'un de ses bouts soit sur l'axe de l'escalier et en lui imprimant, toujours dans un même sens, un mouvement qui la laisse horizontale : dans ce mouvement, l'arête ne cesse pas en effet de coïncider avec la surface. Les surfaces susceptibles d'être ainsi engendrées par une ligne droite qui se déplace, s'appellent réglées et se divisent en deux classes, les surfaces gauches et les surfaces développables. L'hélicoïde est donc une surface réglée, mais gauche, c'est-à-dire non développable. Or, *l'hélicoïde est la seule surface réglée qui soit minima.*

De son côté, *l'alysséide est la seule surface de révolution qui soit minima*, propriété qui lui assure une place à part en géométrie, de même que l'hélicoïde. On sait que les surfaces de révolution sont les surfaces décrites par les courbes qui tournent autour d'un axe ; la sphère est une surface de révolution ; elle est décrite par un cercle qui tourne autour d'un diamètre, on sait que l'alysséide est la courbe engendrée par une chaînette qui tourne autour d'une horizontale et que la chaînette est la courbe dessinée par un fil flexible fixé en ses deux extrémités ; qui n'a vu ces câbles à demi tendus, reliant entre elles les diverses parties d'un grand échafaudage ou qui, attachés de trois ou quatre côtés au sommet d'une chèvre la maintiennent verticale ?

Nous ne saurions définir l'hélicoïde et l'alysséide sans indiquer le lien si remarquable qui rattache ces deux surfaces l'une à l'autre et ce nous sera l'occasion d'introduire dans cet essai *les surfaces applicables* et, du même coup, d'indiquer l'une des propriétés essentielles des surfaces développables.

Considérons une surface quelconque et supposons qu'on ait tissé une étoffe en se servant de cette surface comme moule ; il est clair que, si l'on fait disparaître le moule, l'étoffe, supposée parfaitement flexible, pourra prendre une infinité de formes, sans

qu'on la déchire, ni qu'on l'étire, ni enfin qu'on la replie sur elle-même, pourra définir une infinité de surfaces, toutes différentes de celle qui a servi de moule, et comprenant celle-ci : on dit que toutes ces surfaces, provenant d'un même moule, sont applicables les unes sur les autres. Dans ces tranformations de la surface primitive, la ligne de moindre longueur, unissant deux points quelconques de la surface qui a servi de moule (nous aurons à revenir sur ces lignes de plus courte distance, ce sont les géodésiques) reste encore ligne de moindre longueur sur toute autre surface obtenue.

Le plan, qui est susceptible d'être appliqué, d'être enroulé, sur un cône, sur un cylindre, nous offre un exemple d'applicabilité : *toutes les surfaces sur lesquelles on peut l'appliquer sont ces surfaces développables*, qui sont des cas particuliers des surfaces réglées (1). En second lieu, *l'alysséide est applicable sur l'hélicoïde gauche à plan directeur*. Ainsi, ces deux surfaces, bien que de formes absolument distinctes (la seconde ressemble à un rond de serviette plus étroit en son milieu que sur ses bords) et qui, chacune en son genre, sont seules à être minima, sont liées par une parenté étroite.

Une expérience relativement simple, que nous indiquions au début, permet de construire la surface de plus petite aire, passant par un cadre donné. L'analyse mathématique est-elle aussi avancée que l'expérience ? Est-il possible de déterminer par le calcul la surface minima passant par une courbe fermée donnée ? « L'Analyse mathématique, nous répond M. Darboux (*Théorie générale des surfaces*, t. I, p. 424), n'a pu, jusqu'ici imaginer aucune méthode générale permettant de commencer l'étude de cette belle question. Toutefois... (certaines) propositions... ont permis de préparer la solution du problème et même de le résoudre d'une manière complète, pour certaines formes simples du contour. »

Ce n'est pas que l'Analyse, cet admirable instrument de découvertes, soit aussi impuissante que pourrait le laisser penser aux non-initiés la réponse de M. Darboux. Et d'abord on lui demande ici la solution d'un problème d'une généralité telle que l'esprit

(1) Est-ce ici le lieu de parler des surfaces de M. Le Bègue ?

a peine à concevoir dans son ensemble la question posée — combien pouvons-nous imaginer de cadres différents les uns des autres — et puis on lui demande une solution complète, définissant la surface à l'exclusion de toute autre, si peu différente soit-elle, et s'appliquant à toutes les formes du cadre, ou, du moins, à des catégories de formes très étendues ; est-il étonnant que nous ne puissions atteindre un tel résultat ? Non. Ajoutons que l'analyse mathématique permet toujours de reconnaître si une surface donnée est ou non minima, qu'elle a étudié d'une manière complète certaines surfaces minima, nous avons cité l'alysséide et l'hélicoïde, et qu'elle a transformé le problème qui se posait en une question plus simple : déterminer les surfaces à la fois convexes et concaves où, en chaque point, les rayons de courbure principaux sont égaux.

Nous avons expliqué ce qu'il fallait entendre par surfaces convexes et concaves. Il nous suffira de définir le rayon de courbure pour mettre en lumière la propriété si importante que nous venons d'énoncer et qui, actuellement, est le point de départ obligé de toute étude sur la surface minima. Mais il est bon de définir d'abord les lignes géodésiques.

II. — Le plus court chemin d'un point à un autre de l'espace est la ligne droite ; le plus court chemin entre deux points d'un plan est encore la ligne droite et cette ligne droite, ce chemin, est en entier sur le plan. Quel est, *sur une surface*, le plus court chemin entre deux points donnés de la surface ? quelle est la courbe de la surface qui, passant par les deux points, a la longueur moindre ? C'est *la géodésique* définie par ces deux points. Sur la sphère, les géodésiques sont des arcs de grands cercles. Les navigateurs, qui peuvent suivre sur l'océan la route qui leur convient, ne l'ignorent pas, quoique, à la vérité, ils substituent parfois à l'arc de grand cercle une courbe appelée Loxodromie, coupant tous les méridiens sous un même angle et représentée sur leurs cartes, projections de Mercator, par des lignes droites.

Si la forme d'une surface permet à un fil tendu, attaché à deux points de s'appliquer en toutes ses parties sur elle, la courbe dessinée par le fil est le plus court chemin entre les deux points, est une géodésique. Par ailleurs, le calcul montre que tout plan

contenant trois points infiniment voisins d'une géodésique est perpendiculaire au plant tangent à la surface. J'énonce ce fait, sans m'expliquer plus longuement, voulant simplement montrer que là, comme pour les surfaces minima, l'analyse est parvenue à découvrir une propriété générale de ces lignes qu'on nomme géodésiques, sans réussir, disons-le, en dehors de certains cas spéciaux, dont nous donnerons quelques exemples, à les déterminer complètement.

Il est à remarquer, qu'entre deux points d'une surface, il peut y avoir plusieurs courts chemins. Ainsi, le fil tendu entre deux points d'un cylindre peut aller du premier point au second, soit directement, soit en tournant une fois, deux fois, plusieurs fois, autour du cylindre. Dans chaque cas, le fil tendu déterminera un chemin plus court que les chemins voisins, la courbe dessinée par le fil aura une longueur minimum vis-à-vis des courbes qui font autant de fois le tour du cylindre, et le fil tendu déterminera une géodésique, la géodésique étant moins la plus courte de toutes les lignes possibles que la ligne moindre que ses voisines.

On peut faire une remarque identique à propos du tore, surface engendrée par une circonférence qui tourne autour d'un axe ne passant pas par son centre et dont l'aspect rappelle celui d'une couronne de pain.

Dans les transformations qu'on peut faire subir à une surface, sans la plier, ni l'étendre, les géodésiques, avons-nous dit, restent géodésiques. Les géodésiques du plan étant les lignes droites qu'on y peut tracer, il suit que les géodésiques des surfaces développables seront les lignes qui se transforment en des droites, quand on applique, au sens défini, ces surfaces sur un plan. En particulier, si l'on trace à l'encre grasse une géodésique sur un cylindre, et si l'on fait rouler cette surface sur une feuille de papier, l'empreinte laissée par la géodésique sera une ligne droite. Mais il y a une infinité de géodésiques joignant deux points du cylindre. Il y a donc une infinité de lignes droites joignant deux points d'un plan ? Que non pas ! Et en effet, le décalque sur le papier des deux points considérés est répété autant de fois qu'on fait exécuter de tours au cylindre : si on enroulait dix fois le papier sur le cylindre, un seul coup d'épingle ferait dix trous... et les diverses géodésiques deviennent les

droites qui joignent le premier décalque de l'un des points au premier, au second, au troisième décalque de l'autre point et ainsi de suite, indéfiniment.

Mais passons à une surface dont les géodésiques offrent un intérêt bien plus grand : je veux parler de la célèbre pseudo-sphère, surface de révolution dont la forme est celle d'une coupe à champagne très évasée. Si la théorie des surfaces minima est intimement liée à la théorie des rayons de courbure, si certaines surfaces minima, uniques de leurs espèces, offrent une parenté étroite, si, comme on le montre, les géodésiques du cylindre se retrouvent sur l'hélicoïde, c'est qu'entre les diverses branches de la géométrie existent des rapports nombreux et parfois saisissants, tel celui que Beltrami a découvert entre les *géodésiques de la pseudo-sphère et les droites du plan* et d'où il a conclu à l'indémontrabilité du postulat d'Euclide, cette proposition qui affirme que d'un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite.

Sur la pseudo-sphère, en effet, il n'existe qu'une géodésique entre deux points donnés et toute figure peut subir un mouvement de déformation qui, sans altérer ni les angles, ni les longueurs, permet de faire coïncider respectivement deux points quelconques avec deux autres également quelconques, pourvu que la distance géodésique des premiers et celle des seconds soient identiques. Il en résulte que toutes les propositions élémentaires introduites dans la géométrie plane de la droite par la notion du déplacement d'une figure invariable s'appliquent aux géodésiques de la pseudo-sphère. Si donc on pouvait déduire de ces propositions que d'un point on peut mener une seule parallèle à une droite, on serait en droit d'affirmer que, de même, sur la pseudo-sphère, il n'existe qu'une seule géodésique passant par un point donné et ne rencontrant pas une autre géodésique, elle aussi donnée. Or le contraire a lieu : il existe *plusieurs géodésiques* vérifiant la condition imposée. Donc le postulatum d'Euclide ne saurait être démontré.

Ce beau résultat a été trop souvent exposé et commenté pour que je m'attache à le vulgariser à mon tour et j'en viens aux rayons de courbure, dont la notion joue le plus grand rôle dans la géométrie des courbes et dans la géométrie des surfaces.

La courbure, « la quantité dont une courbe s'éloigne de la « droite en un point donné », a depuis longtemps attiré l'attention des géomètres... et même des poètes : « Curvata in montis faciem circumstetit unda ». Connaître en effet la courbure d'une courbe en chacun de ses points, ou du moins en ses points principaux, c'est connaître sa forme. Un cercle, notamment, a partout même courbure, puisqu'il peut glisser sur lui-même en tournant autour de son centre et si l'on prend pour sa courbure l'inverse de son rayon, cette courbure, d'autant plus grande que le rayon est plus petit, est déterminée par le fait même qu'on connaît le rayon. Peut-on définir semblablement la courbure d'une courbe quelconque, plane ou gauche, substituer une notion précise à la notion vague de la quantité dont s'éloigne une courbe de la droite, en un point donné ? Assurément.

Parmi tous les cercles qui passent par le point donné, il en est un, le cercle de courbure, ou le cercle *osculateur*, qui se rapproche plus que tout autre de la courbe, qui passe par le point en question et par deux autres points infiniment voisins, disent les analystes ; la courbure de la courbe sera celle du cercle osculateur, sera l'inverse du rayon de cercle. Cette définition, un peu sèche, est précise, comme il convient en mathématiques, et nous allons en user, avant de l'étendre aux surfaces, c'est-à-dire avant d'aborder la notion des rayons de courbure principaux pour faire encore un rapprochement intéressant : il s'agit de l'alysséide et de la pseudo-sphère.

A une courbe est liée étroitement celle où se trouvent les centres de tous ses cercles osculateurs, sa développée. Si l'on tient le bout d'un fil de longueur convenable enroulé sur la développée, sur une bobine ayant la forme de la développée, et qu'on le déroule avec précaution, ce bout parcourt la courbe primitive : or *la chaînette est la développée de la tractrice*, courbe dont la révolution engendre la pseudo-sphère.

Il semblerait naturel, pour mesurer la quantité dont une surface, en un point donné, s'éloigne du plan, de calculer le rayon de la sphère qui, en ce point, s'approche le plus de la surface : pour des raisons que je n'indiquerai pas, on procède tout autrement, et on considère la courbure des arcs de géodésiques qui passent par le point donné, ou plutôt les courbures de l'arc le

plus courbé et de l'arc le moins courbé, car l'un des rayons de courbure des géodésiques est plus grand que les rayons de courbure des autres géodésiques, et, de même, l'un de ces rayons est plus petit que tous les autres. Ces rayons de courbure s'appellent principaux et, quand on les connaît, on connaît la forme de la surface. Il suffit même de connaître leur produit et leur somme, ou encore l'inverse de leur produit, *la courbure totale*, et la somme de leurs inverses, quotient de leur somme par leur produit, à laquelle on réserve le nom de *courbure moyenne*.

On sait que toutes les surfaces à courbure totale nulle, telles que le cône, le cylindre, sont développables ; que toutes les surfaces à courbure totale constante négative, telle la pseudo-sphère, sont applicables sur l'une quelconque d'entre elles ; que *la courbure moyenne des surfaces minima* est nulle, ce que nous exprimions en disant que les rayons étaient égaux, la surface étant à la fois concave et convexe ; mais la détermination générale des surfaces de Weingarten, qui comprennent toutes les surfaces dont je viens de parler, et qui sont celles où les rayons de courbure sont liés par une relation quelconque d'ailleurs, est un problème des plus difficiles, sur lequel on ne possède que peu de données, encore que son intérêt très grand le désigne tout spécialement à l'attention des géomètres.

Telles sont, résumées et rapprochées, les principales propriétés des surfaces les plus remarquables parmi celles dont on a fait récemment l'étude.

On pourrait présenter sous une forme analogue, illustrée d'exemples très nombreux et choisis avec soin, la plupart des résultats généraux acquis de nos jours en Géométrie et peut-être aussi pourrait-on faire entrevoir ce que sont les principales méthodes de l'Analyse.

Ainsi exposées, les spéculations mathématiques ne seraient encore point sans doute à la portée des esprits dépourvus des notions élémentaires, mais elles deviendraient accessibles, dans leur ensemble, aux esprits cultivés.

Ignore-t-on le succès si légitime qu'obtint autrefois Arago quand il entreprit de vulgariser l'Astronomie ?

R. DE MONTESSUS (Senlis).