

# SUR LA DÉFINITION DE L'INTÉGRALE DOUBLE

Autor(en): **Jamet, V.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4668>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## SUR LA DÉFINITION DE L'INTÉGRALE DOUBLE

---

La lecture des plus récents traités d'Analyse mathématique révèle, chez leurs auteurs, la préoccupation bien légitime d'exposer en toute rigueur la question qui va faire l'objet du présent article. Mais les méthodes généralement adoptées suscitent des difficultés nouvelles qui ne subsisteraient pas si, pour établir l'existence d'une intégrale double, on tenait compte des notions antérieurement acquises sur l'intégrale simple. C'est ce que nous allons essayer de faire, après avoir toutefois appelé l'attention sur le fait suivant. Soit un intervalle dans lequel la fonction  $f(x)$  est finie et continue, et soient  $a, b$  deux nombres compris dans cet intervalle. Soit aussi

$$\alpha, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \beta$$

une suite de nombres tels que les deux premiers comprennent entre eux  $a$ , et que les deux derniers comprennent entre eux  $b$ . Si les différences

$$x_1 - \alpha, \quad x_2 - x_1, \quad x_3 - x_2, \dots, \quad x_n - x_{n-1}, \quad \beta - x_n$$

tendent vers zéro, alors que  $n$  augmente au delà de toute limite la somme

$$(1) \quad (x_1 - \alpha) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) f(\xi_n) + (\beta - x_n) f(\xi_{n+1})$$

où l'on suppose  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}$  compris, respectivement, entre  $x_1$  et  $\alpha, x_2$  et  $x_1, \dots, \beta$  et  $x_n$ , tend vers la même limite que la somme suivante

$$(2) \quad (x_1 - a) f(\xi'_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + (x_3 - x_2) f(\xi_3) + \dots + (b - x_n) f(\xi'_{n+1})$$

déduite de la précédente en y remplaçant  $\alpha$  par  $a, \beta$  par  $b, \xi$ , par un nombre  $\xi'_1$  compris entre  $a$  et  $x_1, \xi_{n+1}$  par un nombre  $\xi'_{n+1}$  compris entre  $x_n$  et  $b$ .

En effet, ces deux sommes diffèrent l'une de l'autre d'une quantité infiniment petite, savoir

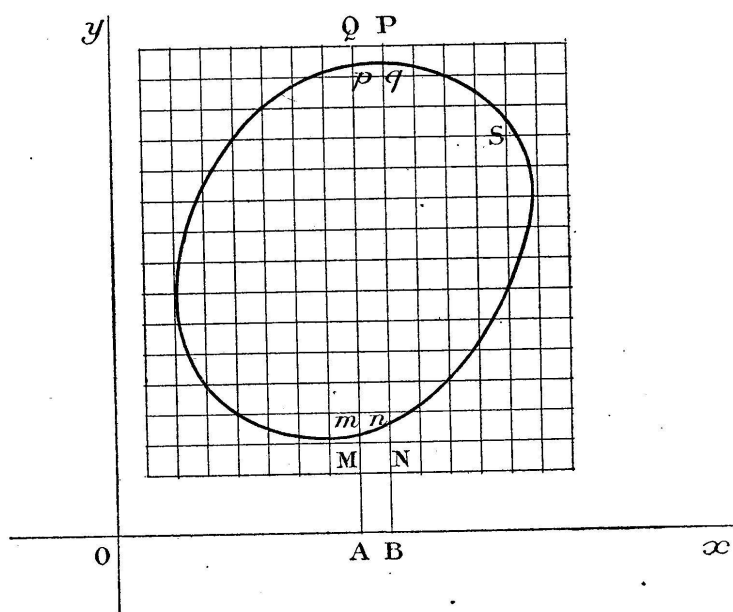
$$(x_1 - a) f(\xi'_1) - (x_1 - a) f(\xi_1) + (\beta - x_n) f(\xi_{n+1}) - (\beta - x_n) f(\xi'_{n+1}).$$

Si donc l'une d'elles a une limite, l'autre a la même limite. Or, la somme (2) a une limite qui, par définition, est égale à

$$\int_a^b f(x) dx,$$

et la somme (1) a la même limite.

Cela posé, soit S un contour fermé, situé dans une région du plan telle que la fonction  $f(x, y)$  soit finie et continue dans toute



cette région. Traçons, dans cette région, une série de parallèles à l'axe des  $y$ , et soient  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , leurs abscisses. Traçons aussi une série de parallèles à l'axe des  $x$ , et soient  $y_1, y_2, y_3, \dots$  leurs ordonnées. Ces droites divisent le plan en une série de rectangles, parmi lesquels nous considérerons, exclusivement à tous les autres, ceux qui sont compris, en tout ou en partie, à l'intérieur du contour S. L'un deux a pour sommets les points dont les coordonnées sont

$$x_i, y_k, x_{i+1}, y_k, x_{i+1}, y_{k+1}, x_i, y_{k+1}.$$

A l'intérieur de ce rectangle nous prenons un point dont les coordonnées sont  $\xi_{ik}, \eta_{ki}$ ; nous calculons le produit.

$$f(\xi_{ik}, \eta_{ki}) (x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k)$$

et tous les produits analogues concernant les divers rectangles considérés, puis nous faisons la somme de ces produits. Il s'agit de démontrer que cette somme tend vers une limite, quand les différences  $x_{i+1} - x_i$  tendent vers zéro, ainsi que les différences  $y_{k+1} - y_k$ . A cet effet, nous considérons, parmi ces produits, tous ceux qui admettent le facteur  $x_{i+1} - x_i$ ; si l'on a, sur la figure  $OA, = x_i, OB = x_{i+1}$ , ces produits se rapportent aux rectangles partiels dans lesquels se décompose le rectangle  $MNPQ$ , dont les côtés parallèles à  $Oy$  coupent le contour  $S$  aux points  $m, n, p, q$ , de telle sorte que les deux sommets,  $M, N$ , ont une même ordonnée, inférieure à l'ordonnée minimum  $H_i$  de la figure  $mnpq$ , et que les deux sommets  $Q, P$ , ont une même ordonnée, supérieure à l'ordonnée maximum  $K_i$  des points de cette même figure. La somme des termes afférents à ces rectangles est égale à

$$(3) \quad (x_{i+1} - x_i) \left[ f(\xi_{ip}, \eta_{pi}) (y_{p+1} - y_p) + f(\xi_{i,p+1}, \eta_{p+1,i}) (y_{p+2} - y_{p+1}) + \dots + f(\xi_{iq}, \eta_{qi}) (y_{q+1} - y_q) \right]$$

en supposant

$$\begin{aligned} AM = BN &= y_p \\ AQ = BP &= y_{q+1}. \end{aligned}$$

Mais si l'on pose :

$$f(\xi_{ik}, \eta_{ki}) = f(x_i, \eta_{ki}) + \varepsilon_{ik},$$

la continuité de la fonction  $f(x, y)$  permet de supposer les deux dimensions de chacun de nos rectangles assez petites pour que le nombre  $\varepsilon_{ik}$  et tous les nombres analogues, aient des modules inférieurs à un nombre donné à l'avance  $\varepsilon$ . D'ailleurs la somme (3) sera égale à

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x_{i+1} - x_i) \left[ f(x_i, \eta_{qi}) (y_{p+1} - y_p) + \dots + f(x_i, \eta_{qi}) (y_{q+1} - y_q) \right] \\ &+ (x_{i+1} - x_i) \left[ (y_{p+1} - y_p) \varepsilon_{ik} + \dots + (y_{q+1} - y_q) \varepsilon_{iq} \right] \end{aligned} \right.$$

et le terme écrit sur la deuxième ligne aura un module inférieur à celui de

$$(x_{i+1} - x_i) (y_{q+1} - y_p) \varepsilon.$$

Or, le contour  $S$  étant fermé,  $y_{q+1} - y_q$  a une limite supé-

riure invariable  $A_1$ . Si donc on fait la somme de toutes les expressions analogues à (4), en donnant à  $i$ , successivement, chacune des valeurs qui définissent un rectangle analogue à MNPQ, et si l'on appelle  $x_r$  et  $x_s$  la plus petite et la plus grande des abscisses qui entrent dans l'expression de cette somme, la somme des termes analogues à celui qui nous occupe actuellement sera moindre que

$$(x_s - x_r) A\varepsilon,$$

ou bien, moindre que

$$AB\varepsilon,$$

en désignant par B une limite supérieure de  $x_s - x_r$ , limite qu'on peut supposer invariable. On pourra donc supposer cette dernière somme inférieure à tout nombre donné à l'avance, et l'on sera conduit à rechercher si la somme des termes analogues à celui qui est écrit sur la première ligne a une limite. Or, si l'on suppose  $i$  invariable, et si l'on fait varier les différences  $y_{p+1} - y_p$ ,  $y_{p+2} - y_p, \dots$  de telle sorte que chacune d'elles tende vers zéro, les ordonnées  $y_p, y_{p+1}$  comprendront sans cesse entre elles  $H_i$ ;  $y_q$  et  $y_{q+1}$  comprendront entre elles  $K_i$ , et d'après la remarque faite au début de ce travail, la partie de l'expression (4) écrite sur la première ligne sera égale à

$$(x_{i+1} - x_i) \left( \int_{H_i}^{K_i} f(x_i, y) dy + \mu \right)$$

$\mu_i$  désignant un nombre qui, pour une certaine valeur de  $q + 1 - p$ , et pour toute valeur plus grande, est inférieure à un nombre donné à l'avance, si petit qu'il soit. Soit  $\sigma$  ce nombre; la somme des termes analogues à celui qui nous occupe, étendue à toutes les valeurs de  $i$  depuis  $r$  jusque à  $s-1$ , sera égale à

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & (x_{r+1} - x_r) \int_{H_r}^{K_r} f(x_r, y) dy + (x_{r+2} - x_{r+1}) \int_{H_{r+1}}^{K_{r+1}} f(x_{r+1}, y) dy \\ & \quad + \dots + (x_s - x_{s-1}) \int_{H_s}^{K_s} f(x_{s-1}, y) dy \\ & + (x_{r+1} - x_r) \mu_r + (x_{r+2} - x_{r+1}) \mu_{r+1} + \dots + (x_s - x_{s-1}) \mu_s. \end{aligned} \right.$$

Ici la somme des termes écrits sur la deuxième ligne sera numériquement inférieure à

$$B\sigma.$$

On peut donc, comme précédemment, négliger cette somme, et s'occuper uniquement de rechercher la limite vers laquelle tendra la somme des termes écrits sur la première ligne, lorsque les différences  $x_{r+1} - x_r, x_{r+2} - x_{r+1} \dots$  tendront vers zéro. Or, si l'on désigne par  $Y_i$  et  $Z_i$  les ordonnées des points où le contour  $S$  est coupée par la parallèle à  $Oy$ , dont l'abscisse est  $x_i$ , et si  $Y_i$  est la plus petite de ces ordonnées, les différences  $H_i - Y_i, K_i - Z_i$  tendront vers zéro avec  $x_{i+1} - x_i$ . Mais on a, en général

$$\int_{H_i}^{K_i} f(x_i, y) dy - \int_{Y_i}^{Z_i} f(x_i, y) dy = \int_{H_i}^{Y_i} f(x_i, y) dy + \int_{Z_i}^{K_i} f(x_i, y) dy.$$

Si donc on appelle  $M$  le maximum de la valeur numérique de la fonction  $f(x, y)$ , dans la région du plan considérée, le second membre aura une valeur numérique moindre que

$$M(Y_i - H_i) + M(K_i - Z_i)$$

Donc, les deux infiniment petits

$$(x_{i+1} - x_i) \int_{H_i}^{K_i} f(x_i, y) dy$$

et

$$(x_{i+1} - x_i) \int_{Y_i}^{Z_i} f(x_i, y) dy$$

sont équivalents, et la recherche que nous nous proposons revient à chercher la limite vers laquelle tend la somme

$$(x_{r+1} - x_r) \int_{Y_r}^{Z_r} f(x_r, y) dy + (x_{r+2} - x_{r+1}) \int_{Y_{r+1}}^{Z_{r+1}} f(x_{r+1}, y) dy + \dots + \int_{Y_{s-1}}^{Z_{s-1}} f(x_{s-1}, y) dy$$

lorsque les différences  $x_{r+1} - x_r, x_{r+2} - x_{r+1} \dots$  tendent vers zéro. Mais si l'on appelle  $Y$  et  $Z$ , les ordonnées des points du contour dont l'abscisse est  $y$  ( $Y$  étant la plus petite d'entre elles), la somme ci-dessus a pour limite

$$(6) \quad \int_A^B \left( \int_Y^Z f(x, y) dy \right) dx$$

en appelant A et B les abscisses minimum et maximum des points du contour. Cela résulte encore de la remarque faite au début de ce travail, puisque  $x_r$  et  $x_{r+1}$  comprennent toujours entre elles A, et que B est toujours comprise entre  $x_{s-1}$  et  $x_s$ .

La méthode que nous venons de suivre montre, non seulement que la somme étudiée a une limite, mais que cette limite est la même quelle que soit la loi suivant laquelle on fait varier les distances analogues à  $x_{i+1} - x_i$  et à  $y_{k+1} - y_k$  qui interviennent dans notre démonstration. En effet, l'expression (6) conserve toujours la même valeur quelle que soit cette loi. De plus, nous aurions pu faire la même démonstration en intervertissant les rôles des différences  $x_{i+1} - x_i$ ,  $y_{k+1} - y_k$ . Nous aurions trouvé une expression de la limite cherchée, différente de (6) quant à la forme, mais devant avoir même valeur numérique et même signe. De là le théorème usuel sur la possibilité d'intervertir l'ordre des intégrations indiquées dans la formule (6) sans changer le résultat.

V. JAMET (Marseille).

---

## INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

# DES DÉRIVÉES PARTIELLES

DANS LA THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES ALGÈBRIQUES

---

1. — Dans l'étude des coniques et des quadriques, on considère constamment les dérivées partielles, prises par rapport aux coordonnées, du premier membre de l'équation de la courbe ou de la surface; et il en est de même dans la théorie des surfaces algébriques en général. ..

Il semble dès lors intéressant de se demander quelle est la signification géométrique de ces dérivées, notamment lorsque l'on y remplace les coordonnées courantes par celles d'un point de la figure. Cela peut être en même temps utile pour certaines applications.