SUR LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE TAYLOR

En tenant compte de la relation bien connue :

$$P_p . Q_{p-1} - P_{p-1} . Q_p = \pm 1,$$

on peut former l'équation

$$Q_{p-1}^2 + 2\lambda B\, Q_{p-1} - (A - \lambda^2)\, B^n \mp 1 = 0,$$

qui, résolue en $Q p r$, donne :

$$Q_{p-1} = -\lambda B + \sqrt{AB^2 \pm 1}$$

où l'on a

$$B = \frac{Q_p}{n} = \frac{P_{p-1}}{m}.$$

On aurait trouvé de même

$$P_p = \lambda B + \sqrt{AB^2 \pm 1}.$$

Comme ces valeurs doivent être des nombres entiers, on en déduit que la quantité sous le radical est un carré parfait ; ce qui donne lieu au théorème suivant de la théorie des nombres.

THÉORÈME. — *Etant donné un nombre* A *non carré parfait il existe un ou plusieurs nombres entiers* B, *tels que l'on a* $A.\, B^2 \pm 1$ *carré parfait.*

Il faut remarquer qu'au nombre A correspondent un nombre limité d'irrationnelles y, et par conséquent aussi un nombre limité de valeurs B.

L. CRELIER (Bienne).

SUR LA DÉMONSTRATION

DU THÉORÈME DE TAYLOR

I. — M. Hatzidakis (Athènes) a donné dans cette revue (II, p. 447) un article très intéressant sur une démonstration simplifiée de *la formule de Taylor*. Cependant trois inconvénients m'inspirent des scrupules :

1° L'adoption arbitraire des fonctions :

$$\sigma(x+\omega) - \sigma(x) - \omega\,\sigma'(x) - \Gamma\frac{\omega^2}{\varepsilon^2}, \tag{α}$$

et

$$\sigma(x+\omega) - \sigma(x) - \frac{\omega}{1!}\sigma'(x) - \frac{\omega^2}{2!}\sigma''(x) - \ldots - \frac{\omega^r}{r!}\sigma^{(r)}(x) - \Gamma\frac{\omega^{r+1}}{\varepsilon^{r+1}}; \tag{β}$$

2° La supposition attaquable que Γ, en réalité, fonction de n' et x, soit, dans la différentiation, une quantité constante ;

3° L'invraisemblance de pouvoir trouver la fonction (β) avant de connaître la formule de Taylor elle-même.

II. — J'essaierai donc de démontrer, sans hypothèses arbitraires, que le théorème de Taylor résulte presque immédiatement du théorème de *Rolle.*

Supposons (ce qu'il faut admettre dans ce théorème), que non seulement $f(x)$, mais aussi $f'(x)$, $f''(x) \ldots\ldots f^{(r)}(x)$ soient continues.

On aura donc :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta_1 h);$$

mais, en outre,

$$\left.\begin{array}{l} f'(x+\theta_1 h) = f'(x) + \theta_1 h\, f''(x+\theta_2\theta_1 h) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(x+\theta_n\theta_{n-1}\ldots\theta_1 h) = f^{(n)}(x) + \theta_n\ldots\theta_1 f^{(n+1)}(x+\theta_{n+1}\cdot\theta_n\ldots\theta_1 h) \end{array}\right\} \text{I}$$

et pour chaque θ_i :

$$0 < \theta_i < 1.$$

Or, bien que plusieurs $\theta_1, \theta_2 \ldots\ldots \theta_{n+1}$ puissent répondre à chaque équation, chaque expression se compose de deux parties, c'est-à-dire d'une partie, susceptible d'une seule interprétation, et d'une autre susceptible de plusieurs interprétations. Celle-ci disparaît continuellement et ne reste qu'à la dernière expression :

$$f^{(n+1)}(x+\theta_{n+1}\theta_n \ldots \theta_1 h).$$

III. — Je multiplie d'abord les équations (1) (la 2^e^, 3^e^, 4^e^...) par h, $\theta_1 h^2$, $\theta_2 \theta_1^2 h^3$,.... etc., et j'obtiens, en les additionnant :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \theta_1 h^2 f''(x) + \theta_2 \theta_1^2 h^3 f'''(x) + \dots$$
$$\dots + \theta_{n-1} \theta^2_{n-2} \dots \theta_1^{n-1} h^n f^{(n)}(x) + \Phi \qquad (2)$$

où

$$\Phi = \theta_n \theta^2_{n-1} \dots \theta_1^n h^{n+1} f^{(n+1)}(x + \theta h). \quad 0 < \theta < 1.$$

De plus, en supposant h variable, on aura les dérivations successives de (2) :

$$f'(x+h) = f'(x) + 2\,\theta_1 h f''(x) + 3\,\theta_2 \theta_1^2 h^2 f'''(x) + \dots + D_h \Phi$$
$$f''(x+h) = \qquad 1.2\,\theta_1 f''(x) + 2.3.\theta_2 \theta_1^2 h f'''(x) + \dots + D_h^{(2)} \Phi$$

. . . .

$$f^{(n+1)}(x+h) = D_h^{(n+1)} \Phi = \theta_n \theta^2_{n-1} \dots \theta_1^n \Big[\overline{n+1}\,!\, f^{(n+1)}(x+\theta h)$$
$$+ \binom{n-1}{1} n.!\, h.\, \theta f^{n+2}(x+\theta h) + \dots + \binom{n+1}{n+1} h^{n+1} \theta f^{2(n+1)}(x+\theta h) \Big].$$

Donnons à h dans toutes ces équations la valeur $h = 0$, nous aurons :

$$\theta_1 = \frac{1}{2!}; \qquad \theta_2 \theta_1^2 = \frac{1}{3!}; \qquad \dots\dots \theta_n \theta^2_{n-1} \dots \theta_1^n = \frac{1}{\overline{n+1}\,!}$$

donc :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{\overline{n+1}\,!} f^{(n+1)}(x + \theta h) \qquad (3)$$

Ainsi toutes les expressions (1), dont nous avons parlé ci-dessus (II) deviennent interprétables d'une *seule* manière à l'exception du dernier terme de (3), qui s'annule, comme on le sait, dans tous les cas où cette formule peut avoir lieu.

Richard Suppautschitsch (Vienne, Autriche).