VII

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

THÉORÈME. — *Toute équation du deuxième degré à coefficients entiers, dont les racines sont réelles et irrationnelles donne pour ces racines deux fractions continues périodiques.*

Elles sont périodiques mixtes, de même signe, avec partie irrégulière indéterminée, mais limitée quand c est positif.

Elles sont périodiques mixtes, de signes contraires, avec un seul quotient incomplet à la partie irrégulière quand c est négatif et quand les valeurs absolues des racines sont toutes deux plus grandes que 1, *ou plus petites que* 1.

Elles sont périodiques simples et de signes contraires quand c est négatif et quand la valeur absolue d'une des racines est supérieure à l'unité alors que la valeur absolue de l'autre est inférieure à l'unité.

Dans ce cas, la période de l'une est formée des quotients incomplets de l'autre pris dans l'ordre renversé.

VII

Ces irrationnelles permettent de donner également une nouvelle démonstration du développement de Legendre pour les racines carrées des nombres entiers.

Soit à développer $\sqrt{A}$: Nous poserons :

$$A - b^2 = n_1 . 1.$$

b^2 étant le plus carré parfait.

Les irrationnelles $\frac{\sqrt{A}+b}{1}$ et $\frac{\sqrt{A}+b}{n}$ seront de la forme y et y' et nous aurons :

$$(\alpha) \quad \frac{\sqrt{A}+b}{1} = 2b + \frac{\sqrt{A}+b}{1} = 2b + \frac{1}{\dfrac{\sqrt{A}+b}{n}}.$$

La période correspondant à la 1re irrationnelle s'écrira

$$y = \frac{\sqrt{A}+b}{1} = [2b, b_1, b_2, \ldots b_{p-1}, b_p ; 2b, \ldots].$$

Celle correspondant à la 2e, s'écrira par raison de symétrie

$$y' = \frac{\sqrt{A}+b}{n} = [b_p, b_{p-1}, \ldots, b_2, b_1, 2b ; b_p \ldots].$$

Mais il est à remarquer, que le premier terme de y' est le deuxième de y, (α), et ainsi de suite ; on aura donc, à cause de la symétrie connue de ces irrationnelles

$$y = \sqrt{A} + b = [2b, b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1; 2b, \ldots]$$

et

$$\sqrt{A} = [b, b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b; b_1, b_2, \ldots],$$

développement donné par Legendre (¹).

Remarque. — Le second sommet de la symétrie dans ce développement ne peut être formé de deux quotients incomplets égaux qu'au cas où A est décomposable en une somme de deux carrés parfaits différents et plus grands que 1.

VIII

Si p est le nombre des quotients incomplets de la période de y et $\frac{P_p}{Q_p}$ la partie réduite de ladite fraction continue, on a :

$$y = \frac{P_p y + P_{p-1}}{Q_p y + Q_{p-1}}$$

et

$$y' = \frac{P_p y' + Q_p}{P_{p-1} y' + Q_{p-1}}$$

Les valeurs y et $-\frac{1}{y'}$, sont les racines de l'équation :

$$n\chi^2 - 2\lambda\chi - m = 0,$$

ou de l'équation

$$Q_p \chi^2 + (Q_{p-1} - P_p)\chi - Q_p = 0.$$

La proportionnalité des coefficients donne :

$$\begin{aligned} nB &= Q_p \\ -2\lambda B &= Q_{p-1} = -P_p \\ mB &= P_{p-1}. \end{aligned}$$

(¹) LEGENDRE. *Théorie des nombres.*