SUR QUELQUES DÉSIGNATIONS RELATIVES AUX SÉRIES

Autor(en): **Mansion, P.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-4661

système donné plus haut, où les quadratiques N et D sont laissées intactes ; mais les valeurs critiques x_1 et x_2 de la variable x sont employées et donnent les valeurs limites du quotient N/D.

J'espère que d'autres correspondants viendront s'associer à cette discussion pour donner leurs vues sur cet intéressant sujet.

A. G. Greenhill (Woolwich).

SUR QUELQUES DÉSIGNATIONS

RELATIVES AUX SÉRIES

La publication de l'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* de MM. H. Burkhardt et Fr. Meyer rend opportune, croyons-nous, une revision des termes relatifs à la convergence des séries. Les mêmes mots sont employés, en effet, dans des sens différents, par divers géomètres, ce qui peut être l'origine de graves méprises pour les lecteurs non avertis.

Dans ce qui suit, nous indiquons les désignations qui nous semblent les meilleures, et nous justifions brièvement nos préférences. Pour abréger, nous nous bornons aux séries réelles.

1. *Séries convergentes et séries non convergentes.* — Si la somme

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

des n premiers termes d'une série tend vers une limite finie S, lorsque n croît indéfiniment, la série est dite *convergente*. Elle est dite *divergente*, si S_n croît en valeur absolue au delà de toute limite, en gardant à la fin toujours le même signe. Dans tous les autres cas, la série est dite *indéterminée*.

Dans le premier cas, on écrit

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

et l'on emploie souvent la même notation pour désigner, en abrégé, la série u_1, u_2, ..., u_n, etc., même si $\lim S_n = \infty$, ou $-\infty$, ou si S_n n'a pas de limite.

Exemple. Pour x inférieur à l'unité en valeur absolue, la série suivante, où p est un nombre pair,

$$1 + x + \ldots + x^{p-1} + x^p - x^{p+1} + x^{3p} - x^{3p+1} + x^{5p} - x^{5p+1} + \ldots$$

est convergente et a pour somme

$$F(x) = \frac{1 - x^p}{1 - x} + x^p \frac{1 - x}{1 - x^{2p}} = \frac{(1 + x + \ldots + x^{p-1})^2 (1 + x^p) + x^p}{1 + x + x^2 + \ldots + x^{2p-1}}.$$

Pour x négatif, égal ou inférieur à -1, la série est *divergente;* pour x positif, égal ou supérieur à 1, elle est *indéterminée.* En particulier pour $x = -1$, $x = +1$, la série prend les formes suivantes :

$$A = (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1) + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots,$$
$$B = (1 + 1 + 1 + 1 + \quad + 1 + 1) + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Dans tous les cas d'ailleurs, la fonction $F(x)$ est la *génératrice* de la série, quand on divise l'un par l'autre, le polynôme du numérateur, par celui du dénominateur, tous deux étant supposés ordonnés par rapport aux puissances croissantes de x.

La classification des séries en séries *convergentes*, *divergentes* ou *indéterminées* semble due à L. Olivier (*Remarques sur les séries infinies et leur convergence* dans le tome II (1827), p. 31-44 du JOURNAL DE CRELLE). On la trouve dans le *Traité élémentaire des séries* (1860, p. 2) de Catalan et dans ses autres ouvrages, dans notre *Résumé d'Analyse* (1877, p. 28), dans les *Cours d'Algèbre* de M. G. de Longchamps (2e édition, 1889; p. 150) de M. Niewenglowski (2e édition, 1891 ; t. I, p. 265) et de M. E. Cesàro (1894; p. 116), etc.

C'est aussi cette classification qui a été adoptée par M. Pringsheim dans l'Encyclopédie mathématique allemande (t. I, 1899, p. 77-78), avec la terminologie suivante :

Convergent = *konvergent*,
divergent = *eigentlich divergent* (divergent dans le sens propre du mot)
indéterminé = *uneigentlich divergent* (improprement divergent), ou *unbestimmt.*

Les auteurs anciens et beaucoup de modernes, par exemple, Bertrand (*Algèbre*, 3e édition, 1863, t. II, p. 2) et M. Jordan (*Cours d'Analyse*, 2e édition, t. I, 1893, p. 273) ne divisent les séries qu'en deux classes, les séries *convergentes* et les séries *divergentes*, celles-ci comprenant toutes les séries *non convergentes*, c'est-à-dire, aussi bien les séries où S_n a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, que celles où S_n n'a pas de limite.

Quand on emploie cette terminologie, les séries A et B sont dites l'une et l'autre, *divergentes*, ce qui paraît un peu étrange pour la seconde, où S_n prend indéfiniment les valeurs $p+1$ et p, quand n surpasse p.

Laquelle des deux classifications est la meilleure? Selon nous, c'est la première, celle qui considère trois classes de séries; d'abord, parce qu'il semble contraire à l'étymologie du mot *divergent* de l'appliquer à une série analogue à B, où S_n oscille sans vraiment diverger; ensuite, parce que les commençants ne sont que trop portés à oublier ce fait : dans une série, S_n, pour n croissant indéfiniment, peut se comporter de *trois* manières distinctes, avoir une limite finie, avoir une limite infinie, ou n'avoir pas de limite. Pour prouver qu'une série comme celle-ci

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

est convergente, il ne suffit donc pas de prouver que S_n est toujours compris entre 0 et 1, comme on le croit trop souvent, lorsque l'on débute dans l'étude des séries.

2. *Séries pseudo-convergentes.* La fraction rationnelle $F(x)$, pour $x^2<1$, est la somme de la série

$$(1+x\dots+x^{p-1})+x^p-x^{p+1}+x^{3p}-x^{3p+1}+\dots$$

dont elle est la génératrice. On peut en dire autant, en un certain sens, pour $x=-1$, puisque $F(x)$ et la série sont infinies pour cette valeur.

Pour toutes les autres valeurs de x, $F(x)$ est représentée approximativement par les p premiers termes de la série, avec une erreur égale à

$$x^p\,\frac{1-x}{1-x^{2p}}=\frac{1}{(1+x+\dots+x^{p-1})\left(1+\dfrac{1}{x^p}\right)}.$$

Pour x croissant indéfiniment en valeur absolue, l'erreur tend vers zéro, de sorte que $y = \mathrm{F}(x)$, $y = 1 + x + \ldots + x^{p-1}$ représentent des courbes asymptotiques.

Legendre (*Exercices de calcul intégral*, t. I, 1811, p. 294), après avoir étudié la célèbre série de Stirling, dont log. 1, 2, 3... x est la génératrice, appelle *série demi-convergente*, une série qui, comme la précédente et comme celle de Stirling, converge de plus en plus vers sa génératrice, pourvu que l'on ne dépasse pas un terme d'un certain rang. Stieltjes a donné aux mêmes séries le nom de *séries semi-convergentes*, M. Poincaré celui de *séries asymptotiques* [1]. Ces désignations ont passé en allemand : *halbconvergent, asymptotisch* (M. Pringsheim, dans l'*Encyclopédie*, I, p. 104).

Nous croyons préférable d'appeler ces séries, *séries pseudo-convergentes*, pour les raisons suivantes : 1° Le terme *semi-convergent*, comme nous le dirons plus bas, est maintenant employé dans un autre sens. 2° Les *séries asymptotiques* ne forment qu'une section des séries pseudo-convergentes ; ce sont les séries non convergentes où la différence entre la génératrice et sa valeur approchée tend vers zéro pour x croissant indéfiniment. Or il y a des séries où cette différence tend vers une limite finie. Ainsi, pour $x^2 < 1$, p pair,

$$f(x) = \frac{2 + x + \ldots + x^{p-1} - x^p - x^{p+1} - \ldots - x^{2p-1}}{1 - x^p}$$
$$= 2 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1} + x^p + x^{2p} + \ldots,$$

mais pour $x^2 > 1$, la série n'est plus convergente et ne représente plus sa génératrice $f(x)$. Mais on a, approximativement,

$$f(x) = 1 + x + \ldots + x^{p-1}$$

avec une erreur *absolue* par excès égale à $\frac{x^p}{x^p - 1}$, quantité qui a pour limite l'unité, quand x croît indéfiniment. L'erreur *relative* $\frac{x^p\,(x-1)}{(x^p-1)^2}$ commise en calculant $f(x)$, comme on vient de le dire, a au contraire zéro pour limite, quand x croît indéfiniment.

---

(1) Voir Borel. *Leçons sur les séries divergentes*. Paris, Gauthier-Villars, 1901. Introduction et ch. 1. M. Borel ne parle pas de Legendre.

Il y a donc lieu de distinguer parmi les séries *pseudo-convergentes* celles qui sont *asymptotiques* de celles qui ne le sont pas.

3. *Séries absolument convergentes ou non.* En Allemagne, on appelle *unbedingt konvergent* (inconditionnellement convergente) une série convergente, comme

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots,$$

qui reste convergente, quand on rend tous les termes positifs, *bedingt konvergent* (conditionnellement convergente), celle qui devient divergente dans le même cas ; par exemple,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Les désignations allemandes sont bien choisies et expressives ; mais on ne peut évidemment les employer en français : *conditionnellement* et *inconditionnellement* sont des termes trop longs.

Les désignations de M. Jordan (*Cours d'analyse*, 2[e] édition, p. 275) nous semblent devoir être adoptées ; la première série, considérée plus haut, sera dite *absolument convergente*, la seconde, *semi-convergente*.

Ce dernier terme a été employé dans un autre sens par Stieltjes, comme nous l'avons dit plus haut, mais il semble plus naturel de l'appliquer comme ici à des séries *convergentes*, par exemple, à $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$ etc., qu'à des séries non convergentes, comme celles dont il est question au numéro 2. Il est vrai que *semi-convergent* n'est pas un terme aussi précis que l'expression allemande *bedingt konvergent*, mais il l'est suffisamment et n'est pas trop long.

4. *Séries équiconvergentes ou non.* Une série

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

dont les termes sont fonctions d'une ou de plusieurs variables, est *uniformément convergente* (en allemand *gleichmässig konver-*

gent), si, pour toutes les valeurs considérées des variables, la différence

$$S - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$$

est en valeur absolue inférieure à une quantité donnée d'avance, pour une valeur de n convenablement choisie et pour toutes les valeurs plus grandes (Jordan, *Cours d'analyse*, I, p. 311, Pringsheim, *Encyclopédie*, II, p. 34).

Depuis longtemps, Gilbert a proposé pour remplacer cette expression bien longue : *série uniformément convergente*, la suivante qui est courte et tout à fait équivalente : *série équiconvergente ;* elle a l'avantage de pouvoir être employée en allemand et dans les autres langues savantes, pour ainsi dire, sans aucun changement.

5. *Résumé*. Voici en somme les sept termes dont nous recommandons l'emploi dans la théorie des séries :

Français.	*Allemand.*
Convergent	Konvergent
Divergent	Divergent
Indéterminé	Unbestimmt
Pseudo-convergent	Pseudokonvergent
Absolument convergent	Unbedingt konvergent
Semi-convergent	Bedingt konvergent
Équiconvergent	Aequikonvergent.

Un seul est nouveau : *pseudo-convergent*, et il n'exclut nullement le terme *asymptotique* de M. Poincaré. *Halbconvergent*, en allemand, dans le sens de Stietjes, devrait être abandonné, parce que le terme français *semi-convergent* ne lui correspond plus.

P. Mansion (Gand).