

LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES NOMBRES

Autor(en): **Bettazzi, Rodolphe**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4655>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

un problème bien intéressant que d'éclaircir cette généralisation et ces bornes. L'étude classique de M. Mayer ⁽¹⁾ nous apprend bien des choses à ce sujet dans le cas d'un système de points matériels, sollicités par des forces dérivant d'un potentiel, fonction en général du temps, des coordonnées et des vitesses. Il est à souhaiter que la théorie mathématique, en devançant l'expérience, nous révèle par la même voie des propriétés fondamentales inconnues du mouvement, dans ces espaces infranchissables à l'observation directe qu'il est convenu d'appeler la sphère des actions moléculaires.

G.-A. MAGGI (Pise).

LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES NOMBRES

1. Dans cette note nous voulons nous occuper des signes que l'on peut employer pour indiquer les nombres, quand on veut s'en servir dans le discours ou dans le calcul.

Pour que l'usage de ces signes soit juste et efficace, il faut que chaque nombre soit représenté par un signe particulier, et que, si deux nombres sont différents entre eux, les signes ou symboles le soient aussi; de sorte qu'il s'en suit que la numération écrite est une correspondance bi-univoque entre nombres et signes.

En nous arrêtant en particulier aux nombres réels, valeurs absolues, et, en observant que ces nombres sont en correspondance bi-univoque avec les individus de toute classe linéaire continue de grandeurs homogènes, on voit que si les grandeurs d'une classe ont des signes représentatifs, ces signes peuvent être employés pour représenter aussi les nombres.

Les grandeurs les plus faciles à représenter graphiquement, et

⁽¹⁾ *Ueber den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systems bewegter materieller Punkte, welcher sich aus dem Princip der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung ergibt.* (Mathematische Annalen, t. XIII.)

Voyez aussi APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, ch. xxv.

qui le plus souvent servent à symboliser beaucoup d'autres, sont les segments.

Si l'on imagine un segment u qui représente le nombre un , le nombre k sera représenté par le segment s de façon que le rapport $(s : u)$ soit égal à k . Et si l'on suppose que tous les segments soient portés à partir d'un même point sur une demi-droite qui ait ce point pour origine, les points extrêmes des segments peuvent représenter un à un les différents nombres.

Voilà l'une des façons ordinaires de représenter les nombres; les nombres y sont indiqués par un seul signe, le point, employé dans un nombre infini de positions différentes, prises sur la demi-droite.

2. Si en agissant de la sorte, on trouvait compliqué ce système de numération qui exige l'usage de la demi-droite entière, laquelle est infinie, on pourrait employer une transformation, par exemple :

$$y = \frac{2a}{\pi} \text{ arc tang } x \text{ (}^1\text{)}$$

(expression dans laquelle a peut représenter n'importe quel nombre) qui transforme l'intervalle de 0 à $+\infty$, dans lequel x est variable, dans l'intervalle de 0 à a où varie y , et prendre pour représenter les nombres, les points qui représentent celles des valeurs de y qui correspondent aux valeurs de x de la représentation que nous avons indiquée auparavant; ainsi un segment sera suffisant.

3. Nous pourrions employer plus généralement, pour représenter les chiffres, des points d'une ligne droite tels qu'ils constituent un ensemble linéaire de puissance égale à celle du continu $0 a$, condensé ou non dans quelques-unes ou dans toutes les parties de l'intervalle auquel il appartient ⁽²⁾, ou même des ensembles de points qui appartiennent à d'autres lignes, et même aussi les points

(1) Par arc tang x on indique celui des arcs dont la tangente est x , qui est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

(2) Pour ce qui regarde ces ensembles, voir G. CANTOR, Mémoires, dans *Acta Mathematica*, vol. II.

de certaines surfaces et de certains solides, car nous savons, par exemple (V. Cantor, Peano, Schoenflies), que les points d'un carré ou d'un cube correspondent univoquement au continu linéaire $\overline{01}$, ou bien $\overline{0a}$, ou bien encore $\overline{0\infty}$.

4. Dans la représentation graphique dont nous avons parlé, c'est-à-dire des nombres par les points de la demi-droite complète, ou bien du segment $\overline{0a}$, la position des points nous rappelle d'une manière claire et simple la grandeur relative des nombres ; car, si M et N sont deux points qui représentent deux nombres m et n , selon que M est d'un côté déterminé ou de l'autre de N, nous aurons $m > n$ ou bien au contraire $n > m$.

Dans les autres représentations graphiques dont nous avons déjà parlé, cette disposition qui nous permet de pouvoir, d'une manière facile, connaître la grandeur des différents nombres par la position du point, peut nous manquer ⁽¹⁾.

5. Mais, d'une manière comme de l'autre, ces représentations ne sont pas commodes, attendu que les différentes positions des points qui seraient nécessaires pour indiquer tous les nombres sont infinies et constituent même un ensemble infini de puissance égale à celui des nombres qui doivent être représentés ; et, par conséquent, ils donnent un système de numération qui n'est pas pratique.

Nous ajouterons que, dans ce système, l'exactitude de la représentation est matériellement impossible, car l'ensemble représentatif ayant la puissance du continu, et n'étant pas, par conséquent, dénombrable, a nécessairement des points limites à une distance finie, et autour d'eux, les points de l'ensemble ne pourraient pas être bien représentés graphiquement d'une manière nette. Cet inconvénient n'existerait pas, au contraire, sur une portion de la droite sur laquelle il n'y ait pas de points limites, et sur laquelle la limite inférieure des intervalles réciproques soit, par conséquent, plus grande que zéro.

(1) Pour la représentation avec un ensemble non continu, mais qui maintient tout de même cette relation de position dont nous avons parlé, voyez BETTAZZI : « Su una corrispondenza fra un gruppo di punti e un continuo ambedue lineari » (*Annali di Matematica*, 1888).

6. Il sera donc plus pratique d'employer un système de numération qui n'ait besoin que d'un nombre fini de positions différentes, ou bien même un ensemble infini mais que l'on puisse dénombrer; ayant recours même, s'il en est besoin, à des signes différents l'un de l'autre mais qui forment, eux aussi, un ensemble fini, ou bien infini, mais dénombrable.

Si nous employons un ensemble fini de signes à placer dans des positions différentes l'une de l'autre, mais qui ne forment qu'un ensemble fini, nous ne pouvons avoir qu'un ensemble fini de signes représentatifs, lesquels par conséquent ne suffisent pas à indiquer complètement les plus importantes catégories de nombres; et encore moins est-il possible de représenter graphiquement tous les nombres.

Si nous employons au contraire un ensemble fini de signes que l'on puisse disposer dans une infinité de positions différentes (qui constituent un ensemble dénombrable), on peut d'une manière claire et précise symboliser même des ensembles infinis de nombres.

Voyons maintenant quels nombres nous pouvons représenter avec ce système, en continuant toujours à nous limiter aux nombres en valeurs absolues; de là, nous passerons facilement aux nombres affectés d'un signe, en ajoutant le simple signe + ou —.

7. Les nombres entiers peuvent être représentés par ce système, qui est du reste le système ordinaire de numération.

Si nous avons un nombre β de signes (0, et $\beta - 1$ autres, où β est un entier positif, plus grand que 1) et que chaque signe puisse s'écrire dans un nombre fini de positions prises dans un ensemble dénombrable (comme le sont ceux que nous avons quand, à chaque position, correspond un petit segment de la semi-droite, et que les segments sont tous égaux et tracés l'un après l'autre), on arrive à pouvoir écrire par ces β signes n'importe quel nombre entier, comme on y arrive en effet avec le système ordinaire de numération à base β . Dans le système décimal de numération, par exemple, on emploie les chiffres

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

et chaque chiffre est employé un nombre fini de fois, en en écrivant un (si par exemple pour plus de clarté et de facilité, on emploie du papier quadrillé) dans chaque petit carré, les carrés étant tous égaux et pouvant être imaginés placés l'un à côté de l'autre, autant que l'on en voudra et constituant à eux tous (idéalement) un ensemble dénombrable.

Nous pouvons aussi supposer que $\beta = 1$; autrement dit, nous pouvons nous proposer de n'employer qu'un seul signe qui sera placé dans différentes positions selon les différents nombres qu'il doit représenter. Mais ce système demande un large espace, vu que le symbole représentatif doit occuper une position différente (un carré différent dans l'exemple que nous avons indiqué) selon les différents nombres qu'il représente ; de manière que dans une ligne de α petits carrés le maximum des nombres qu'on pourrait écrire serait justement α , si l'on convient, comme c'est tout à fait naturel, que dans les petits carrés plus à gauche soient indiqués des nombres plus grands que dans les carrés à droite. On voit en outre que, dans ce système, on n'a que la représentation graphique dont nous avons parlé au n° 1, considérée comme limitée aux nombres entiers et où le point est remplacé par un signe quelconque.

Mieux vaut donc recourir à un ensemble fini de différents signes qui en contienne plusieurs et non un seul, et c'est précisément ce que l'on fait dans les systèmes ordinaires de numération à base β , à partir du système binaire ($\beta = 2$ avec les signes 0, 1), où l'on emploie un nombre β de signes, en convenant qu'un signe écrit dans des carrés différents représente différents nombres, et en particulier qu'un signe écrit dans un carré équivaut au β — ple du même signe écrit dans le carré immédiatement à droite.

Dans ces systèmes, non seulement chaque nombre entier a son signe représentatif, mais de plus la position des signes nous permet de reconnaître d'une manière claire et précise, la grandeur du nombre : car, si tous les nombres s'écrivent en commençant dans le même carré de droite, un nombre est d'autant plus grand que son symbole représentatif se prolonge plus vers la gauche ; et, entre deux nombres qui occupent les mêmes carrés, le plus grand est celui dans lequel le premier petit carré, en commen-

cant par la gauche, où nous trouvons des signes différents, contient le plus grand signe.

8. Les nombres rationnels peuvent aussi, eux, être représentés graphiquement en employant un ensemble fini de signes et de positions différentes en nombre infini. L'emploi le plus usuel de ce système consiste, comme l'on sait, à les indiquer par deux nombres entiers (numérateur et dénominateur) l'un au-dessus de l'autre, séparés par un trait (— ou /); ou bien encore l'un près de l'autre séparés par un signe de ponctuation (, ou :). La première manière de les écrire est la plus employée, comme étant celle qui met en évidence la nature de quotient que possède la fraction.

Dans ce cas, si les termes de la fraction sont écrits dans le système de numération de base β , on emploie $\beta + 1$ signes, c'est-à-dire les chiffres 0, 1, 2, ..., $\beta - 1$, avec le signe de fraction (— ou /) et un ensemble dénombrable de positions, c'est-à-dire les petits carrés en nombre infini, disposés pour le numérateur, et ceux disposés pour le dénominateur, positions qui, toutes ensemble, constituent un exemple encore dénombrable.

Dans cette méthode de représentation il n'y a plus, comme pour les nombres entiers, la gradation qui permet de juger au premier coup d'œil, en se basant sur l'écriture, de la grandeur des nombres, car un même nombre peut s'écrire d'une infinité de manières (par exemple : $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} \dots$; $4 = \frac{8}{2} \dots$) et une fraction quelquefois est tantôt plus grande, tantôt plus petite qu'une autre qui est écrite avec des termes plus grands (par exemple : $\frac{4}{7} < \frac{23}{35} < \frac{6}{8}$).

9. On peut imaginer d'autres systèmes pour représenter les fractions. On pourra, par exemple, déduire un de ces systèmes de ce que CANTOR ⁽¹⁾ a exposé pour démontrer que l'ensemble des fractions a une puissance égale à celle de l'ensemble des nombres entiers. On prend tous les nombres rationnels (y compris les nombres entiers, que l'on écrit avec le dénominateur 1) et, après les avoir

(1) Voy. CANTOR, *loc. cit.*

rendus irréductibles, on en additionne les deux termes, et on obtient un nombre que Cantor appelle la *hauteur* du nombre rationnel. Chaque nombre rationnel a une hauteur, et pour chaque nombre n pris comme hauteur, nous avons un ensemble fini de fractions irréductibles correspondantes, qui est composé, au plus, par $n - 1$ fractions. Si nous plaçons les fractions d'une même hauteur dans n'importe quel ordre (par exemple par ordre de grandeur), et si on donne à chacune d'elles un nombre d'ordre relatif, on pourra indiquer chaque fraction par deux nombres entiers, l'un égal à sa hauteur, l'autre égal au numéro d'ordre que la fraction a pris parmi celles qui ont même hauteur; nombres que l'on peut séparer entre eux par quelque signe, ou bien écrire, par exemple, le second à la droite du premier, et en dessous, comme une indice. Même dans ce système l'écriture n'exprime rien qui puisse nous donner des renseignements un peu rapides sur la grandeur du nombre représenté.

10. D'ailleurs, pour indiquer une fraction, il n'est pas nécessaire de faire usage de signes nouveaux, en dehors de ceux des nombres entiers; car (comme nous l'avons déjà dit) les nombres rationnels constituent un ensemble dénombrable, qui peut être mis en correspondance bi-univoque avec les nombres entiers, et en conséquence nous pouvons les écrire avec les symboles qui, dans la numération ordinaire, servent pour les nombres entiers qui leur correspondent. Mais, encore, dans ce cas, quelle que soit la correspondance que l'on établit, on reconnaît impossible la gradation de grandeur, de manière que si pour deux fractions m et n on a $m > n$, le symbole représentatif de m (qui est celui d'un nombre entier) indique aussi un nombre entier plus grand que n ; car si cela devait être, comme deux nombres entiers consécutifs p et $p + 1$, ne comprennent entre eux aucun nombre entier, il s'ensuivrait qu'entre les nombres rationnels que nous avons indiqués par p et $p + 1$, il ne serait compris aucun autre nombre rationnel; tandis qu'au contraire, pour deux fractions quelconques il y a toujours un nombre infini d'autres fractions intermédiaires.

11. Une autre manière importante d'indiquer les nombres

rationnels consiste à se servir d'un nombre infini d'autres positions en dehors de celles qu'on emploie pour les nombres entiers dans les systèmes de numération à base β quelconque, en ajoutant à la droite du premier petit carré de droite un autre ensemble infini dénombrable de carrés consécutifs qui doivent être employés pour recevoir, chacun par ordre, les fractions qui ont pour dénominateurs $\beta, \beta^2, \beta^3, \dots$ et un numérateur de 0 à $\beta - 1$. Il s'agit, en résumé, de la représentation qui, dans le système de numération de base 10, s'appelle décimale, et que nous pourrions appeler tout simplement de ce nom, même en général.

Un nombre rationnel pouvant se décomposer en une partie entière et un nombre fini de fractions du type $\frac{\alpha_1}{\beta^1}, \frac{\alpha_2}{\beta^2}, \frac{\alpha_3}{\beta^3}, \dots$ (où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ sont des entiers de 0 à $\beta - 1$) sera indiqué par une formule décimale, au moyen d'un nombre fini de signes pris parmi les chiffres 0, 1, 2, ..., $\beta - 1$, et la virgule décimale.

Mais l'on voit facilement que les fractions ne peuvent pas être toutes réduites ainsi. Nous en avons un exemple dans la fraction $\frac{1}{\beta - 1}$. En effet, cette fraction contient autant de $\beta^{\text{ièmes}}$ (les dixièmes du système décimal) qu'il y a d'unités dans $\frac{\beta}{\beta - 1}$ c'est-à-dire 1, avec un reste de $\frac{1}{\beta - 1}$ de $\beta^{\text{ième}}$, qui, à son tour, contiendra autant de $\beta^{\text{ièmes}}$ de $\beta^{\text{ièmes}}$, c'est-à-dire autant de $(\beta^2)^{\text{ièmes}}$ (centièmes) qu'il y a d'unités dans β . $\frac{1}{\beta - 1} = \frac{\beta}{\beta - 1}$, ou 1 unité avec un reste 1, etc. ; et l'on voit que l'opération ne s'arrêtera jamais.

Mais comme dans ce cas-ci et dans tous les cas semblables l'opération est une division du numérateur suivi de zéro par le dénominateur, division qui ne donne jamais zéro pour reste, et qui par cela même, doit donner à quelque moment des restes déjà obtenus, nous obtiendrons un nombre décimal illimité, mais périodique, dont la partie périodique peut être symbolisée, par exemple, en écrivant une des périodes renfermée entre des parenthèses []. De cette manière, on parvient à indiquer aussi ces fractions, génératrices de périodiques, par un nombre fini de chiffres décimaux, pourvu qu'on emploie aussi le signe [] ou

un autre équivalent ; et l'on indique ainsi les fractions par un nombre fini de signes, à choisir parmi les $(\beta + 2)$ suivants :

$$0, 1, 2, \dots, \beta - 1, , , []$$

et par des positions différentes qui constituent un ensemble dénombrable, qui sont (idéalement) indiquées par les petits carrés du papier quadrillé.

Par ce système, qui se rapproche le plus de celui qui est habituellement employé pour indiquer les entiers, la gradation de grandeur des nombres rationnels peut être reconnue presque comme celle des entiers, par des observations très simples.

12. Tout ce qui a été dit pour la représentation des nombres rationnels en ayant recours à un nombre fini de signes et à un ensemble infini dénombrable de positions différentes, nous pourrions le répéter en employant un nombre fini de positions et un ensemble infini dénombrable de signes différents ; il suffit pour cela d'échanger entre eux les mots « signe » et « position » partout où ils se trouvent. Mais il y aurait l'inconvénient qu'il faudrait avant tout écrire effectivement tous les symboles nécessaires, choisis d'une manière arbitraire, mais tous différents les uns des autres, ce qui est impossible, car ils doivent former un ensemble infini quoique simplement dénombrable tandis que l'on peut seulement écrire un nombre fini de tels signes ; ou, pour mieux dire, on peut en écrire, l'un après l'autre, autant que l'on veut en nombre fini. Ou bien il faudrait imaginer, afin d'avoir tous les signes nécessaires, un système de signes différents l'un de l'autre, tels que l'on puisse en écrire un quelconque au moyen de lois déterminées, ce qui nous obligerait à construire pour ces signes un système d'écriture semblable à celui que l'on cherchait, car les signes nécessaires composent, eux aussi, un ensemble infini dénombrable.

Au contraire, quand on veut se servir d'un nombre infini de positions différentes, elles sont indiquées simplement par des parties égales successives de la ligne où l'on écrit, ou plutôt *elles sont* ces parties-là même, lesquelles se présentent spontanément, sans efforts ni artifices, étant déjà placées, et en aussi

grand nombre qu'on le veut, du moins en proportion avec les dimensions du papier dont on fait usage.

Il semble donc inutile de s'occuper du système dont on a parlé dans ce paragraphe.

Le système où l'on emploierait aussi bien des signes que des positions en nombre infini aurait au moins tous les désavantages du système dont nous venons de parler.

13. Les systèmes cités jusqu'ici, propres à indiquer les nombres rationnels et qui emploient pour chacun d'eux un nombre fini de signes et de positions différentes, à choisir les uns et les autres dans deux ensembles finis ou infinis dénombrables que nous indiquerons respectivement par G_1 et Γ_1 , peuvent être interprétés aussi d'une autre façon.

En réalité, si l'on imagine un symbole spécial pour chacune des différentes positions de l'ensemble Γ_1 , on obtiendra ainsi un ensemble G_2 de symboles qui sera fini, ou infini dénombrable, avec Γ_1 . Alors, pour indiquer un nombre quelconque, nous pourrions employer l'ensemble des symboles de G_1 déjà destinés à représenter les nombres et les signes de G_2 qui représentent les positions de Γ_1 , assignées à ces symboles de G_1 que nous avons employés, selon les règles des systèmes précédemment exposés ; on disposera les symboles de G_1 et ceux de G_2 d'une façon quelconque, par exemple en appliquant les symboles de G_2 comme indices aux symboles correspondants de G_1 . Mais, comme l'union des deux ensembles G_1 et G_2 donne naissance à un ensemble G_0 infini dénombrable, nous arrivons, en conclusion, à indiquer ainsi les nombres par un ensemble fini de symboles à choisir dans un ensemble dénombrable G_0 ; et par conséquent on peut représenter tous les nombres rationnels en indiquant chacun d'entre eux par un nombre fini de symboles que l'on peut choisir dans un ensemble infini dénombrable. Dans la pratique, on peut remplacer une partie de ces signes par des positions différentes dans lesquelles on écrit ceux qui restent.

14. Arrivons maintenant à nous demander *si* et *comment* on peut trouver un système de numération propre à indiquer par des signes, différents entre eux, tous les nombres réels, rationnels et irrationnels, sans considérer le signe algébrique $+$ ou $-$;

et voyons si l'on peut avoir une représentation de nombres réels, en se servant d'un artifice semblable à celui que nous avons indiqué pour les nombres rationnels, c'est-à-dire en joignant à chaque nombre un ensemble fini de signes (que l'on peut interpréter d'une façon quelconque, par exemple, comme des positions, etc.), qui seront choisis dans un ensemble infini dénombrable.

Nous connaissons un théorème dont la démonstration est assez facile ⁽¹⁾ et dont l'énoncé est le suivant : « Soit donné un ensemble infini dénombrable de signes tous différents entre eux : si l'on considère tous les ensembles possibles que l'on obtient en prenant ces signes de toutes les façons possibles, soit au point de vue de leur ordre, soit au point de vue de leur nombre (fini), et même en acceptant que dans un même ensemble on puisse considérer le même signe répété plusieurs fois, alors l'ensemble dont les éléments sont les ensembles que l'on a formés, est infini, mais dénombrable. »

Ce théorème prouve que la méthode que nous avons proposée est insuffisante à représenter tous les nombres réels, car les signes que l'on peut obtenir ainsi ne constituent qu'un ensemble ayant une puissance plus petite que celle du continu des nombres réels ⁽²⁾ et par suite il est impossible d'en avoir un pour chaque nombre réel de manière qu'à des nombres inégaux puissent correspondre des signes eux aussi différents. On a ainsi démontré l'impossibilité de représenter graphiquement tous les nombres réels, avec un système de numération qui s'appuie sur des règles analogues à celles que l'on emploie pour les nombres entiers et fractionnaires.

Et l'on ne doit pas penser que l'on puisse, par un pareil artifice, représenter les seuls nombres irrationnels, car dans ce cas, puisqu'il existe une manière d'écrire les nombres rationnels, il y aurait une manière d'écrire tous les nombres réels, conclusion contraire à ce que l'on a démontré. De plus, on sait que l'ensemble des nombres irrationnels a lui aussi la puissance du con-

(¹) BETTAZZI. Sui sistemi di numerazione dei numeri reali (*Periodico di Matematica*, Anno VI). — *Id.* Fondamenti per una teoria generale dei gruppi (*Periodico*, Anno XI).

(²) CANTOR. Mémoires dans *Acta Mathematica*, vol. 2.

tinu⁽¹⁾, et par conséquent une puissance plus grande que celle d'un ensemble dénombrable ; et par conséquent aussi, les signes obtenus par les artifices des systèmes de numération sont insuffisants.

15. On peut interpréter l'artifice du système de numération pour les nombres entiers autrement que nous l'avons fait plus haut.

Comme, par exemple,

$$379 = 300 + 70 + 9 = 3^c + 7^d + 9^u$$

on peut considérer 379 comme une abréviation du symbole d'addition $3^c + 7^d + 9^u$; et alors les symboles des nombres entiers ne sont que des abréviations de l'écriture des polynomes. Pareillement le signe ordinaire des fractions $\frac{a}{b}$, n'est que le signe de division de a par b , de manière que la fraction se présente (et au reste elle l'est vraiment) comme le résultat d'une division, indiqué par le symbole même de la division.

Tout cela montre que les formules algébriques sont propres à représenter les nombres qui sont leurs résultats ; il est donc naturel de chercher s'il est possible de construire une expression algébrique pour chaque nombre réel, tout en employant un nombre fini de signes numériques et un nombre fini de signes d'opérations, qui soient, les uns et les autres, pris dans des ensembles finis ou infinis dénombrables lesquels sont les seuls parmi ces ensembles infinis que l'on peut employer pratiquement ; car, en vertu du principe d'induction mathématique qui est vérifié en eux, lorsqu'ils sont ordonnés en correspondance avec les nombres entiers, il suffit de donner quelques-uns de leurs premiers éléments, avec une loi qui doit servir à calculer chaque élément au moyen de quelques-uns des précédents, pour être assuré que l'on parviendra à n'importe lequel des éléments.

On sait que l'on fait usage de formules algébriques pour indiquer *quelques* nombres irrationnels (ceux qui proviennent des opérations qui ont des symboles, exécutées sur des nombres que l'on sait déjà écrire en symboles), par exemple : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$ —

(1) Voy. CANTOR, *loc. cit.*

$3\sqrt[5]{5}$, $\cos \frac{7}{9}$ etc. Cette méthode est, cependant, insuffisante pour l'indication graphique de tous les nombres réels.

En effet, ces signes d'opération et tous les autres signes dont nous pouvons nous servir, constituent, comme on l'a reconnu, des ensembles finis ou dénombrables; et, en appliquant de nouveau le théorème du paragraphe précédent, nous ne pouvons former avec eux que des ensembles dénombrables de symboles, qui sont insuffisants pour indiquer tous les nombres réels.

Il paraît donc inutile d'étudier d'autres opérations algébriques, à adjoindre à celles qui sont actuellement en usage, dans le but de parvenir à représenter *tous* les nombres; comme ces opérations seraient étudiées l'une auprès de l'autre, elles formeraient un ensemble qui au plus serait infini dénombrable, et l'ensemble des symboles représentatifs que l'on pourrait en tirer serait par cela toujours dénombrable, donc insuffisant.

L'introduction de nouveaux signes d'opérations augmente la quantité des nombres que l'on peut représenter, et dans ce sens elle est utile: ainsi, par exemple, les signes de différentielle (d), d'intégrale (\int), de fonctions trigonométriques (\sin , \cos , \tan , etc.) que l'on rencontre dans le développement des études de mathématiques, permettent d'exprimer des nombres que sans ces signes on n'aurait pas pu écrire; mais il y aura toujours des nombres constituant un ensemble qui aura encore la puissance du continu, qui ne pourront pas être représentés.

16. Il faut observer que l'on étudie aussi des nombres qui ne sont pas donnés comme des résultats d'opérations que l'on doit exécuter *explicitement* sur des nombres donnés et que l'on sait écrire, mais dont on sait tout simplement qu'ils sont les inconnues de certaines équations auxquelles ils doivent satisfaire, c'est-à-dire des nombres définis *implicitement* au lieu de l'être explicitement.

On pourrait indiquer chacun de ces nombres en écrivant l'équation dont il est la racine avec un signe qui pût servir à le distinguer des autres racines de la même équation, en suivant une loi à établir.

Cependant cette méthode est, elle aussi, insuffisante pour donner un système de numération pour tous les nombres réels,

parce que les signes d'opérations avec lesquels on peut composer ces équations doivent être dénombrables, et toutes les équations possibles que l'on peut écrire chacune avec un nombre fini de tels signes constituent un ensemble dénombrable; et, pour que l'on puisse les indiquer, leurs racines doivent aussi être en nombre fini, ou infini de première puissance. En conséquence, en ayant un ensemble dénombrable d'équations et, pour chacune d'entre elles, un ensemble fini ou infini dénombrable de signes pour en indiquer les racines, le théorème du numéro 14 nous fait conclure que l'ensemble des ensembles résultants sera encore dénombrable, et par suite insuffisant pour indiquer tous les nombres réels ⁽¹⁾.

17. Avec des artifices analogues à ceux qui servent dans les systèmes de numération, c'est-à-dire par l'emploi d'un nombre fini de signes choisis parmi ceux d'un ensemble dénombrable (qui peuvent au reste, signifier des nombres, des positions, des équations ou tout ce que l'on voudra) on ne peut donc indiquer que des ensembles infinis dénombrables de nombres. Mais on peut observer qu'il est possible de représenter ainsi les nombres d'un ensemble *quelconque* dénombrable, et qu'en outre, à ce résultat suffisent les symboles que l'on emploie pour les nombres entiers : car un ensemble dénombrable est un ensemble dont les éléments peuvent correspondre bi-univoquement avec les nombres entiers, et les nombres de cet ensemble peuvent être indiquées par les symboles des entiers correspondants. Ce qui n'empêche cependant pas que l'on puisse se servir aussi d'autres systèmes de représentations, différents de celui qui emploie les symboles des entiers, comme on l'a montré, par exemple, pour les fractions aux numéros 8 et 9,

(1) Ce raisonnement démontre que les nombres qui sont racines d'équations dont chacune peut s'exprimer par un nombre fini de signes d'un ensemble dénombrable et possède un nombre fini ou infini dénombrable de racines, constituent un ensemble dénombrable. En particulier, si l'on prend toutes les équations de premier degré à coefficients entiers, ou bien celles d'un degré quelconque à coefficients entiers, on a les théorèmes de CANTOR, à savoir que l'ensemble des nombres rationnels et celui des nombres algébriques sont dénombrables. Et alors il s'en suivra que les racines de toutes les équations dont les coefficients sont des nombres algébriques, forment eux aussi un ensemble dénombrable. On retrouve ainsi immédiatement un résultat qui, au reste, peut s'obtenir également en montrant que ces racines sont de nouveau tous les nombres algébriques et eux seuls. (Voy. BOREL, *Théorie des fonctions.*)

et pour les nombres qui sont racines d'ensembles dénombrables d'équations dans le numéro précédent.

18. Afin de construire un système de numération qui puisse servir, avec un certain avantage, pour indiquer tous les nombres réels au moyen de symboles différents pour chacun d'eux, qui soient formés par des signes diversement combinés, il est nécessaire que ces signes forment un ensemble de puissance plus petite que celle du continu des nombres réels ; car autrement les signes à introduire seraient aussi nombreux que les nombres réels, et nous serions obligés d'introduire autant de signes différents et indécomposables qu'il y a de nombres à représenter, sans avoir ainsi un véritable système de numération. Les ensembles finis et ceux qui sont infinis mais dénombrables sont les seuls, parmi les ensembles qui ont la puissance plus petite que celle du continu, que nous connaissons : et ils sont insuffisants. Dans l'état actuel de la science, on peut donc conclure qu'il est impossible d'indiquer tous les nombres réels par un système de numération dans lequel on emploie un ensemble *fini* de signes pour chaque nombre.

Peut-être aurait-on un système de numération quand on aurait découvert l'existence d'ensembles infinis d'une puissance plus petite que celle du continu, et plus grande que celle des ensembles dénombrables ; mais même si cet ensemble existait (ce qui n'est pas encore décidé) il serait pratiquement inefficace, car ses signes en infinité (qui peuvent être aussi comme on l'a dit, des signes de positions, etc.) ne pourraient pas être tous écrits : en outre on ne pourrait pas indiquer un moyen pour les obtenir l'un de l'autre de manière à parvenir au nombre que l'on veut, car cette dernière propriété est une conséquence du principe d'induction, qui est caractéristique des ensembles dénombrables ⁽¹⁾.

19. L'impossibilité de la représentation des nombres réels que nous avons démontrée est due à ce fait, que les signes que l'on veut écrire pour indiquer chaque nombre doivent être un nombre fini, afin qu'on les puisse écrire complètement. En enlevant une

(1) Voy. BETTAZZI. *Fondamenti per una teoria generale dei gruppi*, cap. VII.

telle restriction, c'est-à-dire en convenant que l'on puisse idéalement écrire une infinité de signes pourvu qu'ils forment un ensemble dénombrable afin que l'on puisse en écrire autant qu'on veut de manière à parvenir à l'un d'entre eux déterminé et quelconque, alors la possibilité d'écrire tous les nombres est facile à démontrer.

Observons, par exemple, que chaque nombre irrationnel (et aussi rationnel) est la limite supérieure (l') d'une classe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$, de nombres rationnels, ou bien est la limite ($lim.$) commune de deux classes convergentes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ et $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n, \dots$ composées de nombres rationnels, chacun desquels s'écrit avec un nombre fini de signes choisis dans un ensemble dénombrable : alors l'expression

$$l'(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$$

et cette autre

$$\lim \begin{cases} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots \\ \alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n, \dots \end{cases}$$

emploient toutes les deux précisément une infinité de signes choisis dans l'ensemble qui (si β est la base du système de numération) est formé par les $\beta - 3$ signes :

0, 1, 2, ..., $(\beta - 1)$, / (signe de fraction), l' ou lim , () ou { et par les positions, en nombre infini, dans lesquelles on peut écrire un chiffre, comme on a déjà dit.

De même, comme un nombre quelconque peut être développé en une fraction continue (limitée ou illimitée) du type

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$$

ou a_1, a_2, a_3, \dots sont des nombres entiers; on a un autre moyen pour indiquer tous les nombres réels, avec une infinité de signes, choisis dans des ensembles infinis dénombrables.

20. En cherchant une généralisation dans le sens qu'on a déjà indiqué au n° 15 pour les nombres entiers qui sont la somme d'autres nombres, nous pouvons voir facilement que les nombres peuvent tous être écrits comme des sommes d'un nombre fini ou

infini de nombres, choisis parmi ceux d'un ensemble infini dénombrable Γ .

Nous citons comme exemple le cas où l'ensemble Γ est formé par *neuf* chiffres 1, signes d'unités, *neuf* chiffres semblables, signes de dizaines, *neuf* signes de centaines... par *neuf* signes de dixièmes, *neuf* de centièmes... et par le zéro. Avec eux tout nombre peut être lu et écrit sous la forme d'un nombre décimal, fini ou non.

En général, si dans un ensemble dénombrable de nombres, Γ , on choisit un ensemble fini ou infini (alors nécessairement dénombrable) ⁽¹⁾, de tels nombres, et si l'on appelle γ cet ensemble, on peut additionner les nombres de γ , s'ils sont en nombre fini, ou, s'ils forment un ensemble infini, on peut considérer la limite supérieure des sommes (qui sont une infinité) que l'on a en additionnant les nombres de chacun des ensembles possibles finis des nombres de γ . Dans les deux cas indiquons par n_γ respectivement la somme ou la limite supérieure. Alors on peut employer les nombres de γ pour représenter le nombre n_γ : et l'on peut choisir la série Γ de sorte que, en prenant tous les ensembles possibles, γ , finis ou infinis, formés avec des nombres de Γ , et en calculant pour chacun d'eux le nombre correspondant n_γ , on parvient ainsi à représenter tout nombre réel.

Si la série Γ est formée par des nombres qui ont tous leur moyen d'écriture, par exemple par des nombres rationnels, on a ainsi un moyen d'écrire tous les nombres réels avec une infinité de signes choisis dans un ensemble dénombrable.

On ne peut pas utiliser dans ce but une série Γ quelconque de nombres rationnels; car il est nécessaire ⁽²⁾ que la série soit divergente, que la limite inférieure de ses termes soit zéro, et que pour chaque nombre a la somme des termes de la série qui sont $< a$, soit $\geq a$. Un exemple est fourni par la série

$$\dots 2^n, 2^{n-1}, \dots 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{2^n}, \dots$$

(1) BETTAZZI, *Fondamenti*, etc., cap. x.

(2) BETTAZZI, *Sulle serie a termini positivi le cui parti rappresentano un continuo* (*Atti della R. Accademia della Scienze di Torino*. Anno 1897-98, § 6).

ou par cette autre :

$$\begin{array}{c} \overbrace{\dots 10^n, \dots 10^n, 10^{n-1}, \dots 10^{n-1}}^{(9)}, \dots \overbrace{10, \dots 10, 1, \dots 1}^{(9)}, \dots \overbrace{\frac{1}{10}, \dots \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots \frac{1}{100}}^{(9)}, \dots \overbrace{\frac{1}{100}, \dots \frac{1}{100}}^{(9)}, \\ \dots \overbrace{\frac{1}{10^n}, \dots \frac{1}{10^n}}^{(9)}, \dots \end{array}$$

qui peuvent servir toutes les deux à représenter tous les nombres réels ⁽¹⁾.

21. La représentation des nombres avec une infinité de signes ne résout qu'idéalement le problème ayant pour objet d'assigner un symbole à chaque nombre; car on ne peut pas écrire en réalité une infinité de signes isolés. En voulant utiliser ces symboles dans la pratique, il faut écrire seulement quelques-uns de leurs signes en nombre fini, c'est-à-dire qu'il faut écrire les nombres avec une *approximation*, qui, cependant, peut être poussée aussi loin que l'on veut, car les signes qui composent le symbole d'un nombre sont pris dans un ensemble infini dénombrable, et que par conséquent on peut en écrire un nombre suffisant pour arriver au nombre que nous voulons.

Ainsi, en se servant de l'approximation, les signes nécessaires pour écrire les nombres sont, pour chaque nombre, un ensemble fini, pris dans un ensemble dénombrable, car chaque nombre peut être écrit avec approximation par le moyen d'un ensemble fini de nombres rationnels.

22. Pour les nombres à n dimensions, on peut se passer de considérations spéciales, parce qu'ils sont écrits quand on a écrit les nombres qui indiquent leurs composants, avec des signes (+, ou la virgule, ou semblables) qui séparent ces composants.

Pour les nombres à deux ou trois dimensions on a aussi la représentation ordinaire, avec les points du plan ou de l'espace, par les coordonnées cartésiennes.

Rodolphe BETTAZZI (Turin).

(1) BETTAZZI, Sulle serie, etc., § 11.