Zeitschrift: Elemente der Mathematik (Beihefte zur Zeitschrift)
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 12 (1956)

Artikel: Isaac Newton
Autor: Fleckenstein, J.O.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7615

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

1. Die ideengeschichtlichen Voraussetzungen der Entdeckung des Infinitesimalkalküls durch Isaac Newton

We all know that the triomph for a historian of science is to prove that nobody ever discovered anything. *Jacques Hadamard*

Aus den Newton Tercentenary Celebrations der Royal Society vom 15. bis 19. Juli 1946.

Schon die Zeitgenossen haben NEWTONS säkulare Bedeutung empfunden. Aber wie der Hymnus von POPE

'Nature and Natures laws lay hid in night
God said: let Newton be, and all was light'

andeutet, wurde diese Bedeutung vor allem in der Physik erblickt. Das Gravitationsgesetz vollends erschien den Enzyklopädisten des 18. Jahrhunderts, den VOLTAIRE, D'ALEMBERT, DIDEROT, gleichsam als Inbegriff aller mechanischen Naturgesetzlichkeit. Ihre popularisierende Schreibweise, welche dem grossen Publikum NEWTON als den unsterblichen Gesetzgeber der Physik für alle Zeiten vorstellte, liess zwar seinen Namen zum Symbol werden, verdeckte aber den wissenschaftsgeschichtlichen Fortschritt in NEWTONS Hauptwerk, den *Philosophiae naturalis principia mathematica* (London 1687). Denn inhaltlich bedeutete das Newtonsche Gravitationsgesetz nur die Anwendung der Formel von HUYGENS für die Zentralkraft (*Horologium oscillatorium*, den Haag 1659) $\mathfrak{K} = v^2/\varrho$ (v Bahngeschwindigkeit, ϱ Krümmungsradius der Bahnkurve) auf das dritte Keplersche Gesetz $a_i^3 : a_k^3 = T_i^2 : T_k^2$. Da man die Bahnkurve sukzessive durch die Oskulationskreise approximieren kann, im Kreis aber $v = 2\pi r/T$ ist, so folgt im Kreisfall aus $\mathfrak{K} = v^2/r$ für $T^2 = c\, r^3$ sofort ein Zentralkraftgesetz von der Form $\mathfrak{K} = 1/r^2$. Die mathematische Bedeutung des Newtonschen Gesetzes lag vielmehr in der Möglichkeit, das Sonnensystem als ein n-Körperproblem zu behandeln, indem man gewissermassen in den Differentialgleichungen

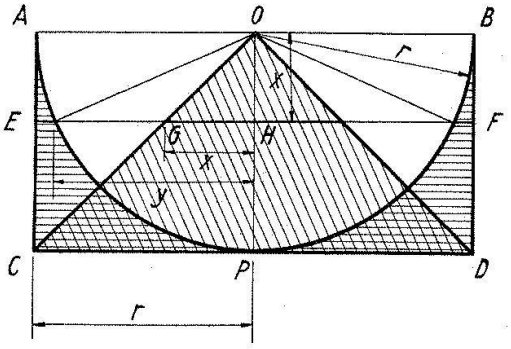
$$m_i \frac{d^2 \mathfrak{r}_i}{dt^2} = \mathfrak{K}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

für die störenden Kräfte die Formen $\mathfrak{K}_i = m_i\, m_k / r_{ik}^2$ einsetzen konnte. Damit war zum ersten Male die allgemeine Dynamik «more geometrico» deduktiv ableitbar geworden, und diese Ableitungen hat NEWTON selber im kanonischen Rahmen seines Hauptwerkes gegeben.

Freilich gab er diese Ableitungen nicht in der Sprache der *Analysis*. Die Differentialgleichungen für die Bewegungen der Massenpunkte implizieren nämlich den Infinitesimalkalkül. Diesen aber benutzte er in den *Principia* absichtlich nicht, obwohl er wahrscheinlich mehrere der geometrischen Hilfssätze, welche er als Lemmata dem Werk vorausschickt, für sich allein mit infinitesimalen Methoden vorher abgeleitet hat und sie nur post festum synthetisch dem Publikum vorführt; mit diesen

kann dann allerdings alles weitere nach der gewohnten euklidischen Methode der Schule hergeleitet werden. In den geometrischen Hilfssätzen, welche «De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur» (Lib. I, Sect. I) überschrieben werden, steckt die eigentliche mathematische Substanz der *Principia*, und an einer Stelle verrät sich NEWTON sogar, indem er (Liber II, Sect. II) seinen Fluxionskalkül preisgibt und von der Fluxion $n\,x^{n-1}$ der Fluente x^n spricht.

Dem Physiker NEWTON erschien ein formaler Kalkül für variable infinitesimale Grössen nicht besonders wichtig. Zwar liegen variable Infinitesimalia jedem dynamischen Prozess zugrunde, aber NEWTON interessierte sich mehr für diesen Prozess selber als für seine kalkulatorische Beschreibung, die er als sekundär und nur als ad hoc brauchbar ansah. Immerhin benutzt NEWTON wenigstens einen für dynamische Überlegungen zurechtgemachten Infinitesimalkalkül, während der Begründer der Dynamik, GALILEI (1564–1642), einen solchen Kalkül, das heisst eine Abbildung der Dynamik auf Algebra gar nicht kennt.



Figur 1

GALILEI hat aber dagegen sich mit besonderem Vergnügen der Betrachtung variabler Grössen gewidmet. In seinen *Dialoghi delle Scienze nuove* (1638), in welchen er die Grundlagen der Mechanik darstellt, beschäftigt er sich ausführlich mit «Paradoxien des Unendlichen», indem er hinschwindende Grössen betrachtet, wie das berühmte Beispiel (1. Buch) des Rasiermesserrundes (Scodella), welches als Restfigur beim Schnitt der Ebene EF mit dem von der Halbkugel APB ausgehöhlten Zylinder $ABCD$ übrigbleibt. Man erkennt leicht, dass der Kegel $2\,OGH = (\pi x^2)\,x/3$ der Scodella in $AEBF$ volumgleich ist, da deren Grundfläche $\pi r^2 - \pi y^2 = \pi r^2 - \pi (r^2 - x^2)$ ist. GALILEI verfolgt nun das Zusammenschrumpfen der Scodella und des Kegels, wenn die Schnittebene nach oben parallel bewegt wird. In der Limite entartet der infinitesimale Kegel zum Punkt O, während die Scodella zu einem Kreisring wird, woraus GALILEI die Paradoxie des Unendlichen herleitet, dass der Punkt einer Kreislinie, ja allen Kreislinien gleich ist, so dass überhaupt alle Kreislinien untereinander gleich sind. Ohne eine algebraische Darstellung der Rauminhalte der beiden Figuren ist in der Tat nur schwer einzusehen, dass die betreffenden Infinitesimalia in verschiedener Ordnung gegen Null gehen.

NEWTON gilt allgemein als der Vollender der Galileischen Dynamik, wobei einige ältere Historiker noch phantasievoll auf die symbolische Tatsache hinweisen, dass NEWTON im Todesjahr GALILEIS geboren wurde. GALILEI hat das erste dynamische Naturgesetz, das Gesetz des freien Falles, gefunden. Fast zwei Jahrtausende hatte die Menschheit sich vergeblich um die einfachste Zustandsänderung in der Natur bemüht; dem antiken Denken war sie verschlossen, weil erstens die Intuition des Trägheitsgesetzes und zweitens die Fassung des Begriffs der kontinuierlichen Veränderung zur Ableitung selbst des einfachsten Naturgesetzes notwendige Voraussetzungen sind. Für das antike Denken war mathematische Physik unmöglich – abgesehen von dem Spezialfall der Statik –; es führt nämlich keine begriffliche Brücke von der Welt der festen geometrischen Gestalten, die allein die antike Mathematik repräsentiert, zur veränderlichen Sinnenwelt der physikalischen Prozesse, welche die moderne Naturwissenschaft seit der Renaissance zu erklären versucht. Zwar über-

wand GALILEI schon allein mit seinem Trägheitsgesetz den naiven Standpunkt der Antike, dass gemäss dem metaphysischen Prinzip des ARISTOTELES der Proportionalität zwischen Zustandsänderung und einwirkender Kraft die Geschwindigkeiten des fallenden Körpers die Kräfte messen müssen, indem er erkannte, dass die gleichförmige (unbeschleunigte) Bewegung – entgegen der Impetustheorie der mittelalterlichen Scholastik – keinerlei Kraft zur Aufrechterhaltung erfordert, also selber als ein Zustand wie die Ruhe anzusehen ist (Gedankenexperiment der schiefen Ebene mit der Neigung Null!), so dass die Kräfte durch die Geschwindigkeitsänderungen gemessen werden müssen.

Aber dass die Kräfte durch die zweiten Derivierten gemessen werden, war eine Erkenntnis, zu der nicht einmal ein DESCARTES, geschweige denn die Schule der Kartesianer gelangte. GALILEI hat dagegen den Begriff der Änderung einer Änderung erfasst und kann damit – wenn auch ohne jegliche algebraische Formalisierung – das Fallgesetz ableiten. Getreu der scholastischen Tradition begreift er die Geschwindigkeit (in den Jugendschriften «Forma motus» genannt) als das Indivisible der Bewegung. Sie erzeugt in stetiger Variation die Bewegung. Die Bewegung ist also, modern ausgedrückt, das Integral aller Geschwindigkeiten über die Zeit. Und so stellt GALILEI in der Tat den beim Fall zurückgelegten Weg als den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Seiten t und $v = g\,t$ dar. Die lineare Funktion $g\,t$ ist nun der einfachste Prozess einer Änderung des Geschwindigkeitsindivisibels. Mehr als das Fallgesetz hat GALILEI in der Dynamik nicht finden können, denn es fehlte ihm die Möglichkeit, seine funktionell-dynamischen Vorstellungen zu kalkülisieren und damit den Infinitesimalkalkül zu erfinden.

Es ist ein merkwürdiges Faktum, dass GALILEI und seine Florentiner Schule der CAVALIERI (1598–1647), TORRICELLI (1608–1647) und RICCI (1619–1692) die algebraische Koordinatenmethode des DESCARTES nicht kannten oder kennen wollten, wie denn überhaupt gleichsam als Präludium zu dem späteren grossen Prioritätsstreit zwischen NEWTON und LEIBNIZ schon ein halbes Jahrhundert vorher ein Streit zwischen den Florentinern und den Kartesianern über diverse Tangenten- und Quadraturprobleme stattfand.

Den Kartesianern gelang es nämlich, zunächst für alle algebraischen Kurven die Tangenten zu bestimmen, indem sie diverse Methoden ersannen, aus der Differenz $f(x_2) - f(x_1)$ den Faktor $x_2 - x_1$ herauszuziehen, so dass der sinnlose Differentialquotient $0/0$ nicht auftritt, indem man in dem Grenzwert

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} F(x_2, x_1)$$

vorher den kritischen Wert $x_2 - x_1$ herauskürzen kann (Verfahren von FERMAT, DE SLUSE u. a.). DESCARTES selber vermeidet überhaupt die Auffassung der Tangente als Grenzfall der Sekante, indem er sie rein algebraisch aus der Diskriminantenbedingung für zusammenfallende Schnittpunkte einer Geraden mit der betreffenden Kurve gewinnt. Hiermit gelingt es zwar den Kartesianern, Kinematik zu treiben und sie auf Algebra abzubilden, aber die Dynamik bleibt ihnen verwehrt; und damit ist die kartesische Physik nur eine Kinematik komplizierter höherer algebraischer Kurven.

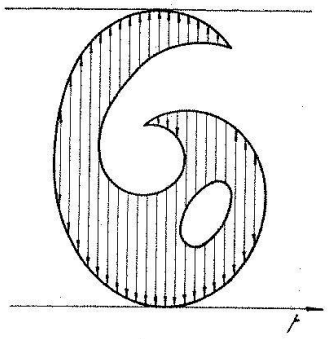
Auch die Integration derartiger algebraischer Kurven wurde von den Kartesianern geleistet. Hatte ARCHIMEDES geometrisch mittels statischer Hilfsüberlegungen schon schwierigere Integrationen ausgeführt und insbesondere die Integration von $\int x^2\,dx$ und $\int \sin x\,dx$ geleistet, so ging FERMAT (1608–1665) mittels eines raffinierten Inter-

vallschachtelungsverfahrens darüber hinaus, indem er allgemein die Integration $\int x^n\,dx = x^{n+1}/(n+1)$ für alle rationalen n leistete. Er besass ferner spezielle Verfahren der partiellen Integration, und seine algebraische Virtuosität erlaubte ihm, mittels geschickter Substitutionen Ausdrücke zu rationalisieren und so beispielsweise das berühmte Integral

$$\int_0^\infty \frac{a^3}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,a^2$$

zu gewinnen. PASCAL leistete allgemein die Kubatur hufförmiger Körper (1659) und sogar die Integration von speziellen transzendenten Ausdrücken der Form $\int \vartheta^m \cos^n\vartheta \sin\vartheta\,d\vartheta$. Trotzdem besassen die Kartesianer keinen allgemeinen Infinitesimalkalkül; ja er erschien ihnen überhaupt unmöglich, weil die unausgedehnten Infinitesimalia nicht «clare et distincte» zu erkennen seien.

Die Florentiner Schule GALILEIS aber benutzte dagegen ein neues infinitesimales Prinzip, welches als Methode über den archimedischen Rahmen der Antike hinausgriff, und das ihnen gestattete, ohne jede Algebra den virtuosen algebraischen Verfahren der Kartesianer Pari zu bieten. CAVALIERI schrieb ein zuerst von GALILEI selber intendiertes Werk über die Indivisibilienmathematik, *De geometria indivisibilibus continuorum* (Bologna 1635), in welchem die Kontinua nicht mehr im archimedischen Sinne additiv aus unendlichkleinen, aber extensiven Elementen statisch zusammengesetzt werden, sondern aus dem «Fluxus» eines Indivisibels entstehen. Und zwar gilt dabei der Punkt als das Indivisibel der Linie, die Gerade als das Indivisibel der Fläche und die Ebene als das Indivisibel des Raumkörpers. Das Flächenkontinuum entsteht beispielsweise aus dem Fluxus einer Geraden, welche je nach der Berandung desselben nach einem gewissen Gesetz an- und abschwillt, welches der Kartesianer in der Form $g(t)$ schreiben kann. Der entscheidende Denkschritt, welchen CAVALIERI vollzog, lag in der Erkenntnis, dass das Kontinuum aus dem kontinuierlichen Fluss eines *einzigen* sich stetig ändernden Indivisibels genetisch erzeugt wird und nicht durch statische additive Aneinanderlegung mehrerer verschiedener Indivisibilien entsteht.



Figur 2

Die komplizierte Terminologie der scholastischen Indivisibilientheorie hat freilich das Cavalierische Prinzip oft in Misskredit gebracht, insbesondere hat die «mésinterprétation cartésienne» zu Paradoxien geführt, an die sich eine lange Diskussion über die Indivisibilien anschloss, an welcher auch PASCAL teilnahm und die selbst heute noch den Kritikern des Cavalierischen Prinzips Argumente liefert, denen der Autor damals nur mit unbeholfenen Wendungen antworten konnte. So konnte bei dem bekannten Gegenbeispiel der Zerlegung eines Dreiecks durch Parallelen zur Höhe, welche nach dem Cavalierischen Prinzip die Flächengleichheit der beiden Zerlegungsdreiecke folgen lässt – weil alle entsprechenden Höhenparallelen als Indivisibilia von den Basisparallelen in gleichen Abständen gleich abgeschnitten werden –, CAVALIERI nur entgegnen, dass die Dichte der Parallelen (spissitudo) in den beiden Zerlegungsdreiecken verschieden sei, was sein Prinzip ausschliesse. Trotz der Allgemeinheit des Prinzips – die entsprechenden «modernen» Figuren in der *Geometria* von 1635 würde man in zeitgenössischen Werken kartesischer Mathematiker umsonst suchen – gelingt

es ihm aber nicht, begrifflich seine funktionellen Vorstellungen zu formulieren und klar auszudrücken, dass das Erzeugungs*gesetz* des Kontinuums gemäss der Umrandung desselben das entscheidende Motiv des neuen Infinitesimalprinzips sei, welches in der Tat zum ersten Mal in der Geschichte der Mathematik über ARCHIMEDES hinausgeht. Die ROBERVAL, FERMAT, PASCAL u. a. haben natürlich in ihren *Traités des indivisibles* diese wieder zu kartesischen Extensiva degradiert.

CAVALIERI gelang auf diesem Weg geometrisch die Bestimmung von $\int x^n\,dx$ bis $n = 9$, woraus er die Formel

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1^n + 2^n + \cdots + m^n}{m^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$$

für alle ganzzahligen n mittels einfacher Induktion erschliesst. TORRICELLI glückte später sogar die Integration von $\int x^n\,dx$ für alle rationalen n, ohne auch nur ein einziges Mal sich der algebraischen Methode des DESCARTES bedienen zu brauchen. Hierbei fand er ein infinitesimales Paradoxon, das ihn als würdigen Nachfolger seines Lehrers GALILEI ausweist. Der Flächeninhalt der Hyperbel

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x}$$

ist unendlich, das Volumen des Rotationshyperboloides

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}$$

aber ist endlich, und zwar π/a. Dieses erste Resultat über Cauchy-Integrale

$$\int_x^\infty \frac{dx}{x^m}$$

leitet TORRICELLI durch Erzeugung des Hyperboloidvolumens aus den einzelnen Oberflächen der zylindrischen Hyperboloidröhren als Indivisibilien her.

Die Infinitesimalverfahren des Florentiner Kreises hat JAMES GREGORY (1638–1675) an Ort und Stelle während seiner italienischen Emigration als schottischer Stuart-Anhänger durch Vermittlung des Cavalieri-Schülers DEGLI ANGELI (1623–1697) kennengelernt. Wenn auch nicht nur durch GREGORYS Vermittlung die Florentiner Infinitesimalverfahren in England bekannt wurden – denn die Werke GALILEIS, CAVALIERIS und TORRICELLIS waren um die Mitte des 17. Jahrhunderts überall zugänglich –, so ist doch GREGORY durch seine Tangenten- und Quadraturmethoden einer der ersten englischen Pioniere des Infinitesimalkalküls geworden, welche der Entdeckung NEWTONS vorarbeiteten.

In Cambridge, wo der junge NEWTON als Schüler BARROWS studierte, war unterdessen der Boden für die fruchtbare Weiterbildung der Ideen GALILEIS vorbereitet worden. In den nordischen Ländern hatte sich die Renaissance zwar später, aber vielleicht mit um so grösserer wissenschaftlicher Methodik vollzogen. Ihr Platonismus, der bei GALILEIS empirischer Naturforschung immer noch wirksam bleibt – sind ihm doch die Fallgesetze gültig, auch wenn es keinen realen Körper gäbe, der jemals fallen würde, so dass dem Experiment nur die Aufgabe bleibt, nachträglich die Deduktionen des Verstandes zu illustrieren –, führte in Cambridge zu einem ausgesprochenen natur-

mystischen Neuplatonismus, als dessen bedeutendster Repräsentant neben GLANVILLE und CUDWORTH HENRY MORE (1614–1687) angesehen werden kann. Hatte schon PLATON im *Phileb* (17 A) illustriert, wie man durch stetige Bewegung des Unbegrenzten die begrenzten Dinge erzeugt (*σημεῖον ἀρχὴ γραμμῆς*), und später PROKLOS (412–485), in seinem berühmten *Euklid-Kommentar* die Ideen der Florentiner antizipierend, die Kontinua aus dem «Fluxus» der Punkte, Geraden usw. entstehen lassen, so gibt HENRY MORE diesen Vorstellungen die metaphysische Basis, indem er die Realität eines immateriellen Raumes und einer gleichmässig fliessenden Zeit postuliert.

Ein Verehrer MORES war ISAAC BARROW (1630–1677), der Lehrer NEWTONS in Cambridge. So sehr sich auch die Cambridger Schule im Kampf gegen die herkömmliche Scholastik mit dem französischen Kartesianismus, ja sogar mit dem Positivismus HOBBES' verband, das Ideal von BARROW blieb der Platonismus GALILEIS. BARROW aber kannte im Gegensatz zur Florentiner Schule die algebraischen Infinitesimalverfahren der Kartesianer. Zudem hatten die englischen Mathematiker schon mit beträchtlichen algebraischen und arithmetischen Leistungen aufgewartet (OUGHTRED, WALLIS). Die Zeit war für Cambridge reif geworden, durch Anwendung der algebraischen Methode des DESCARTES auf die dynamischen Vorstellungen des GALILEI den Infinitesimalkalkül zu erfinden.

Diese Erfindung wäre schon BARROW geglückt, wenn er seine Befangenheit in den geometrischen Vorstellungen des Florentiner Kreises und seine Abneigung gegen den algebraischen Formalismus überwunden hätte. Von der Richtigkeit des Cavalierischen Prinzips ist er überzeugt; er verteidigt die Indivisibilienmethode gegen die Angriffe des Kartesianers TACQUET S. J., welcher mit seiner strengen Kritik den Florentinern arg zu schaffen gemacht hatte. In dem Hauptwerk, den *Lectiones Geometricae; in quibus (praesertim) generalia curvarum linearum symptomata declarantur...* (London 1670) schreibt BARROW in der Lectio II: «... juxta methodum indivisibilium, omnium expeditissimam, et modo rite adhibeatur haud minus certam et infallibilem.» Ausführlich geht er in den ersten Lektionen auf die verschiedenen Arten der Bewegung, über das gegenseitige Verhältnis von Geschwindigkeit und Zeit und ihre Anwendung zur Erzeugung von Kurven ein. Er besitzt nicht nur den jeglicher kartesischen Dialektik unerreichbaren Begriff der Tangente als Grenzfall der Sekante mit dem daraus resultierenden infinitesimalen «triangulum characteristicum» mit den Seiten dx, dy, ds – freilich geometrisch als Dreieck, welches im Berührungspunkt aus Tangente, Subtangente und Ordinate gebildet wird –, sondern auch in geometrischer Form das allgemeine Umkehrtheorem $d/dt \int y(t)\, dt = y$, welches GALILEI nur in dem einfachsten Fall $y = g\,t$ (mit dem Dreiecksinhalt für das Integral beim freien Fall) kennt.

In Lectio IX und Lectio XI des Werkes werden in geometrischer Umschreibung Integration und Differentiation als inverse Operationen deklariert. In IX wird allgemein gezeigt, dass aus

$$R\,y = \int_0^x v\,dx$$

dann $R\,dy/dx = v$ folgt; in XI wird nachgewiesen, dass aus $R\,dy/dx = v$ weiter

$$R\,y = \int_0^x v\,dx$$

folgt.

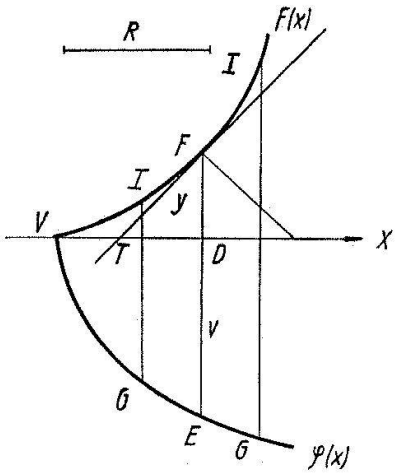
BARROW stellt sich die Kurve $VIFI$ von einem Punkt durchlaufen vor, dessen Projektion auf die X-Achse VD sich mit konstanter Geschwindigkeit R bewegt. Die Ordinate FD dieser Kurve aber wachse mit einer Geschwindigkeit, welche durch die Ordinate v der anderen Kurve $VGEG$ dargestellt wird. Dann ist also $dx/dt = R$; $dy/dt = v$, woraus $R\,dy/dx = v$ folgt. Die Tangente aber kann man nun einfach nach dem Prinzip des Bewegungsparallelogramms aus R und v als Resultante konstruieren. Die Quadratur, mit welcher GALILEI den mit konstanter Beschleunigung durchlaufenen Weg gefunden hatte, lieferte gerade den Zusammenhang zwischen y und dem Flächeninhalt

$$\int_0^x v\,dx,$$

der bei GALILEI leicht als Dreiecksinhalt zu bestimmen war, weil bei ihm $v = g\,t$, die Kurve $VGEG$ also eine Gerade war. In BARROWS Theorem stehen ferner die beiden Kurven in der Beziehung zueinander, dass die Ordinate y (bis auf den Faktor R) den Flächeninhalt

$$\int_0^x v\,dx$$

oder die Integralkurve von $VGEG$ darstellt und die Ordinate v umgekehrt die Derivierte von $VIFI$.



Figur 3

BARROW umschreibt dieses Umkehrprinzip mit einem geometrischen Satz, indem er den damals geläufigen Begriff der Subtangente benutzt. Dann kann er das Theorem mit den Worten umschreiben, dass in dem Fall, wo die Kurve $VIFI$ als $y = F(x)$ die Integralkurve von $VGEG$ als $v = \varphi(x)$ ist, die Subtangente DT stets gleich $R \cdot DF/DE$ ist. In der Tat ist nämlich allgemein die Subtangente (modern geschrieben) $S_T = y\,dx/dy$. Für $R \cdot DF/DE$ kann man aber $R\,y/v$ schreiben, so dass also aus $DT = Ry/v = y\,dx/dy$ sofort $R\,dy/dx = v$ folgt.

Es ist nun erstaunlich, zu welchen geometrischen Einzelresultaten BARROW mit seinem geometrisch verklausulierten Prinzip gelangt. Das gewöhnliche Debeaunesche Problem, welches in der Geschichte der Mathematik die erste Differentialgleichung repräsentiert und welches die Bestimmung der Kurve verlangt, für welche $y : S_T = 1 : (x - a)$ ist, verallgemeinert BARROW zu der Aufgabe, diejenige Kurve zu bestimmen, für welche $y/S_T = f(x)/(x - a)$ ist. Er diskutiert mehrere spezielle Fälle für $f(x)$ geometrisch und findet so zum Beispiel für den Fall, wo $f(x) = \sqrt{b\,x - x^2}$, also eine Kreisordinate ist, eine Zykloide als Lösung. Der Historiker muss allerdings notieren, dass auch GREGORY schon die Reziprozität der Differentiations- und Integrationsoperation – wenn auch nur implizit, ohne sich der Bedeutung, wie BARROW, bewusst zu sein, welcher dieselbe systematisch ausnutzt – gefunden hat: In seiner *Geometriae pars universalis* (Venedig 1667) beweist er einen Satz über Subtangenten geometrisch, welchen wir heute $\int S_T\,dy = \int y\,dx$ schreiben würden, für den er aber die Gleichheit von Flächeninhalten benutzt. Andererseits hat GREGORY auch in der Reihenlehre (Interpolation, gliedweise Integration von entwickelten Irrationalitäten u. a.) derartige Fortschritte in Einzelheiten erzielt, dass man statt von einem Prioritätsstreit zwischen NEWTON und LEIBNIZ auch von einem solchen zwischen GREGORY und LEIBNIZ sprechen könnte – vielleicht mit mehr Recht als von einem Prioritätsstreit zwischen BARROW und LEIBNIZ durch welchen manche modernen Historiker denjenigen zwischen NEWTON und LEIBNIZ, gerne ersetzt sehen möchten. NEWTON hat – aus heute kaum mehr zu eruierenden Gründen – der Einzelleistungen GREGORYS nicht gedacht, obwohl sie ihm bekannt sein mussten. Insbesondere hat COLLINS – als Zwischenträger zwischen NEWTON und GREGORY – in Unverständnis der Leistungen des letzteren viel zur Usurpation mancher Sätze durch NEWTON beigetragen.

Wir wissen heute, dass NEWTON an diesem Werke seines Lehrers mitgearbeitet hat. Die Fülle der letztgenannten Probleme hatte die Kräfte des jungen Genius gestählt, dem der nur wenig ältere Lehrer durch vorzeitigen Rücktritt von der Professur (1669) frühzeitig den Platz freigemacht hat. NEWTON hat den gleichmässig fliessenden Zeitparameter t von BARROW übernommen. Auch er betrachtet die Kurven als erzeugt durch die Bewegung eines Punktes, welche mit einer bestimmten Geschwindigkeit erfolgt. Die Koordinaten x, y der Kurvenpunkte fliessen, und ihre Geschwindigkeiten, welche wir heute dx/dt und dy/dt schreiben, sind die Fluxionen $\dot{x}$, $\dot{y}$ der fliessenden Grössen x, y, die NEWTON konsequent die Fluenten nennt. Diese Punktbezeichnung tritt in den Newtonschen Manuskripten schon 1665 auf! Die Fluxion der Bewegungskomponente x ist das Verhältnis der augenblicklichen Veränderung von x zur unendlichkleinen Zeit 0. Das heutige Differential ist also wegen $dx/dt = \dot{x}$ gerade $dx = \dot{x}\,0$. Diese etwas vagen Auffassungen versucht NEWTON strenger zu umschreiben: «Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit proportio; quippe quae antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed eodem argumento contendi posset, nullam esse corporis ad certum locum pervenientis velocitatem ultimam, hanc enim antequam corpus attingit locum non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: Per velocitatem ultimam intelligo eam, quo corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimam et motus cessat, neque postea sed tunc cum attingit» (*Principia*, Liber I, Lemma XI, Scholion). Die Existenz der «ultima ratio incrementorum evanescentium» wird durch die stillschweigende Berufung auf die Entstehung der Bewegung vorausgesetzt. Die Zeit wird als eine mathematische Grösse aufgefasst, welche unabhängig von allem Geschehen gleichmässig läuft. Der Kartesianismus hatte in seiner Physik auf die möglichste Eliminierung des Zeitparameters abgezielt; dies lieferte ihm deshalb nur ein geometrisch-kinematisches Modell für physikalische Zustandsänderungen. Eine Dynamik war nur in Fortsetzung der Ideenbildungen GALILEIS zu erreichen, indem man die verschiedenen Lagen der Massenpunkte in ihrer Abhängigkeit voneinander durch eine Kraftbeziehung, das heisst durch eine Funktion der Zeit bestimmt; die Beschränkung der Physik auf die geometrische Verteilung der Massen liefert nur eine Geometrie. Wird Physik derart auf Mathematik abgebildet, so gibt es in der Welt höchstens Stösse, welche das Bewegungsquantum übertragen, aber keine kontinuierlich wirkenden Kräfte, welche Ursachen von Zustandsänderungen repräsentieren. Immerhin konnte DESCARTES über die Statik der Antike mit seinem Impulsbegriff hinaustreten und das physikalische Geschehen aus der geometrischen Mannigfaltigkeit der Verteilung des Bewegungsquantums verstehen, aber erst NEWTON gelingt eine Dynamik, indem er den Zeitparameter unabhängig von den drei Raumkoordinaten x, y, z in die Physik einführt. Hat man allgemein ein System von n Grössen $x, y, z, w, \ldots$, die alle Funktionen des einen Zeitparameters t sind, so sichert die Elimination von t für ein System von $n-1$ Grössen die gleichzeitige Variation. Den Zeitparameter selbst fasst NEWTON als eine mathematische Grösse auf, welche man aus sukzessiven Einzelmomenten zusammensetzen oder aus dem kontinuierlichen Fluss eines einzigen Moments entstehen lassen kann «velut ex simplici supervenientium momentorum addicamento vel ex unius momenti quasi continuo fluxu» (*Methodus fluxionum* [1670/71]). Die Kontinua selber aber entstehen durch den kontinuierlichen Fluss «Lineae describuntur ac describendo generantur non per appositionem partium, sed

per motum continuum punctorum... Hae geneses in rerum natura locum vere habent et in motu corporum quotidie cernuntur» (*Introductio ad quadraturam curvarum* [1704]). Im Scholion zu Lemma XI des ersten Buches der *Principia* hat NEWTON dann den späteren Differentialquotienten vorweggenommen und bemerkt, dass nur das Verhältnis der hinschwindenden Grössen – und zwar im letzten Moment ihres Verschwindens – bestimmt wird, nicht aber die infinitesimale Grösse als solche. «... Ultimae rationes illae, quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum sed *limites*, ad quos propius assequi possunt, quam pro data quavis differentia, numquam vero transgredi, neque prius attingere, quamquam quantitates diminuuntur in infinitum.»

NEWTON besitzt also auch eine arithmetische Vorstellung vom Grenzbegriff. In der Tat ist in NEWTONS Ideenbildungen neben der dynamischen Wurzel GALILEIS auch eine arithmetische Komponente numerischer Induktion vorhanden, welche auf den Empirismus von JOHN WALLIS (1616–1703) zurückgeht.

In der *Arithmetica infinitorum* (1656) hat WALLIS einige infinitesimale Kunststücke vollbracht, welche ihm die staunende Bewunderung der Zeitgenossen eingetragen hat. Die entscheidende Formel von FERMAT für die bestimmten Integrale

$$\lim_{m\to\infty} \frac{0^n+1^n+2^n+\cdots+m^n}{m^n+m^n+m^n+\cdots+m^n} = \frac{1}{n+1}$$

leitet er in typischer Induktion so ab, dass er beispielsweise für $n=3$ sukzessive zeigt, dass

$$\frac{0^3+1^3}{1+1} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4},$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3}{2^3+2^3+2^3} = \frac{0+1+8}{8+8+8} = \frac{1}{4}+\frac{1}{8},$$

$$\frac{0^3+1^3+2^3+3^3}{3^3+3^3+3^3+3^3} = \frac{0+1+8+27}{27+27+27+27} = \frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

gegen 1/4 konvergiert. Berühmt ist seine Bestimmung der Zahl π, welche er durch Berechnung des Integrals

$$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}$$

gewinnt, wo das Integral nämlich gerade die Fläche eines Halbkreises mit dem Durchmesser 1 darstellt. Gemäss seiner bzw. FERMATS Regel für die Integrale der Form $\int x^n\,dx$ findet er

$$\int_0^1 (x-x^2)^0\,dx = 1,$$

$$\int_0^1 (x-x^2)^1\,dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2\cdot 3},$$

$$\int_0^1 (x-x^2)^2\,dx = \frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5} = \frac{1}{30} = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{4}{4\cdot 5},$$

$$\int_0^1 (x-x^2)^3\,dx = \frac{1}{4}-\frac{3}{5}+\frac{3}{6}-\frac{1}{7} = \frac{1}{140} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{4}{4\cdot 5}\cdot\frac{9}{6\cdot 7}$$

und daraus durch gewöhnliche Induktion, dass

$$\int_0^1 (x - x^2)^n \, dx = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

ist. Diese Formel wendet er nun schlankweg für $n = 1/2$ an und erhält

$$\int_0^1 (x - x^2)^n \, dx = \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)!}.$$

Die Schwierigkeit bestand nun für WALLIS darin, die Fakultät $1/2!$ zu bilden, da man damals einem solchen Symbol keinen mathematischen Sinn zulegen konnte. Zwar war WALLIS in Überlegungen, die einen unendlichen Prozess implizierten, keineswegs zimperlich. Beispielsweise hatte er seine Formel

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu^n}{m^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$$

ganz allgemein, nicht nur für alle rationalen $n = p/q$, sondern selbst für irrationale n postuliert. Unendliche algebraische Approximationen und Iterationen stützt er einfach auf das philosophische Kontinuitätsprinzip, welches ihn freilich manchmal auch in Irrtümer verstrickt. So glaubt er die Reihe

$$\cdots \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0}$$

über den Nenner 0 hinaus fortsetzen und damit die negativen Zahlen

$$\cdots \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2} < \frac{1}{-3} \cdots$$

als «Plusqu'infinis» deklarieren zu dürfen. Bei dem unendlichen Prozess, auf welchen die Entwicklung $(1/2)!$ führt, hilft er sich durch die Bemerkung, dass $(2n)!/(n!)^2$ der Binomialkoeffizient des mittleren Gliedes in der Entwicklung für $2n$ ist, und dass man nur die gewöhnliche Tafel der Binomialkoeffizienten für (p/q), welche ja schon im 16. Jahrhundert bekannt war (TARTAGLIA, STIFEL usw.), auf den Fall

$$\frac{(p+q)!}{p!\,q!} = \frac{(p+q)\,(p+q-1) \cdots (p+1)}{q\,(q-1)\,(q-2) \cdots 2 \cdot 1}$$

zu erweitern und dann p oder q durch gebrochene Zahlen zu ersetzen habe. Durch eine Art Interpolation kann man aber auch für die beiden gebrochenen Zahlen p und q das Tableau rechnen und findet, dass für $p = 1/2$, $q = 1/2$ gerade der gesuchte Wert resultiert, den man dann in der bekannten Form des Wallisschen Produktes

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdots} = 2 \prod_{\nu=2}^{\infty} \frac{(2\nu)^2}{(2\nu-1)^2}$$

schreiben kann.

Die Beherrschung der numerischen Methoden der *Analysis* erlaubte es nun NEWTON, nicht nur die beiden Hauptaufgaben der Differential- und Integralrechnung, aus den Fluenten die Fluxionen (Tangentenproblem) und umgekehrt aus den Fluxionen die Fluenten zu bestimmen (Quadraturproblem), mit einer neuen Bezeichnungsweise zu formulieren, sondern auch den dazugehörenden Infinitesimalkalkül zu erfinden.

2. Der Infinitesimalkalkül von Newton

Nicht das Gravitationsgesetz, sondern die allgemeine binomische Reihe soll NEWTON auf seinen Epitaph in Westminster Abbey haben einmeisseln lassen – wohl um für immer zu dokumentieren, dass er diese als seine bedeutendste Entdeckung ansehe. In der Tat steckt in der binomischen Reihe ein Schlüssel zur numerischen Infinitesimalanalysis, indem sie für alle rationalen ν Reihenentwicklungen in der Form

$$(1+x)^{\nu} = \sum_{m} \binom{\nu}{m} x^{\nu-m}$$

erlaubt. NEWTON hat freilich den allgemeinen binomischen Satz in der Gestalt

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \cdots,$$

wo die Koeffizienten $A, B, C, \ldots$ jeweils das vorhergehende Glied bedeuten. In einem im Verlaufe des Prioritätsstreites wichtig gewordenen Brief vom 24. Oktober 1676, der an OLDENBURG, den Sekretär der Royal Society, gerichtet, aber zur Vorzeigung an LEIBNIZ bestimmt war, vermerkte NEWTON, dass er die allgemeine Binomialreihe schon 1669 besessen habe und sie «tanquam fundamenta magis genuina» betrachte als die anderen Entwicklungen in seiner *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (verfasst 1669, gedruckt 1711). Wie hat NEWTON die allgemeine Binomialreihe gefunden?

WALLIS hatte in der *Arithmetica infinitorum* die Integrale (vgl. S. 10)

$$I_m = \int_0^x (1-x^2)^m \, dx$$

bestimmt. Man erhält sukzessive

m	I_m
0	x
1	$x - \frac{x^3}{3}$
2	$x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5$
3	$x - \frac{3}{3} x^3 + \frac{3}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7$

NEWTON untersuchte nun das Bildungsgesetz dieser Entwicklung. Zunächst erkennt man, dass als erstes Glied immer x und als zweites $-(x^3/3)$ mit einem Koeffizienten versehen wird, der gerade gleich dem Exponenten m ist. Die anderen Glieder sind nicht so leicht zu durchschauen. Die Exponenten der Potenzen von x und die ihnen entsprechenden Nenner wachsen in arithmetischer Progression der ungeraden Zahlen. Die Zähler findet man aus der symbolischen Entwicklung von $(1+1)^1$, $(1+1)^2$, $(1+1)^3$, ..., $(1+1)^n$. Nun aber bemerkte NEWTON noch, dass, wenn 1 und m die

ersten Zähler sind, sich die folgenden aus ihnen durch fortgesetzte Multiplikation ergeben mit $(m-1)/2$, mit $(m-2)/3$, mit $(m-3)/4$ usw., wobei bei ganzzahligem m die Reihe von selbst abbricht. NEWTON hat hier zum ersten Mal die multiplikative Zusammensetzung der Binomialkoeffizienten entdeckt, welche noch einem WALLIS entgangen war (vgl. S. 11). Nun vollzog NEWTON wie WALLIS den kühnen Schritt, $m=1/2$ zu setzen und das Bildungsgesetz der Koeffizienten in der Reihe für I_m auch für gebrochene Exponenten gültig zu setzen. Damit erhielt er sukzessive die Koeffizienten

$$\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{6}, \qquad \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1/2-1}{2}}{5}=-\frac{1}{40}, \qquad \text{usw.}$$

und damit die Reihenentwicklung

$$\int_0^x (1-x^2)^{1/2}\,dx = x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}-\frac{x^7}{112}-\cdots,$$

so dass sich

$$(1-x^2)^{1/2}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\cdots$$

ergibt, von deren Richtigkeit er sich durch die Multiplikation der beiden Reihen $(1-x^2/2,\ldots)\,(1-x^2/2,\ldots)$ überzeugte, deren sukzessive Resultate in der Tat gegen $1-x^2$ konvergieren.

NEWTON war ein Meister in der Behandlung unendlicher Reihen. In der gleichen Schrift erfindet er auch das Verfahren der Reihenumkehr. Aus

$$z=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\cdots$$

findet er eine Potenzreihe in z für x, indem er zunächst $x=z+p$ setzt und in der entstehenden Reihe für z die Glieder höherer Ordnung in p und z wegstreicht, so dass ihm für p der Wert $z^2/2$ folgt; mit der zweiten Näherung $p=(z^2+q)/2$ eingehend, findet er

$$q=\frac{\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{8}z^4+\frac{1}{20}z^5}{1-z+\frac{1}{2}z^2}=\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5.$$

Damit folgt nun schliesslich

$$x=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5+\cdots.$$

Beachtet man nun, dass $z=\log(1+x)$ ist, also $x=e^z-1$ wird, so bemerkt man, dass NEWTON mit der Reihe

$$z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots$$

en passant die Exponentialreihe vor EULER entdeckt hat! Die rechnerische Instinktsicherheit NEWTONS bei den Vernachlässigungen und Korrekturen ist erstaunlich.

Mittels des allgemeinen Binomialsatzes kann nun NEWTON die Methoden von FERMAT und BARROW der Inkremente und Dekremente benutzen. Er behandelt in

seiner *Analysis* beispielsweise den Flächeninhalt z von der Grösse

$$\left(\frac{n}{m+n}\right) a\, x^{(m+n)/n}.$$

Den unendlichkleinen Zuwachs oder das schmale Rechteck $o\,y$ nennt er das Moment der Fläche, welches zum Zuwachs $x+o$ der Abszisse gehört. Den Ausdruck

$$z + o\,y = \left(\frac{n}{m+n}\right) a\,(x+o)^{(m+n)/n}$$

kann man nach dem Binomialtheorem entwickeln,

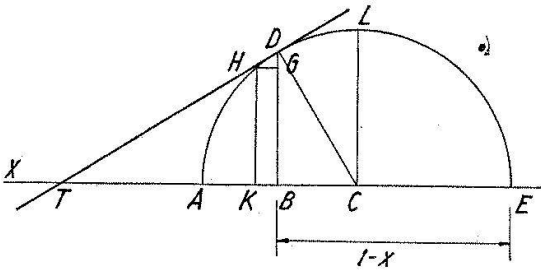
$$z + o\,y = \left(\frac{n}{m+n}\right)\left\{a\,x^{(m+n)/n} + o\,\frac{m+n}{n}\,x^{(m+n)/n-1} + o^2\binom{\frac{m+n}{n}}{2}\,x^{(m+n)/n-2} + \cdots\right\},$$

und dann durch o kürzen, sowie weiter die mit o multiplizierten restlichen Glieder streichen. Damit folgt $y = a\,x^{m/n}$ für die Kurve, welche den Flächeninhalt

$$z = \frac{n}{m+n}\,a\,x^{(m+n)/n}$$

hat; oder die Fluxion y der Fluente z hat im vorliegenden Fall den Wert $y = a\,x^{m/n}$.

NEWTON gewinnt hier das Integral $\int y\,dx$ nicht durch die infinitesimalen Streifen der archimedischen Tradition oder gar noch vermittels zusätzlicher algebraischer Kunstgriffe wie FERMAT, sondern vermittels des Begriffs der Änderung, genauer gesagt der Augenblicksveränderung (momentum) im Sinne der Tradition GALILEIS. Der Barrowsche Umkehrsatz ist dabei implizit vorausgesetzt. Während bisher der Prozess der Summation (Indivisibilienprinzip!) bei den infinitesimalen Untersuchungen der Mathematiker seit ARCHIMEDES dominierte, ist NEWTON der erste, der umgekehrt den Begriff der Derivation an die Spitze stellt. Bei der Integration stellt die Ordinate y gewissermassen die Geschwindigkeit und die Abszisse x die Zeit dar. Damit wird das Inkrement o in moderner Schreibweise das Zeitmoment dt (vgl. S. 9). Die Produkte $y\,dx$ geben nun in der Tat in der Summe den Flächeninhalt aller Elementar- oder Momentanflächen; während aber die Mathematiker bisher diese Summe irgendwie additiv zusammensetzten, gewinnt NEWTON das Integral aus der Grösse der Änderung der Fläche in einem Punkt. Obwohl NEWTON nicht bis zur letzten Klarheit über den Begriff der Änderung vorzustossen vermag, so kann er sich auf den seit GALILEI bei den Physikern vertrauten Begriff der Geschwindigkeit berufen. Wie wichtig für die praktische Ausführung der Fluxions- bzw. der Fluentenrechnung aber das Binomialtheorem ist, lehrt NEWTON am Beispiel der Rektifikation eines Kreisbogens (*Analysis*, Cap. VI). DT sei die Tangente in D, $AE = 2\,AC$ sei als Einheit genommen. Im infinitesimalen Dreieck DHG ist $HG = BK$ die Augenblicksveränderung der Basis x,



Figur 4

DH die Augenblicksveränderung des Bogens AD. Es ist nun

$$GH:HD = BT:TD = BD:DC = \sqrt{x-x^2}:\frac{1}{2} = 1:\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} = 1:\frac{\sqrt{x-x^2}}{2x-2x^2}.$$

Nun ist GH die konstante Augenblicksveränderung der Basis ($dx = \text{const}$), also ist

$$\left(\sqrt{x-x^2}\right):(2x-2x^2) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{4}x^{1/2} + \frac{3}{16}x^{3/2} + \frac{5}{32}x^{5/2} + \frac{35}{256}x^{7/2} + \cdots$$

die Augenblicksveränderung oder die Fluxion des Kreisbogens. Also ist als Fluente der gesamte Kreisbogen AD nach NEWTONS Quadraturregeln (*Analysis*, Cap. I)

$$AD = x^{1/2} + \frac{1}{6}x^{3/2} + \frac{3}{40}x^{5/2} + \frac{5}{112}x^{7/2} + \frac{35}{1152}x^{9/2} + \cdots.$$

Wie umständlich, wenn auch durch NEWTONS synthetische Kraft immer durchschlagend, jedoch die Fluxionsvorstellung operiert, erkennt man an der Bestimmung des Krümmungsradius (*Geometria analytica*, Cap. VII).

Der Krümmungsradius ist der Halbmesser des Oskulationskreises, welcher im Berührungspunkt D drei zusammenfallende Punkte hat. NEWTON geht darum von dem Schnittpunkt dreier konsekutiver Normalen aus. TD ist die Tangente, DC und dC sind konsekutive Normalen an die Kurve. Cg wird von C aus als Längeneinheit genommen. Dann besteht die Proportion

$$Cg : g\delta = BT : BD = De : de = \dot{x} : \dot{y}.$$

Setzt man nun $g\delta = z$, so folgt aus jener Proportion

$$1 : z = \dot{x} : \dot{y} \quad \text{oder} \quad z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\left(= \frac{dy}{dx}\right).$$

Nun kann man δf als Augenblicksveränderung von z, das heisst als $\dot{z}\,o$ ansehen. In dem rechtwinkligen Dreieck DdF ist $de^2 = De\,eF$. Damit ergibt sich

$$eF = \frac{de^2}{De} = \frac{\dot{y}^2 o^2}{\dot{x}\,o},$$

und es folgt für DF der Wert

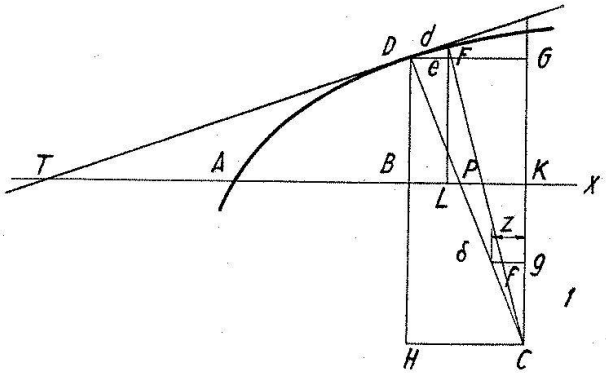
$$DF = De + eF = \dot{x}\,o + \frac{\dot{y}^2 o}{\dot{x}} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}}\,o.$$

Aus der Proportion

$$\delta f : DF = Cg : CG$$

oder

$$\dot{z}\,o : \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}}\,o = 1 : GC$$



Figur 5

erhält man für CG den Wert

$$CG = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\,\dot{z}},$$

während aus der Proportion $GD : CG = \delta g : GC$ für GD der Wert

$$DG = \frac{CG\,\delta g}{Cg} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\,\dot{z}}\,z$$

folgt. CD^2 jedoch lässt sich direkt zu

$$CD^2 = CG^2 + GD^2 = \left(\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\,\dot{z}}\right)^2 (1 + z^2)$$

bestimmen. Nimmt man nun $dx = \dot{x}\,o$ als infinitesimale Einheit $dx = 1$, so folgt $z = \dot{y}/1$. Damit wird

$$CD^2 = \left(\frac{1 + z^2}{\dot{z}}\right)^2 (1 + z^2)$$

nach NEWTON. Nimmt man die moderne Schreibweise

$$z = y' = \frac{dy}{dx}\,; \quad \dot{z} = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}\,,$$

so folgt der bekannte Ausdruck für den Krümmungsradius

$$CD = \varrho = \frac{(1 + z^2)^{3/2}}{\dot{z}} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}\,.$$

Das zitierte Werk *Artis analyticae specimina vel geometria analytica*, in welchem die Bestimmung des Krümmungsradius durchgeführt wird, wurde erstmals 1736 von J. COLSON (London) als englische Übersetzung des *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* veröffentlicht; in NEWTONS *Opera* (Edition Horsley 1779–85) wurde es unter dem obigen Titel aufgenommen. Es stellt eine Umarbeitung der *Analysis per aequationes infinitas* von 1669 dar und war schon 1671 zum Druck bestimmt; es hat dabei den Inhalt mehr als vervierfacht und ist damit für die Genesis der Newtonschen Fluxionsrechnung von grösster Wichtigkeit. CANTOR vermutet, dass eine erweiterte spätere Umarbeitung durch HUYGENS *Horologium oscillatorium* (1673) inspiriert worden sei; die infinitesimalen Probleme (Evolutentheorie!) werden dort völlig synthetisch behandelt. In der Tat beherrschen die geometrischen Einzelprobleme den Inhalt der entsprechend umbenannten *Geometria analytica*; immerhin wird dabei doch ein Ausblick auf die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen gewährt, und zwar im Anschluss an die Bildung der Fluxionen von irrationalen und impliziten Funktionen, wobei die Methode der unbestimmten Koeffizienten angewendet wird, welche dann sofort zur approximativen Lösung der Differentialgleichungen führt (Cap. IV).

So wird zunächst im Problema primum die Fluxion der impliziten Funktion

$$x^3 - a\,x^2 + a\,x\,y - y^3 = 0$$

in der Form

$$3\,x^2\,\dot{x} - 2\,a\,x\,\dot{x} + a\,y\,\dot{x} + a\,x\,\dot{y} + 3\,y^2\,\dot{y} = 0$$

gelehrt. Daraus folgt sogleich

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{2\,a\,x - 3\,x^2 - a\,y}{a\,x + 3\,y^2}\,.$$

Für die Irrationalitäten nimmt NEWTON das Beispiel

$$x^3 - a\,y^2 + \frac{b\,y^3}{a + y} - x^2\sqrt{a\,y + x^2} = 0,$$

wo man zuerst

$$\frac{b\,y^3}{a + y} = z\,; \quad x^2\sqrt{a\,y + x^2} = u$$

substituieren muss. Die ursprüngliche Gleichung lautet dann

$$x^3 - a y^2 + z - u = 0,$$

während man daneben noch die beiden anderen hat

$$a z + y z - b y^3 = 0; \quad a x^4 y + x^6 - u^2 = 0.$$

Die Fluxionen der drei Gleichungen lauten

$$a \dot{z} + y \dot{z} + z \dot{y} - 3 b \dot{y} y^2 = 0,$$

$$4 a x^3 y \dot{y} + a x^4 \dot{x} + 6 x^5 \dot{x} - 2 u \dot{u} = 0,$$

$$3 x^2 \dot{x} - 2 a y \dot{y} + \dot{z} - \dot{u} = 0.$$

Aus diesen eliminiert man z und u; dann entsteht

$$3 x^2 \dot{x} - 2 a \dot{y} y + \frac{3 b y^2 \dot{y} - z \dot{y}}{a + y} - \frac{4 a x^3 y \dot{x} + a x^4 \dot{y} + 6 x^5 \dot{x}}{2 u} = 0,$$

in welche Gleichung man nur noch die Werte für z und u rückwärts einzusetzen braucht, um die Fluxion der irrationalen Funktion zu erhalten.

Die Bildung der Fluenten aus den Fluxionsgleichungen – oder anders und moderner gesprochen: die Integration der Differentialgleichungen – nimmt NEWTON nur bei solchen Fluxionsgleichungen vor, in welchen die Fluenten nur in Quotientenform vorkommen. Hierbei unterscheidet er drei Gattungen, welche wir heute in der Gestalt der 3. Kolonne der Tabelle schreiben:

1. Gattung	2 Fluxionen + 1 Fluente	$y' = F(x)$ oder $y' = F(y)$
2. Gattung	2 Fluxionen + 2 Fluenten	$y' = F(x, y)$
3. Gattung	n Fluxionen	partielle Differentialgleichungen

Betrachten wir etwa den zweiten Fall $y' = F(x, y)$. NEWTON nimmt dafür das Beispiel

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2 + 3 x - 2 y + x^2 + x^2 y.$$

Dann macht er den Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten für y

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots.$$

Daraus folgt aber für

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + \cdots.$$

Setzt man nun den Wert für y in die erste Gleichung ein, so folgt für

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2 + 3 x + x^2 + (x^2 - 2)(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots)$$

$$= (2 - 2 A_0) + (3 - 2 A_1) x + (1 + A_0 - 2 A_2) x^2 + \cdots.$$

Andererseits ist aber

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + \cdots.$$

Also folgt durch Koeffizientenvergleich

$$A_1 = 2 - 2A_2; \quad 2A_2 = 3 - 2A_1; \quad 3A_3 = 1 + A_0 - 2A_2; \ \ldots.$$

Damit können also alle Koeffizienten durch A_0 dargestellt und die Differentialgleichung

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = 2 + 3x - 2y + x^2 + x^2 y$$

durch eine Potenzreihe integriert werden.

Die Methode der Reihenentwicklung kann er formal ganz allgemein bei der Aufgabe anwenden: Aus einer zwischen den Fluxionen von Grössen bestehenden Gleichung $M\dot{x} + N\dot{y} = 0$, wo $M(x)$ und $N(y)$ ganze rationale Funktionen in x und y sind, ist die Relation zwischen den Fluenten derselben zu bestimmen. NEWTON erhält zwar immer nur partikuläre Lösungen, da er keine Konstanten hinzufügt. Er erkennt aber, dass bei Fluxionsgleichungen zwischen mehreren Variablen willkürliche Funktionen eingeführt werden können. NEWTON hat, um die Integrationen zu erleichtern, seinem Werk einige Tafeln beigefügt, welche die Quadraturen einer Reihe von irrationalen Funktionen angeben. Eine komplette derartige Tafelsammlung gab er später in seinem Werk *De Quadratura curvarum*, welches als Anhang zu seiner *Optic* (*Optics or a treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light* [London 1704]) erschienen ist.

NEWTON scheint sich schon sehr früh, auf alle Fälle vor 1676, mit der Frage beschäftigt zu haben, wann die Integrale algebraischer Ausdrücke selber wieder algebraisch sind oder wann sie auf einfache (elementare) reduziert werden können. Für die binomischen Integrale $F(z) = \int z^{\vartheta}(e + f z^{\eta})^{\lambda}\, dz$, wo ϑ und λ gebrochene Zahlen sein können, fand er das Kriterium für die Algebraizität von $F(z)$: $(\vartheta + 1)/\eta$ oder $(\vartheta + 1)/\eta + \lambda$ müssen ganze positive Zahlen sein. Bei den trinomischen Integralen mit der Irrationalität $Z = \sqrt{e + f z^{\eta} + g z^{2\eta}}$ in den beiden Formen

$$\int z^{n\eta - 1} Z\, dz \quad \text{und} \quad \int \frac{z^{(n+1)\eta - 1}}{Z}\, dz$$

hilft er sich bei der Quadratur dadurch, dass er sie durch solche Flächenstücke ausdrückt, welche durch Abszisse, zwei Ordinaten und einen dazwischenliegenden Kegelschnittbogen begrenzt werden. Damit kann er den transzendenten Teil dieser Integrale, nämlich den Logarithmus und die zyklometrische Funktion, durch Flächenstücke beschreiben, deren analytische Bestimmung er vorher durch Reihenentwicklung schon geleistet hatte. Um aber bei den binomischen bzw. trinomischen Integralen überhaupt bis zu diesen Endformen zu gelangen, muss er sich die nötigen Reduktionen durch Rationalisierung und Ableitung von Rekursionsformeln mittels Differentiation verschaffen. Der Ausgangspunkt der Theorie der binomischen und trinomischen Integrale ist dabei die ganz allgemeine Form $\int z^{\vartheta} R^{\lambda}\, dz$ mit dem Polynom

$$R = (e + f z^n + g z^{2n} + h z^{3n} + \cdots) \qquad (n = \text{ganzzahlig}).$$

NEWTON hat also mit seinem Fluxionskalkül den wesentlichen Inhalt der speziellen Infinitesimalrechnung abgeleitet. Dass hin und wieder Versehen unterliefen, welche

später beim Prioritätsstreit eine Rolle spielen sollten, ist bei der Arbeitsweise NEWTONS, die nicht auf elegante kanonische Lehrbuchdarstellung, sondern auf die Bewältigung der Fülle der Einzelprobleme abzielte, nicht zu verwundern.

3. Newton im Prioritätsstreit mit Leibniz

Gerade diese mehr skizzenhaften Entwürfe, welche erst nach Jahrzehnten geradezu in eiliger Hast publiziert wurden, um dem wachsenden Einfluss der Leibnizschen Differentialrechnung zuvorzukommen, welche dank der eleganten Geschmeidigkeit ihrer Symbolik sich – insbesondere bei den Mathematikern des Kontinents – immer mehr durchsetzte, sollten NEWTON in einen der unerquicklichsten Prioritätsstreite verwickeln, welche die Geschichte der Wissenschaft kennt. Dieser Streit wäre überflüssig geblieben, wenn die Zeitgenossen hätten erfassen können, dass die Entdeckung des Infinitesimalkalküls bei NEWTON und bei LEIBNIZ auf verschiedenen ideengeschichtlichen Voraussetzungen beruht, so dass die genaue chronologische Fixierung der einzelnen Entdeckungen gar nicht an das Wesen derselben heranreicht. Da aber gerade jene tiefe Einsicht, welche der rückblickende Historiker gewinnen kann, den Zeitgenossen verwehrt ist, so entarteten die divergierenden Tendenzen des Physikers NEWTON und des Philosophen LEIBNIZ bei der Entdeckung eines neuen mathematischen Kalküls in einen leidigen Streit um die Oberflächensymptome einer datierten Priorität.

Es ist kein Zweifel, dass NEWTON fast 10 Jahre vor LEIBNIZ seinen Infinitesimalkalkül entdeckt hat. Aber bis zur zweiten Auflage der *Principia* (1713) hat NEWTON in einer Anmerkung (Liber II, Sect. II, Prop. VII) anerkannt, dass LEIBNIZ unabhängig von ihm zu einem ähnlichen – er hätte sagen müssen: anderen – Kalkül gekommen sei. Er schreibt: «In Briefen, welche ich vor etwa 10 Jahren mit dem sehr gelehrten Mathematiker G.W. Leibniz wechselte, zeigte ich demselben an, dass ich mich im Besitze einer Methode befände, nach welcher man Maxima und Minima bestimmen, Tangenten ziehen und ähnliche Aufgaben lösen könne, und zwar lassen sich dieselben ebensogut auf irrationale wie auf rationale Grössen anwenden. Indem ich die Buchstaben der Worte (wenn eine Gleichung mit beliebig vielen Fluenten gegeben ist, die Fluxionen zu finden und umgekehrt), welche meine Meinung aussprachen, versetzte, verbarg ich dieselbe. Der berühmte Mann antwortete mir darauf, er sei auf eine Methode derselben Art verfallen, die er mir mitteilte und welche von meiner kaum weiter abwich als in der Form der Worte und Zeichen.»

NEWTONS erste Entdeckungen zur Fluxionsrechnung gehen nachweislich bis 1665 zurück. NEWTON selbst schreibt in einem an Abbé CONTI gerichteten, aber für LEIBNIZ bestimmten Brief vom 29. Mai 1716 (*Recueil des Maiseaux* II, S. 98/99), dass zum Beispiel ein Manuskript vom 16. Mai 1666 «contient en sept Propositions une Méthode gènérale de résoudre les Problêmes qui regardent le mouvement».

NEWTON hat demnach die grundlegenden Ideen zur Fluxionenrechnung gleichzeitig mit seinen entscheidenden Gedanken zur Physik (Optik und Gravitation) in der Zeit von 1664–1666 entwickelt; diese Jahre nach der Pubertät haben offenbar NEWTONS Genius entfaltet. Es lässt sich heute nicht mehr im einzelnen feststellen, wieviel von BARROWS *Lectiones geometricae* auf das Konto seines Schülers NEWTON zu setzen ist; jedenfalls hat der Lehrer NEWTONS Erstlingswerk, die *Analysis per*

aequationes infinitas gekannt, schickte er sie doch am 10. August 1669 an COLLINS, der als Zivilingenieur Mitglied und Sekretär der Royal Society war. COLLINS äusserte sich sehr anerkennend über diese Schrift, verfertigte sich eine Kopie und gab mit Einverständnis von BARROW auch dem damaligen Präsidenten der Royal Society, dem bekannten Mathematiker Lord BROUNCKER, Kenntnis von NEWTONS Arbeit. Auch der spätere Sekretär der Royal Society (1662–1678), OLDENBURG, muss Kenntnis von NEWTONS *Analysis* gehabt haben; existiert doch ein Brief von OLDENBURG an den Lütticher Mathematiker DE SLUSE vom 24. September 1669, worin er von der allgemeinen Infinitesimalmethode NEWTONS mit Angabe der *Analysis* spricht. OLDENBURG sollte im Prioritätsstreit eine wichtige Rolle spielen; verdächtigten ihn doch später die Engländer als Partisanen seines Landsmanns LEIBNIZ. Obwohl NEWTON nichts über seine Fluxions- und Reihenlehre veröffentlichte, waren die Londoner Mathematiker in seine Methoden eingeweiht. COLLINS spielte nämlich als eine Art englischer MERSENNE zur Zeit des DESCARTES die Rolle des mathematischen Briefkastens; was er freilich ins Ausland verlauten liess, waren zumeist nur dürftige Andeutungen, und insbesondere die Mitteilungen, welche er durch OLDENBURG (16. April 1673) an LEIBNIZ über die Fortschritte der englischen Mathematiker abgehen liess, konnten nur als Literaturhinweise angesehen werden. LEIBNIZ war anlässlich seines ersten Londoner Besuches im Anfang des Jahres 1673 Mitglied der Royal Society geworden, hatte aber bei PELL wegen seiner noch ungenügenden mathematischen Einzelkenntnisse und bei HOOKE wegen eines Konstruktionsfehlers seiner Rechenmaschine Misstrauen hinterlassen. Im Verlauf eines Streites mit DE SLUSE über die Tangentenregel hatte nun NEWTON am 20. Dezember 1672 an COLLINS einen Brief gerichtet, in welchem er an Beispielen seine Tangentenmethode erläuterte. Man hat später den Verdacht geäussert, dass LEIBNIZ doch vom Inhalt dieses Briefes Kenntnis bekommen habe. Dass LEIBNIZ bei seinem zweiten Londoner Besuch 1676 bei COLLINS Einsicht in die Arbeiten NEWTONS genommen hat, ist bekannt – existiert doch in der Hannöverschen Bibliothek unter den Manuskripten LEIBNIZENS ein Heft mit den Exzerpten, welche er sich bei COLLINS angefertigt hat; LEIBNIZ hatte aber seinen Infinitesimalkalkül schon 1675 entdeckt.

Das Dickicht der gegenseitigen Geheimnistuerei, vermittelt oder vertuscht durch Dritt- und Viertpersonen, beginnt sich zu lichten, als NEWTON am 26. Juli 1676 durch OLDENBURG einen Bericht über seine mathematischen Entdeckungen an LEIBNIZ abgehen lässt. Zunächst teilt NEWTON seine allgemeine binomische Formel mit 8 Beispielen unendlicher Reihenentwicklungen mit. Dann wird das Rechenschema zur Auflösung der Gleichung $y^3 + a\,x\,y + a^2\,y - x^3 - 2\,a^3 = 0$ mit der Anwendung auf die Reihen sin und arcsin, sowie die Darstellung von $y = \sin n\,t$ als Funktion von $x = \sin t$ gegeben, ferner die Lösung der Keplerschen Gleichung, Rektifikation des Ellipsen- und Hyperbelbogens durch unendliche Reihen sowie der Flächeninhalt der Hyperbel durch die Logarithmusreihe. Weiter wird die Quadratrix quadriert und rektifiziert und schliesslich noch das Volumen des Segments des Drehellipsoids mit der Gleichung $x^2/a^2 + (y^2 + z^2)/b^2 = 1$

$$\int_0^a \int_0^b b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dx\, dy$$

in Reihenform dargestellt. Zum Schluss werden Näherungen für das Kreissegment und den Kegelschnittbogen abgeleitet.

Mit diesem Brief war OLDENBURGS Wunsch nach einer Klärung über NEWTONS Entdeckungen erfüllt, aber zugleich LEIBNIZ das Eindringen in NEWTONS Methoden verwehrt, denn es waren nur schon bekannte Resultate, nichts aber über die Fluxionsmethode als solche preisgegeben worden. Den Brief hat OLDENBURG, um ganz sicherzugehen, nicht der Post, sondern dem Breslauer Mathematiker KÖNIG nach Paris mitgegeben. LEIBNIZ erhielt ihn erst am 24. August 1676 und beantwortete ihn drei Tage später.

In seinem Antwortschreiben vom 27. August 1676 macht LEIBNIZ darauf aufmerksam, dass er zu den gleichen Resultaten auf einem anderen Wege gekommen sei; seine unendliche Reihe für

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

aus dem Jahre 1673 habe er beispielsweise mit dem Verfahren der «Transmutation» gewonnen, welches auf der Ersetzung infinitesimaler Flächenelemente durch andere beruhe. Er begnüge sich nicht, wie NEWTON, mit Entwicklungen in unendliche Reihen, sondern versuche durch eine allgemeine Transformationstheorie, welche neue Ordinaten als rationale Funktionen neuer Abszissen darzustellen vermag (Integration durch Substitution), zu exakten geometrischen Lösungen zu gelangen. Er schreibe dies offen in der Hoffnung, dass nun die Engländer mit ihren eigentlichen Infinitesimalmethoden herausrücken werden.

Besonders ein Passus musste NEWTONS Neugier erregen. LEIBNIZ schrieb nämlich: «... Wenn Ihr sagt, die meisten Schwierigkeiten liessen sich durch unendliche Reihen erledigen, so will mir das nicht recht scheinen. Vieles Wunderbare und Verwickelte hängt weder von Gleichungen noch von Quadraturen ab. So zum Beispiel die Aufgaben der umgekehrten Tangentenmethode, von welchen auch Descartes eingestand, dass er sie nicht in seiner Gewalt habe.» NEWTON war sich offenbar sogleich über die Tragweite der Leibnizschen Methoden klar, wenn diese allgemein das Debeaunesche Problem, auf das LEIBNIZ anspielte und welches noch lange als Prüfstein der Infinitesimalmethoden bis zu den BERNOULLI dienen sollte, zu lösen imstande waren. Am 26. Oktober 1676 schreibt er an OLDENBURG von LEIBNIZENS «trefflichem» Brief, unterlässt aber nicht, in einem Brief vom 8. November 1676 an COLLINS zu beteuern, dass seine eigenen Methoden keineswegs weniger allgemein und umständlicher seien. Es machte ihn aber offenbar LEIBNIZENS Bitte nach weiterer Aufklärung über die englischen Infinitesimalmethoden stutzig. Wie konnte LEIBNIZ diese Frage stellen, wenn er selber einen solchen Kalkül schon besitzt? Auch die späte Antwort LEIBNIZENS – NEWTON konnte nicht wissen, dass sein Brief erst Ende August in Paris angekommen war – nährte seinen Verdacht, dass LEIBNIZ nur die Reihenmethode nachentdeckt habe und sich mit allgemeinen Phrasen, deren philosophische Terminologie NEWTON sowieso abstiess, allgemeiner Infinitesimalmethoden rühme. Immerhin musste er sichergehen, um, ohne seine Methode zu verraten, LEIBNIZ gegenüber doch seine Priorität geltend machen zu können. So kam es zu NEWTONS zweitem Schreiben vom 24. Oktober 1676, welches OLDENBURG erst am 2. Mai 1677 absandte und das LEIBNIZ am gleichen Tag, an dem er es erhielt (1. Juli 1677), beantwortete.

NEWTON beabsichtigte in diesem Briefe wohl, sich die Priorität der Fluxionsrechnung zu sichern. Er gibt den Weg an, wie er zu seinem Binomialtheorem gekommen ist, und zeigt, dass seine Methode sich nicht an Irrationalitäten stosse, was LEIBNIZ noch vermutet hatte. Er gibt auch die allgemeine Formel für die binomischen Integrale $I_\vartheta = \int z^\vartheta (e + f z^\eta)^\lambda \, dz$ in Form der Reihe

$$\frac{z^{\vartheta+1-\eta}}{(\vartheta+1) f} (e + f z^\eta)^{\lambda+1} \left\{ \underbrace{\frac{r}{s}}_{A} - \underbrace{\frac{r-1}{s-1} \cdot \frac{e A}{f z^\eta}}_{B} + \underbrace{\frac{r-2}{s-2} \cdot \frac{e B}{f z^\eta}}_{C} + \cdots \right\},$$

worin

$$r = \frac{\vartheta+1}{\eta}; \qquad s = \frac{\vartheta+1}{\eta} + \lambda$$

ist. Er gibt keine Ableitung. LEIBNIZ hat sie sofort gefunden, denn in einer Randnote bemerkt er, man brauche nur $e + f z^\eta = w$ zu setzen und dann mittels partieller Integration umzuformen. Das heisst, modern geschrieben, die partielle Integration führt zur Reduktionsformel

$$I_\vartheta = z \frac{1}{\eta f s} z^{\vartheta+1-\eta} w^{\lambda+1} - \frac{r-1}{s} \cdot \frac{e}{f} I_{\vartheta-\eta}.$$

NEWTON bemerkt noch, dass für ganze positive r, s die Entwicklung schon nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abbricht, während sie für andere Werte bis ins Unendliche fortschreitet. Er deutet auch ein graphisches Verfahren der Integration in der Art der Simpsonschen Regel an, aber nicht nur erläutert er seine allgemeinen Fluxionsmethoden nicht, sondern stellt sie noch in der Form von Anagrammen dar.

Diese Anagramme, deren Auflösung erstmals 1712 im Commercium Epistolicum D. Johannis Collins (siehe unten) publiziert wurde, lauteten: 6*a cc d* & 13*e ff* 7*i* 3*l* 9*n* 4*o* 4*q rr* 4*s* 9*t* 12*v x* = Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire & viceversa, und weiter 5*a cc d* & 10*e ff h* 12*i* 4*l* 3*m* 1*on* 6*o qq r* 7*s* 11*t* 10*v* 3*x*: 11*a b* 3*c dd* 10*e* & *g* 10*i ll* 4*m* 7*n* 6*o* 3*p* 3*q* 6*r* 5*s* 11*t* 7*v x*, 3*a c* & 4*e gh* 6*i* 4*l* 4*m* 5*n* 8*o q* 4*r* 3*s* 6*t* 4*v*, *aadd* & *eeeeeiiimmnnoopprrrsssssttuu* = Una methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex aequatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita ex qua caetera commode derivari possunt, & in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis ad eruendos terminos assumptae seriei.

LEIBNIZ wird mit diesen Angaben wenig haben anfangen können, selbst wenn ihm die Entzifferung der Anagramme geglückt sein mag. Denn wie sollte er auf Grund dieses zweiten Briefes auf die Spur von Dingen kommen, welche er nicht schon vorher kannte? Er liess sich ja auch gar keine Zeit, neue Untersuchungen anzustellen, sondern beantwortete NEWTONS Brief postwendend und legte in aller Offenheit seine Differentialrechnung dar. Nicht aber die Integralrechnung, von der LEIBNIZ vielleicht glaubte, dass er hier nur ein neues Summensymbol für die Cavalierischen Gesamtheiten eingeführt habe. In der Tat reicht die Integration über die mehr dynamische Indivisibilenmethode der Florentiner bis zu der mehr statischen des ARCHIMEDES weit in die Antike zurück, und die Franzosen waren seit FERMAT geradezu bis zu einer neuartigen Summensymbolik für die «somme des indivisibles» vorgestossen. Der wichtigste Teil in LEIBNIZENS Brief war die direkte Auflösung des inversen Tangentenproblems mittels Differentialgleichungen statt des Newtonschen

Ansatzes mit unendlichen Reihen. Hier musste NEWTON merken, dass ihm in LEIBNIZ ein ebenbürtiger Rivale erwachsen war. LEIBNIZ hatte noch betont, NEWTONS Tangentenmethode werde vermutlich von seiner eigenen nicht abweichen. Warum aber sagt LEIBNIZ nicht offen, dass er es mit Sicherheit wisse, weil er anlässlich seines zweiten achttägigen Aufenthaltes in London (13. Oktober 1676) bei COLLINS Einsicht in NEWTONS Papiere und insbesondere in die *Analysis* genommen habe? NEWTON wusste es und musste deshalb glauben, dass LEIBNIZ ihn nur weiter ausfragen wolle, weil dieser selber offenbar noch nicht genügend weit mit seinen mathematischen Forschungen gekommen sei. Er beantwortete LEIBNIZENS Schreiben nicht mehr. Ob aus diesem Misstrauen oder aus Eifersucht, dass LEIBNIZ seine Entdeckungen unabhängig nachgefunden habe, welche Geheimnis der englischen Schule bleiben sollten, ist heute nicht mehr zu entscheiden. Die Vorgeschichte des Prioritätsstreites endet mit einem tiefen beiderseitigen Misstrauen. Auch NEWTONS offizielle Deklaration in dem berühmten Scholion der *Principia* konnte den giftigen Keim nicht mehr zum Ersticken bringen, aus welchem zwanzig Jahre später der offene Prioritätsstreit zwischen den Mathematikern des Kontinents und der englischen Schule erwachsen sollte.

Nur mit Eifersucht konnte NEWTON die Ausbreitung der nach ihm von LEIBNIZ entdeckten Differentialrechnung seit ihrer Publikation 1684 verfolgen. Insbesondere feierten die Brüder BERNOULLI Triumphe mit dem Leibnizschen Kalkül, der in NEWTONS Augen nur eine formalrechnerische Verbesserung seines eigenen darstellte. Das Problem der Brachystochrone (1696), welches die beiden BERNOULLI entzweite, sollte aber zugleich den viel umfassenderen und seit langem schwelenden Prioritätsstreit zwischen den beiden ganz grossen Heroen und Antipoden des 17. Jahrhunderts entfachen. LEIBNIZ hatte bei seiner Lösung bemerkt, das Problem der Brachystochrone sei so recht geeignet, die Vorzüge seiner Differentialrechnung ins rechte Licht zu setzen. Denn nur in dieser Bewanderte könnten die Aufgabe glatt lösen; ausser diesen traue er nur NEWTON, HUYGENS und HUDDE eine Lösung zu. NEWTON gab in der Tat eine solche ohne Beweisangabe; sie blieb die einzige synthetische Lösung, bis 1699 NICOLAS FATIO, der eine alte Rechnung mit LEIBNIZ zu begleichen hatte – beleidigt, dass man ihm keine Lösung zugetraut habe –, in seiner *Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex* ebenfalls mit einer solchen im Sinne NEWTONS an die Öffentlichkeit trat und als getreuer Knecht seines Herrn und Meisters mit Anklagen gegen LEIBNIZ am Ende des Jahrhunderts den Prioritätsstreit eröffnete, der wegen der offiziellen Stellungen NEWTONS und LEIBNIZENS in ihren Ländern zugleich einen hochpolitischen Beigeschmack erhielt. FATIO glossiert das Bemühen der Mathematiker des Leibniz-Kreises, sich gegenseitig solche Probleme aufzugeben, welche von vornherein nur auf die Methoden der Differentialrechnung zugeschnitten sind, so dass sie allein die Arena beherrschen können. Wenn aber einmal seine Korrespondenz mit HUYGENS publiziert würde, so würde man erkennen, «... dass Newton der erste und um mehrere Jahre älteste Erfinder dieses Kalküls war, denn dazu nötigt mich die Augenscheinlichkeit der Dinge. Ob Leibniz, der zweite Erfinder, etwas von jenem entlehnt hat, darüber sollen lieber andere als ich ihr Urteil abgeben, denen Einsicht in die Briefe oder sonstige Handschriften Newtons gestattet wird. Niemanden, der durchstudiert, was ich selber an Dokumenten aufgerollt habe, wird das Schweigen des allzu bescheidenen Newton oder Leibnizens vordringliche Geschäftigkeit täuschen.»

Auf diesen leidenschaftlichen Angriff FATIOS antwortete LEIBNIZ sehr ruhig in den Acta Eruditorum (1700), dass NEWTON in den *Principia* selber die Unabhängigkeit der Leibnizschen Entdeckung anerkannt habe und dass er nicht glauben könne, dass NEWTON das Vorgehen FATIOS billige. Es ist durchaus möglich, dass FATIO, der sich als schweizerischer Emigrant in England ganz der Newtonschen Partei verschrieben hatte, den Angriff ohne Wissen NEWTONS vorgetragen hat und nur sich für die etwas herabsetzende Art, mit welcher ihn LEIBNIZ vor Jahren bei HUYGENS behandelt hatte, rächen wollte. FATIO war 1688 Mitglied der Royal Society geworden und hatte 1691 HUYGENS besucht, wo er mit seinen Herabsetzungen des Leibnizschen Kalküls ein geneigtes Ohr fand, konnte sich doch HUYGENS als Kartesianer nie mit der Metaphysik des Unendlichkleinen befreunden. FATIO brüstete sich, eine Tangentenmethode zu besitzen, welche dasselbe wie LEIBNIZENS Kalkül leiste. Dabei wurde aber FATIO mit der Derivation von Wurzelgrössen nicht fertig. Möglicherweise wäre der Prioritätsstreit zum Stillstand gekommen, denn die Acta Eruditorum, gewitzigt durch den leidigen Streit zwischen den beiden BERNOULLI, weigerten sich, FATIOS Antwort zu publizieren. 1705 ging aber LEIBNIZ gelegentlich einer Besprechung der Newtonschen Optik von 1704, welcher die *Quadratura curvarum* angehängt war, mit der Behauptung, die Fluxionsrechnung NEWTONS sei nur eine andere Schreibweise der Leibnizschen Differentialrechnung, selber zum Angriff über: «Statt der Leibnizschen Differenzen benutzt nun Herr Newton, und hat er immer benutzt, Fluxionen, welche sich so nahe wie möglich wie die in gleichen kleinstmöglichen Zeitteilchen hervorgebrachten Vermehrungen der Fluenten verhalten. Er hat davon in seinen ‚Mathematischen Prinzipien der Naturlehre' und in anderen später veröffentlichten Schriften einen eleganten Gebrauch gemacht, wie auch später Honoratus Fabri in seiner ‚Synopsis Geometrica' den Fortschritt der Bewegungen an Stelle der Methode Cavalieris setzte.» Der Vergleich NEWTONS mit FABRI musste den englischen Genius kränken, obwohl sachlich LEIBNIZ nicht einmal ganz Unrecht hatte und, aus dem im übrigen wohlwollenden Ton der Rezension zu schliessen, eine Beleidigung kaum beabsichtigt war.

NEWTON selber antwortete nicht; obwohl die Rezension anonym war, wusste jedermann, dass sie von LEIBNIZ stammte. Erst 1708 liess NEWTON durch eine seiner Kreaturen, den Oxforder Professor JOHN KEILL, der gerade in diesem Jahr Mitglied der Royal Society geworden war, LEIBNIZ direkt der Fälschung zeihen. In einer Arbeit über die Gesetze der Zentralkräfte folgt ganz ohne Zusammenhang mit dem Thema ein Absatz mit den Worten: «Alle diese Dinge folgen aus der jetzt so berühmten Methode der Fluxionen, deren erster Erfinder ohne Zweifel Sir Isaac Newton war, wie das Jeder leicht feststellen kann, der jene Briefe von ihm liest, die Wallis zuerst veröffentlicht hat. Dieselbe Arithmetik wurde dann später von Leibniz in den Acta Eruditorum veröffentlicht, der dabei nur den Namen und die Art und Weise der Bezeichnung wechselte.»

Gegenüber dieser bösartigen Anschuldigung scheint LEIBNIZ von seiner gewohnten Ruhe und diplomatischem Geschick verlassen worden zu sein. Er beging – offenbar in Überschätzung seiner Position – den unverzeihlichen Fehler, seine heimlichen Feinde in eigener Sache als Richter aufzurufen. Der Band der *Philosophical Transactions 1707/08*, in welchem KEILLS Abhandlung stand, wurde erst 1710 herausgegeben. Gleich nach Einsichtnahme beschwerte sich LEIBNIZ bei HANS SLOANE, dem damaligen Sekretär der Royal Society, über die Behandlung, die er als Mitglied

von einem anderen erdulden müsse. Er nahm offenbar an, dass NEWTON und die Royal Society es nicht wagen würden, die Grobheiten KEILLS zu decken. Hier täuschte er sich aber gewaltig.

Die englischen Mathematiker – und dies hätte LEIBNIZ wissen müssen – waren gar nicht besonders gut auf ihren Kollegen LEIBNIZ zu sprechen. Ausser JOHN CRAIG (*Methodus ... quadraturas determinandi* [London 1685]) hatte sich kein Engländer mit dem Leibnizschen Kalkül abgegeben, dagegen waren schon einige Werke über den Fluxionskalkül erschienen, und zwar *Fluxionum methodus inversa* von GEORGE CHEYNE (1704), *A Treatise of Fluxions: or, an introduction to Mathematical Philosophy* von CHARLES HAYES (1704) und *Institution of Fluxions* von HUMPHRY DITTON (1706). Diese Werke wiederum waren auf dem Kontinent kaum beachtet worden. Die Beschwerde LEIBNIZENS, welche nur gegen die Person KEILLS gerichtet war, wurde zum Anlass genommen, die englische Mathematik der Fluxionen gegen die kontinentale Mathematik der Differentiale abzuwägen und zugleich NEWTON als den eigentlichen Erfinder hinzustellen, während LEIBNIZ höchstens als zweiter Entdecker, wenn nicht überhaupt nur als Nachentdecker oder gar Plagiator zu gelten habe.

Die Royal Society ernannte eine Kommission, scheinbar um LEIBNIZENS Beschwerde zu prüfen, in Wirklichkeit aber, um ihm den Prozess zu machen. NEWTON hatte dabei den Vorteil, dass er im Hintergrund bleiben und seine ihm ergebenen Klienten für sich streiten lassen konnte, während LEIBNIZ sich allein wehren musste. Es existieren Sitzungsprotokolle der Royal Society, aus denen zu entnehmen ist, dass NEWTON in der ersten Sitzung vom 22. März 1711, wo der Beschwerdebrief LEIBNIZENS verlesen wurde, über KEILLS Vorgehen ziemlich verärgert war; erst als KEILL ihn in der zweiten Sitzung vom 5. April auf LEIBNIZENS Kritik der *Quadratura curvarum* von 1704 hinwies und ihm insinuierte, dass er dort mit FABRI auf eine Stufe gestellt wurde, schien sich NEWTONS Ärger gegen LEIBNIZ gerichtet zu haben. KEILL wurde beauftragt, LEIBNIZ zu antworten. Seine Antwort vom 31. Mai 1711 war nicht nur eine Wiederholung, sondern sogar eine Verschärfung der früheren Anklagen des Plagiats. Konnten KEILL und NEWTON aber überhaupt selber an ihre Anklage glauben? NEWTON konnte aus dem Umstand, dass damals LEIBNIZ erst am 21. Juni auf seinen zweiten Brief vom 10. März 1677 geantwortet hatte, den verdächtigenden Schluss ziehen, LEIBNIZ habe in der Frist von zwei Monaten die Anagramme entziffert und auf Grund der in ihnen enthaltenen Andeutungen NEWTONS Methoden erraten und so den Differentialkalkül nacherfunden. Denn NEWTON wusste offenbar nicht, dass sein Brief von OLDENBURG verspätet abgesandt worden war.

Am 31. Januar 1712 wurde in der Royal Society LEIBNIZENS Antwort vom 29. Dezember 1711 auf den Brief KEILLS verlesen. LEIBNIZ appellierte nochmals an NEWTON, sich zu äussern, da, so gelehrt KEILL auch sein möge, er in Sachen Infinitesimalkalkül als ein Homo novus angesehen werden müsse; die Kompetenz, wie vor einem Gerichtshof zu streiten, gehe ihm daher ab.

Aber nicht NEWTON selber, sondern eine am 6. März 1712 gebildete Kommission der Royal Society gab die Antwort. In scheinbar objektiver Weise wurden die diesbezüglichen Manuskripte und Korrespondenzen NEWTONS und LEIBNIZENS vorgenommen, aber freilich in solcher Auswahl, dass bei dem unvoreingenommenen Leser der Eindruck entstehen musste, LEIBNIZ sei eine Art Plagiator. Dieses wissenschaftliche «Weissbuch» wurde in der Sitzung vom 24. April verlesen und als *Commercimu*

epistolicum D. Johannis Collins, et aliorum de Analysi promota: Jussu Societatis Regiae in lucem editum (London 1712) publiziert.

Man weiss heute, dass NEWTON nicht nur im Hintergrund die Arbeiten der Kommission geleitet, sondern sogar die Berichte mitredigiert hat. Die Mehrzahl der Kommissionsmitglieder waren keine oder nur unbedeutende Mathematiker. Die Glanznamen waren EDUARD HALLEY, BROOK TAYLOR und ABRAHAM DE MOIVRE; die übrigen nämlich, ARBUTHNOT, HILL, W. JONES, J. MACHIN, W. BURNET, F. ROBARTES, BONET und ASTON, konnten nur als Nummern zählen. Diese Kommission kam nach Prüfung der Akten zum Schluss, dass NEWTON der erste Erfinder der Infinitesimalrechnung sei und dass deshalb KEILL keinerlei unrichtige Behauptungen aufgestellt habe.

Das *Commercium epistolicum* war formell eine Anklageschrift; sie sollte aber wie eine Verurteilung LEIBNIZENS wirken. Offenbar war NEWTON von der Verlogenheit LEIBNIZENS überzeugt, sonst hätte er nicht zugelassen, dass die Anmerkungen zum *Commercium* so verfasst wurden, als sei der Beweis für LEIBNIZENS geistigen Diebstahl schon erbracht, und es sei nur noch zu illustrieren, wie weit die Verdrehungskünste LEIBNIZENS gehen, wenn einmal ein Passus folgt, der LEIBNIZ entlasten könnte.

Für NEWTON war damit der Fall erledigt. Das *Commercium epistolicum* wurde berühmten Gelehrten kostenlos zugestellt, später sogar zugunsten der Kasse der Royal Society öffentlich dem Buchhandel übergeben. Der Streit zwischen NEWTON und LEIBNIZ schlug hohe Wellen, die sogar bis zum englischen Königshaus drangen. 1715 versuchte der Oratorianerabbé CONTI zwischen LEIBNIZ und NEWTON zu vermitteln; er war es auch, der König GEORG I. von England über den Streit informierte. Es brauchte geradezu die Frage des Königs, um endlich noch einmal NEWTON zu einer Vernehmlassung zu bewegen.

In den *Remarques de Mr. le Chevalier Newton sur la lettre de Mr. Leibniz à Mr. l'Abbé Conti* vom 29. Mai 1716 stellte NEWTON ein für allemal fest: «Je ne disconviens pas que Monsieur Leibniz ne l'ait pu trouver de lui-même; mais ç'-a-été depuis moi, et on sait que les seconds Inventeurs n'ont pas de droit à l'Invention» (*Recueil des Maiseaux* II, S. 94). In dieser lapidaren Formulierung wird NEWTONS wahre Meinung offenkundig. Er beruft sich – wie auch gegenüber GREGORY – auf die harte Tatsache der historischen Priorität, welche jegliche Diskussion um eine unabhängige und andersgeartete zweite Entdeckung des Infinitesimalkalküls überflüssig macht. Der Physiker der positiven Tatsachen, der sich selbst den Weg naturphilosophischer Spekulationen über das Wesen der Gravitation mit seinen klassischen *Hypotheses non fingo* absichtlich versperrte, wollte die Metaphysik des Leibnizschen Kalküls nicht als konkurrenzfähig gelten lassen. Der Historiker wird kaum mehr entscheiden können, ob die Äusserung des 74jährigen NEWTON nur die Verhärtung zu einer durch den Verlauf des Jahrzehnte währenden Prioritätsstreites aufgezwungenen Position darstellt, oder ob sie eine prinzipielle Überzeugung von den Grundlagen des Newtonschen Fluxionskalküls verdeckt, der dabei selber aus dem neuplatonischen Dynamismus des frühen 17. Jahrhunderts erwachsen ist.

LITERATURVERZEICHNIS

D. BREWSTER, *Memoirs of the Life, Writings and Discoveries of Newton* (Edinburgh 1855).

C. I. GERHARDT, *Die Entdeckung der höheren Analysis* (Halle 1855).

F. ROSENBERGER, *Isaac Newton und seine physikalischen Prinzipien*, III. Teil: *Die Entdeckung der Analysis des Unendlichen* (Leipzig 1895).

FLORIAN CAJORI, *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse* (Chicago 1919).

L. TR. MORE, *Newton, a Biography* (New York 1934).

G. CASTELNUOVO, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna* (Bologna 1938).

J. E. HOFMANN, *Studien zur Vorgeschichte des Prioritätsstreites zwischen Leibniz und Newton um die Entdeckung der höheren Analysis*, Abh. preuss. Akad. Wiss., math.-naturw. Klasse, Jahrgang *1943*, Nr. 2.

H. W. TURNBULL, *The Mathematical Discoveries of Newton* (London 1945).

Das Bild NEWTONS auf der Titelseite stellt eine Reproduktion nach dem Gemälde von Sir GODFREY KNELLER (1646–1723) aus der Collection of the Earl of Egremont dar.

Die Unterschrift ist ein Faksimile aus dem Exemplar der *Principia mathematica* (2. Aufl. 1713) (Un. Ba. A N VI 17b), welches NEWTON JOHANN BERNOULLI persönlich geschenkt hat. Das Exemplar wurde später von den Nachkommen veräussert, kam in den Besitz von DANIEL HUBER (1768–1829), Professor der Astronomie und Direktor der Universitätsbibliothek in Basel, und von ihm schliesslich als Nachlassgeschenk endgültig in deren Bestände.

Leere Seite
Blank page
Page vide