Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 53 (1998)

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Elem. Math. 53 (1998) 79 – 85
0013-6018/98/020079-7 $ 1.50+0.20/0

© Birkhäuser Verlag, Basel, 1998

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Neue Aufgaben

Lösungen sind erbeten bis zum 10. November 1998 an:

Hansruedi Widmer, Boldistrasse 52, CH-5415 Nussbaumen

Aufgabe 1132: Man zeige: In der Primfaktorzerlegung einer ungeraden vollkommenen Zahl kommt mindestens eine der Primzahlen 3, 5, 7 nicht vor.

Horst Bergmann, Hamburg, D

Aufgabe 1133: Es seien p ein Polynom vom Grad kleiner gleich 3 und q ein Polynom vom Grad kleiner gleich 5 mit

$$\begin{aligned} p(0) &= q(0) & p(1) &= q(1) \\ p'(0) &= q'(0) & p'(1) &= q'(1) \\ q''(0) &= 0 & q''(1) &= 0\,. \end{aligned}$$

Man bestimme eine Konstante $C > 0$, so dass für alle diese Polynompaare (p, q) die Ungleichung

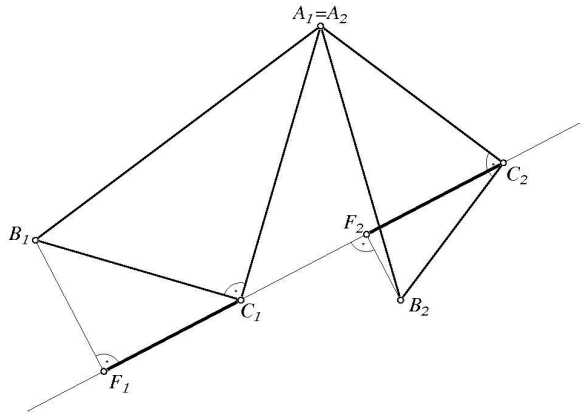
$$\int_0^1 p(t)q(t)\,dt \geq C \cdot \int_0^1 (p(t))^2\,dt$$

gilt.

Wolfgang Moldenhauer, Erfurt, D

Aufgabe 1134 (Die einfache dritte Aufgabe): Die beiden rechtwinkligen Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ seien ähnlich, und es sei $A_1 = A_2$. Für $i = 1, 2$ sei F_i der

Fusspunkt des von B_i auf die Gerade C_1C_2 gefällten Lotes. Man zeige: $\overline{C_1F_1} = \overline{C_2F_2}$.



Hans Walser, Frauenfeld, CH

Lösungen zu den Aufgaben in Heft 2, 1997

Aufgabe 1120. Wenn sich die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k \geq K} a_k x^k \quad (k,\ K \in \mathbb{N})$$

aufsummieren lässt, kann man damit auch die Potenzreihe

$$f_1(x) = \sum_{k \geq K} \frac{a_k x^k}{k+p} \quad (p \neq -k \text{ für alle } k \geq K,\ p \in \mathbb{C})$$

durch das Integral

$$f_1(x) = x^{-p} \int_0^x t^{p-1} f(t) dt$$

berechnen. Man beweise dies und leite daraus die Beziehung

$$\sum_{k \geq K} \frac{x^k}{k + \alpha(x)} = x \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha(x) \cdot t}}{e^t - x} dt \quad (-1 \leq x \leq 1,\ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+)$$

her.

Renate Golombek, Marburg, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 7 Lösungen eingetroffen, nämlich von Peter Bundschuh (Köln, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Hans Kappus (Rodersdorf, CH), Joachim Klose (Bonn, D), Dieter Koller (Zürich, CH) und Michael Vowe (Therwil, CH).

Die Aufgabenstellung enthält in ihrer letzten Gleichung eine offensichtliche Unklarheit. Anstelle von K müsste dort 1 stehen. *Peter Bundschuh*, *Frieder Grupp*, *Hans Kappus* und *Joachim Klose* haben die entsprechende Beziehung auf der rechten Seite auf eine beliebige natürliche Zahl K verallgemeinert. Ausserdem haben *Frieder Grupp* und *Joachim Klose* darauf hingewiesen, dass die an p gestellte Bedingung nicht hinreichend ist. Wir geben hier die vollständige Lösung von *Joachim Klose* wieder.

Aus der absoluten Konvergenz der Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=K}^{\infty} a_k x^k \quad (K \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\})$$

für ein Argument $x \in \mathbb{C}$ folgt nach dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz von

$$f_1(x) = \sum_{k=K}^{\infty} \frac{a_k}{k+p} x^k \quad (p \in \mathbb{C} \setminus \{-k \mid k \in \mathbb{N}_0,\ k \geq K\}) \ .$$

Insbesondere gilt nach den Resultaten über das Konvergenzverhalten von Potenzreihen: Ist

$$f(x) = \sum_{k=K}^{\infty} a_k x^k$$

absolut und kompakt konvergent für $|x| < A$ $(0 < A \leq \infty)$, so ist auch

$$f_1(x) = \sum_{k=K}^{\infty} \frac{a_k}{k+p} x^k$$

absolut und kompakt konvergent für $|x| < A$. "Kompakte Konvergenz" bedeutet dabei "gleichmässige Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge des Definitionsbereichs". Sie ist wichtig für die Vertauschbarkeit von Grenzübergängen.

Von nun an sei $A \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ derart, dass $f(x) = \sum_{k=K}^{\infty} a_k x^k$ im Bereich $|x| < A$ absolut und kompakt konvergiert. Lässt man zunächst einmal die Komplikationen beiseite, die eine allgemeine Potenzfunktion $u \mapsto u^q$ $(u \in \mathbb{C}, q \in \mathbb{C})$ wegen der Mehrdeutigkeit in sich birgt und rechnet rein formal, so ist

$$(x^p f_1(x))' = \left(\sum_{k=K}^{\infty} \frac{a_k}{k+p} x^{k+p} \right)' = \sum_{k=K}^{\infty} a_k x^{k+p-1} \ = \ x^{p-1} f(x) \ . \tag{1}$$

Formale Integration der Gleichung (1) ergibt

$$x^p f_1(x) = x^p f_1(x) - 0^p f_1(0) = \int_0^x t^{p-1} f(t) dt \ . \tag{2}$$

Diese Gleichung ist natürlich auch inhaltlich für all diejenigen Werte x und p richtig, für die (1) keine Mehrdeutigkeiten aufweist und inhaltlich richtig ist, also etwa für alle reellen x mit $0 < x < A$ und $p \in \mathbb{C}$ mit $\Re(p) > -K$. Dabei bezeichnet $\Re$ den Realteil einer komplexen Zahl, und für $x > 0$, $q \in \mathbb{C}$ ist $x^q := \exp(q \ln(x))$. Das an der unteren Grenze 0 möglicherweise uneigentliche Integral $\int_0^x t^{p-1} f(t)dt$ existiert gemäss (1) wegen

$$\int_0^x t^{p-1} f(t)dt = \lim_{r \to 0^+} \int_r^x t^{p-1} f(t)dt = \lim_{r \to 0^+} (x^p f_1(x) - r^p f_1(r)) = x^p f_1(x) \ ,$$

denn

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0^+} r^p f_1(r) &= \lim_{r \to 0^+} r^p \sum_{k=K}^{\infty} \frac{a_k}{k+p} r^k = \lim_{r \to 0^+} \left(r^p r^K \sum_{k=K}^{\infty} \frac{a_k}{k+p} r^{k-K} \right) \\ &= \left(\lim_{r \to 0^+} \exp((K+p) \cdot \ln(r)) \right) \frac{a_K}{K+p} = 0 \ , \end{aligned}$$

da wegen $K + \Re(p) > 0$ und $\ln(r) \to -\infty$ für $r \to 0^+$ die Grenzwertbeziehung $\lim_{r \to 0^+} \exp((K+p) \cdot \ln(r)) = 0$ gilt.

Es ist nun also folgendes nachgewiesen:

Ist $f(x) = \sum_{k=K}^{\infty} a_k x^k$ für $K \in \mathbb{N}_0$ im Bereich $|x| < A$ ($A \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$) absolut und kompakt konvergent, so ist $f_1(x) = \sum_{k=K}^{\infty} \frac{a_k}{k+p} x^k$ für jedes $p \in \mathbb{C} \setminus \{-k \mid k \in \mathbb{N}_0, \ k \geq K\}$ im Bereich $|x| < A$ ebenfalls absolut und kompakt konvergent; ist $\Re(p) > -K$, so gilt für jedes reelle $x \in]0, A[$

$$f_1(x) = x^{-p} \int_0^x t^{p-1} f(t)dt \ . \tag{3}$$

Bemerkung: Die Gleichung (3) ist im allgemeinen nicht richtig bei der schwächeren Voraussetzung $p \in \mathbb{C} \setminus \{-k \mid k \in \mathbb{N}_0, \ k \geq K\}$, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

ist absolut und kompakt konvergent für $|x| < 1$; für $p = -\frac{1}{2}$ ist

$$x^{-\frac{1}{2}} f_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k - \frac{1}{2}}$$

als Produkt zweier in $x \in]0, 1[$ stetiger Funktionen im Intervall $0 < x < 1$ stetig; das für $x \in]0, 1[$ uneigentliche Integral

$$\begin{aligned} \int_0^x t^{-\frac{1}{2}-1} f(t)dt &= \int_0^x t^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{1-t} dt = \int_0^x t^{-\frac{3}{2}} \cdot (1 + t + \frac{t^2}{1-t}) dt \\ &= \int_0^x t^{-\frac{3}{2}} dt + \int_0^x t^{-\frac{1}{2}} dt + \int_0^x t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t} dt \end{aligned}$$

existiert nicht, da

$$\int_0^x t^{-\frac{3}{2}} dt = -2t^{-\frac{1}{2}}\Big|_0^x$$

nicht existiert.

Gleichung (3) lässt sich durch die Substitution $u := \frac{t}{x}$ folgendermassen umformen:

$$f_1(x) = x^{-p} \int_0^1 (xu)^{p-1} f(xu) d(xu) = x^{-p} \int_0^1 x^p u^{p-1} f(xu) du = \int_0^1 u^{p-1} f(xu) du \ .$$

Wählt man hier für die Potenz u^{p-1} die in $|u-1| < 1$ konvergente binomische Reihe

$$u^{p-1} = (1 + (u-1))^{p-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p-1}{n} (u-1)^n \ ,$$

so erkennt man wie oben, dass das an der unteren Grenze 0 möglicherweise uneigentliche Integral $\int_0^1 u^{p-1} f(xu) du$ für $\Re(p) > -K$ existiert. Darüber hinaus darf für jedes *komplexe* $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < A$ wegen der kompakten Konvergenz von $u \mapsto f(xu)$ in $[0,1]$ (für diese u ist $|xu| = |x||u| \leq |x| < A$) und wegen $K + \Re(p) > 0$ Integration und Summation vertauscht werden:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{p-1} f(xu) du &= \int_0^1 u^{p-1} \sum_{k=K}^{\infty} a_k x^k u^k du = \sum_{k=K}^{\infty} a_k \left(\int_0^1 u^{k+p-1} du \right) x^k \\ &= \sum_{k=K}^{\infty} a_k \left[\frac{u^{k+p}}{k+p} \right]_0^1 x^k = \sum_{k=K}^{\infty} \frac{a_k}{k+p} x^k = f_1(x) \ . \end{aligned}$$

Dies bedeutet: Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < A$ und alle $p \in \mathbb{C}$ mit $\Re(p) > -K$ gilt

$$f_1(x) = \int_0^1 u^{p-1} f(xu) du \ . \tag{4}$$

Sei nun $K \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ eine Funktion derart, dass $\alpha(x) > -K$ für alle $x \in [-1,1]$ (d. h. $\alpha(x)$ ist strikt grösser als Null, falls $K = 0$, und grösser oder gleich Null, falls $K \geq 1$).

Die Reihe $F(x) = \sum_{k=K}^{\infty} \frac{x^k}{k+\alpha(x)}$ ist für alle $x \in]-1,1[$ absolut konvergent und im Intervall $]-1,1[$ kompakt konvergent, was man durch den Vergleich mit der geometrischen Reihe als Majoranten einsieht. In $x = +1$ divergiert die Reihe nach dem Integralkriterium, denn $\int_1^{\infty} \frac{1}{t+\alpha(1)} dt = \ln(t + \alpha(1))|_1^{\infty}$ existiert nicht. In $x = -1$ ist die Reihe nach dem Leibnizschen Kriterium zur Konvergenz alternierender Reihen konvergent, aber — wie wiederum das Intergralkriterium zeigt — nicht absolut konvergent. Für $x \in]-1,1[$ gilt mit (4) (wobei $p = \alpha(x)$) sowie $f(x) = \sum_{k=K}^{\infty} x^k = \frac{x^K}{1-x}$ und $f_1(x) = F(x)$

$$F(x) = \int_0^1 u^{\alpha(x)-1} \frac{(xu)^K}{1-xu} du = x^K \int_0^1 u^{\alpha(x)-1} \frac{u^K}{1-xu} du \ .$$

Das Integral

$$\int_0^1 \frac{u^{K+\alpha(x)-1}}{1-xu}du$$

geht durch die Substitution $u := e^{-t}$ über in

$$\int_\infty^0 \frac{e^{-t(K+\alpha(x)-1)}}{1-xe^{-t}}(-e^{-t})dt = \int_0^\infty \frac{e^{-(K+\alpha(x)-1)t}}{e^t(1-xe^{-t})}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-(K+\alpha(x)-1)t}}{e^t-x}dt\ .$$

Also gilt für jedes $x \in\ ]-1,1[$

$$\sum_{k=K}^\infty \frac{x^k}{k+\alpha(x)} = x^K \int_0^\infty \frac{e^{-(K+\alpha(x)-1)t}}{e^t-x}dt\ .$$

In der Aufgabenstellung ist nur für den Fall $K = 1$ die korrekte Gleichung angegeben.

Aufgabe 1121. Für ganzzahliges $n = 0, 1, \ldots$ und reelles x mit $0 < x \neq 1$ sei

$$f_n(x) := \left(\frac{x^2-x}{\ln x}\right)^{n+1}.$$

Man zeige, dass gilt

$$\lim_{x\to 1} f_n^{(n)}(x) = (n+2)^n,$$

wobei $f_n^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung der Funktion $f_n(x)$ ist.

Friedhelm Götze, Jena, D

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 6 Lösungen eingetroffen: Peter Bundschuh (Köln, D), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), Chr. A. Meyer (Bern, CH), Michael Vowe (Therwil, CH), Roland Wyss (Flumenthal, CH). Im folgenden die Lösung nach *Peter Bundschuh*, *Chr. A. Meyer* und *Roland Wyss*: Wir betrachten die in der rechten Halbebene $H_+ := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\zeta > 0\}$ holomorphe Funktion

$$F_n(\zeta) := \left(\frac{\zeta(\zeta-1)}{\operatorname{Log}\zeta}\right)^{n+1},$$

wobei Log den Hauptwert des komplexen Logarithmus bedeutet. Klar ist $F_n(x) = f_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$, wobei man an der Stelle $x = 1$ die Formel im Sinne der Regel von de l'Hôpital zu interpretieren hat. Mit Hilfe der Cauchyschen Formel für die Ableitungen erhält man

$$F_n^{(n)}(1) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{K_\varepsilon(1)} \left(\frac{\zeta}{\operatorname{Log}\zeta}\right)^{n+1} d\zeta, \tag{1}$$

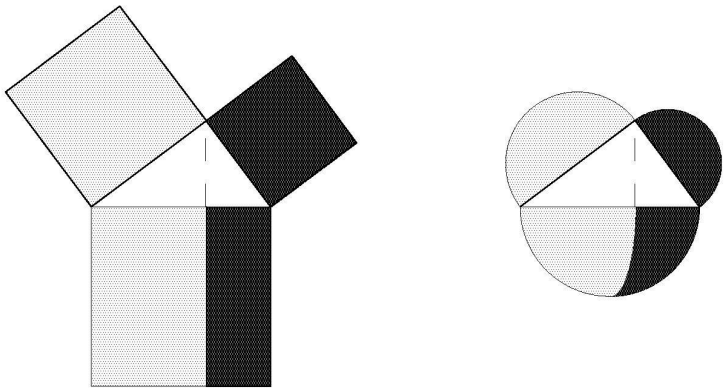
wenn $K_\varepsilon(1)$ bei festem $\varepsilon \in]0,1[$ den einmal positiv umlaufenen Kreis $|\zeta - 1| = \varepsilon$ bedeutet. Nun bildet die Abbildung $\zeta \mapsto z = \operatorname{Log}\zeta$ die Halbebene H_+ konform auf den

Parallelstreifen $P := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\mathrm{Im} z| < \pi/2\}$ der z-Ebene ab und gleichzeitig den Kreis $K_\varepsilon(1)$ auf eine geschlossene, in P verlaufende Jordankurve C mit dem Nullpunkt im Inneren ab. Daher folgt aus (1)

$$F_n^{(n)}(1) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{e^{(n+2)z}}{z^{n+1}} dz = \left(\frac{d}{dz}\right)^n e^{(n+2)z}\Big|_{z=0} = (n+2)^n,$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Aufgabe 1122 (Die einfache dritte Aufgabe). Bei der Aufgabe ging es darum, den Kathetensatz auf Halbkreise zu verallgemeinern, die über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes errichtet sind.

Hans Walser, Frauenfeld, CH

Auswertung der eingesandten Lösungen. Es sind 12 Lösungen eingetroffen: Walter Burgherr (Rothenburg, CH), Hans Dirnböck (Klagenfurt, A), Johannes M. Ebersold (Winterthur, CH), Hans Egli (Zürich, CH), Enrico Felice (Zürich, CH), Albert Ghenzi (Zürich, CH), Frieder Grupp (Schweinfurt, D), Walther Janous (Innsbruck, A), J. Schaer (Calgary, Canada), Volkhard Schindler (Berlin, D), Siegfried Sellmayr (München, D), Michael Vowe (Therwil, CH). *J. Schaer* sandte als kürzeste Antwort die folgende Figur mit einer Viertelsellipse: