

Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **25 (1970)**

Heft 1

PDF erstellt am: **02.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Aufgaben

Aufgabe 589. In einer Ebene sind drei Kreisbüschel gegeben. Man konstruiere drei zueinander orthogonale Kreise, von denen jeder einem dieser Büschel angehört.

C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Es seien M_1, M_2 die Mittelpunkte zweier orthogonalen Kreise, von denen der eine dem Büschel $\mathfrak{B}_1$, der andere dem Büschel $\mathfrak{B}_2$ angehört. M_1 und M_2 beschreiben projektiv aufeinander bezogene Punktreihen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ auf den Büschelachsen. Dasselbe gilt von den Mittelpunkten M_2 und M_3 , bzw. M_3 und M_1 für orthogonale Kreise der Büschel $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ bzw. $\mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_1$. Damit wird auch eine Projektivität von $\mathfrak{H}_1$ auf sich induziert. Genau die Doppelpunkte dieser letzteren sind die Mittelpunkte derjenigen Kreislinien von $\mathfrak{B}_1$, zu welchen je eine Kreislinie aus $\mathfrak{B}_2$ und aus $\mathfrak{B}_3$ so gefunden werden können, dass die drei Kreislinien zueinander orthogonal sind.

Eine weitere Lösung sandte W. VINZENZ (München), welcher u. a. bemerkt, dass auch im Falle von lauter reellen Grundpunkten der Büschel keine Lösung zu existieren braucht.

Aufgabe 590. Gegeben sind die Ausdrücke

$$A_n = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \quad \text{und} \quad B_n = \frac{2}{(n+1)!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}.$$

Man zeige $A_n = B_n = n$ für $n = 0, 1, 2, \dots$

I. PAASCHE, München

Anmerkung der Redaktion: Mit Rücksicht auf $(n-1)!$ versagt der Formelausdruck für A_n im Falle $n = 0$.

1. *Lösung:* Für $n \geq 1$ ist bekanntlich $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!$ (vgl. etwa E. NETTO,

Lehrbuch der Combinatorik, Teubner Leipzig/Berlin 1927, p. 249, (17)), daher $A_n = n$ ($n \geq 1$). Unter Verwendung geläufiger Eigenschaften der Binomialkoeffizienten ergibt sich die Rekursionsbeziehung (*) $(n+1) B_n = n B_{n-1} + 2 A_n$ ($n \geq 1$). Trivialerweise gilt $B_0 = 0$, und die Induktionsannahme $B_{n-1} = n-1$ führt mit (*) und $A_n = n$ unmittelbar zu $B_n = n$.

D. SVRTAN, Zagreb

2. *Lösung:* Die STIRLING-Zahlen zweiter Art $S(m, n)$ sind durch die Rekursionsformel $S(m+1, n) = S(m, n-1) + n S(m, n)$ mit $S(0, 0) = 1$ gegeben (vgl. J. RIORDAN, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley New York 1958, Seite 33), woraus man leicht die Identität $\sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m = n! S(m, n)$ erhält. Für $n > 0$ ist daher $A_n = n! S(n, n)/(n-1)! = n$ und $B_n = 2n! S(n+1, n)/(n+1)! = 2n(n+1)/2(n+1) = n$, da aus der obigen Rekursionsformel $S(n+1, n) = n(n+1)/2$ folgt. Trivialerweise ist $B_0 = 0$.

H. SCHEID, Mainz

Weitere Lösungen sandten G. BACH (Braunschweig), A. BAGER (Hjørring), H. BRÄNDLI (Zürich), W. BÜHLER (Berkeley, USA), P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.), L. CARLITZ (Durham, USA), J. FEHÉR (Pécs, Ungarn; 2 Lösungen), F. GÖTZE (Jena), M. S. KLAMKIN (Dearborn, USA), R. KOCH (München), Z. M. MITROVIĆ (Vranje), J. RÄTZ (Bern), O. REUTTER (Ochsenhausen).

Aufgabe 591. Für welche reellen Zahlen α gilt die Implikation

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \dots = \sum_{i=1}^n x_i^n = \alpha \Rightarrow (\forall r \in \mathbb{N}) \sum_{i=1}^n x_i^{n+r} = \alpha,$$

wobei x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) reelle Zahlen sind?

D. VELJAN, Zagreb

First solution: Put

$$f(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n.$$

By Newton's identities we have

$$s_k + c_1 s_{k-1} + \cdots + c_{k-1} s_1 + k c_k = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad (*)$$

$$s_k + c_1 s_{k-1} + \cdots + c_{n-1} s_{k-n+1} + c_n s_{k-n} = 0 \quad (k > n), \quad (**)$$

where

$$s_k = x_1^k + \cdots + x_n^k.$$

Since $s_1 = \cdots = s_n = \alpha$, it follows from (*) that $c_1 = -\alpha$, $c_2 = \binom{\alpha}{2}$, $c_3 = -\binom{\alpha}{3}$ and generally $c_k = (-1)^k \binom{\alpha}{k}$. Indeed assuming that this formula holds up to and including the value $k < n$, we have from (*)

$$(k+1) c_{k+1} = -\alpha \left\{ 1 - \alpha + \binom{\alpha}{2} - \cdots + (-1)^k \binom{\alpha}{k} \right\} = -\alpha \cdot (-1)^k \binom{\alpha-1}{k},$$

so that $c_{k+1} = (-1)^{k+1} \binom{\alpha}{k+1}$.

In the next place, by (**), if $s_k = \alpha$ for $k = n+1, n+2, \dots$, we have

$$\alpha (1 + c_1 + \cdots + c_n) = 0.$$

Then, as above, $\binom{\alpha}{n+1} = 0$, so that $\alpha = 0, 1, \dots, n$.

Conversely let $\alpha = r$, where $0 \leq r \leq n$. Then

$$f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} x^{n-k} = x^{n-r} (x-1)^r.$$

Thus by properly numbering the x_j we have

$$x_1 = \cdots = x_r = 1, \quad x_{r+1} = \cdots = x_n = 0.$$

L. CARLITZ, Durham (USA)

Second solution: Anwendung von Theorem 2 der Arbeit M. S. KLAMKIN and D. J. NEWMAN, *Uniqueness Theorems for Power Equations*, welche in dieser Zeitschrift erscheinen wird.

Weitere Lösungen sandten G. BACH (Braunschweig), A. BAGER (HJØRRING), C. BINDSCHIEDLER (Küsnacht), J. FEHÉR (Pécs, Ungarn), O. REUTTER (Ochsenhausen), D. SVRTAN (Zagreb), W. VINZENZ (München).

Aufgabe 592. Für $k = 1, 2, \dots$ bezeichne $(n, m)_k$ den grössten gemeinsamen Teiler von n und m der Potenz k , $\sigma_s(k, m)$ die Teilerfunktion

$$\sigma_s(k, m) = \sum_{td^k = m} t^s$$

und $c_n^{(k)}(m)$ die verallgemeinerte Ramanujansche Summe

$$c_n^{(k)}(m) = \sum_{\substack{r=1 \\ (r, n^k)_k = 1}}^{n^k} e^{2\pi i r m / n^k}.$$

Man beweise die für $R(s) > 1/k$ gültige Darstellung

$$\sigma_{s-1}(k, m) = \zeta(k, s) m^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)}(m) n^{-ks},$$

worin ζ die Riemannsche Zetafunktion bedeutet.

E. KRÄTZEL, Jena

Lösung: Wir setzen $f^{(k)}(d, m) = f^{(k)}(d) = d^k$, falls $d^k | m$ und $= 0$, falls $d^k \nmid m$; ferner werde wie üblich $e(x) = e^{2\pi i x}$ definiert. Dann ist

$$\sum_{d|n} c_d^{(k)}(m) = \sum_{d|n} \sum_{\substack{r=1 \\ (r, d^k)_k = 1}}^{d^k} e\left(\frac{r m}{d^k}\right) = \sum_{q=1}^{n^k} e\left(\frac{q m}{n^k}\right). \quad (1)$$

Zu jedem festen q mit $1 \leq q \leq n^k$ existiert nämlich genau ein d' mit $d' | n$ derart, dass $d'^k | q$ und $(q, n^k)_k = d'^k$. Setzt man $q = d'^k r$ und $n/d' = d$, so existiert also zu jedem q mit $1 \leq q \leq n^k$ genau ein r mit $1 \leq r \leq d^k$ und $(r, d^k)_k = 1$. Die Umkehrung überlegt man genauso leicht. Die Summe rechts in (1) ist gleich n^k , falls $n^k | m$ und gleich 0, falls $n^k \nmid m$; also ist

$$f^{(k)}(n) = \sum_{d|n} c_d^{(k)}(m). \quad (*)$$

Wendet man hierauf die Möbiussche Umkehrformel an, so folgt

$$c_n^{(k)}(m) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f^{(k)}(d)$$

und dies liefert dann

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)}(m) n^{-ks} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-ks} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f^{(k)}(d) = \sum_{d'=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d') d'^{-ks} f^{(k)}(d) d^{-ks} \\ &= \sum_{d'=1}^{\infty} \mu(d') d'^{-ks} \sum_{d=1}^{\infty} f^{(k)}(d) d^{-ks}. \end{aligned} \quad (2)$$

Der erste Faktor rechts ist bekanntlich $(\zeta(k, s))^{-1}$ für $\operatorname{Re}(s) < 1/k$; der zweite berechnet sich zu

$$\sum_{d=1}^{\infty} f^{(k)}(d) d^{-ks} = \sum_{\substack{d \\ d^k | m}} d^{k(1-s)} = m^{1-s} \sum_{\substack{t \\ t \cdot d^k = m}} t^{s-1} = m^{1-s} \sigma_{s-1}(k, m).$$

Trägt man die letzten beiden Ergebnisse in (2) ein und löst nach $\sigma_{s-1}(k, m)$ auf, so erhält man das behauptete Resultat.

P. BUNDSCHUH, Freiburg i. Br.

Eine weitere Lösung sandte H. SCHEID (Mainz), welcher für die Herleitung der Beziehung (*) auf einen Artikel von E. COHEN (Duke Math. J. 16, 85–90 (1949)) hinweist.

Neue Aufgaben

Aufgabe 614. Wird

$$e_n(m) = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{(k+m)(k+m+1)\dots(k+2m)} \quad (m \geq 0 \text{ ganz})$$

als reduzierter Bruch dargestellt und ist $\alpha_n(m)$ der Exponent von 2 in der Primzahlpotenzzzerlegung des Zählers, so gilt für jedes m

$$\alpha_n(m) \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

(Aufgabe 551 behandelte den Fall $m = 0$).

E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

Aufgabe 615. Prove the inequalities

$$n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \sqrt[n]{(n+1)!} \geq 1 + \sqrt[n]{n!}, \quad \sqrt[n]{(n+1)!!} \geq 1 + \sqrt[n]{n!!}$$

where $n!! = 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot n!$.

Ž. MITROVIĆ, Vranje (Yugoslavia)

Aufgabe 616. Show that for $m > 3$ the Diophantine equation

$$x^{2^m-2} + y^{2^m-2} = p z^{2^m-2}$$

has no solution with coprime integers x, y, z if $p \equiv 1$ or $2 \pmod{2^m}$.

J. M. GANDHI, Edmonton (Canada)

Aufgabe 617. Démontrer que pour tout nombre naturel m il existe au moins un nombre triangulaire qui est, de m façons au moins, une somme de deux nombres triangulaires.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Literaturüberschau

Introduction to Analytic Number Theory. Von K. CHANDRASEKHARAN. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 148. 140 Seiten mit 4 Figuren. DM 28,-. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg und New York 1969.

Die ersten vier Kapitel dieses aus einer Vorlesung an der ETH hervorgegangenen Buches sind der elementaren Zahlentheorie gewidmet (Primfaktorzerlegung, Kongruenzen, Rationale Approximationen von Irrationalzahlen (Satz von Hurwitz), Quadratische Reste, Summen von zwei und vier Quadraten). Die analytischen Methoden setzen im 5. Kapitel beim Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes ein, das aus einer (mit komplexer Integration gewonnenen) Reziprozitätsformel für verallgemeinerte Gauss'sche Summen hergeleitet wird. Nur reelle Analysis ist notwendig für die Untersuchung der arithmetischen Funktionen und ihrer summatorischen Funktionen (6. Kapitel) sowie für die elementare Theorie der Primzahlverteilung (Satz von Chebyshev, Bertrandsche Vermutung, Formeln von Euler und Mertens) im 7. Kapitel. Kapitel 8 behandelt Sätze von Weyl und Kronecker über Gleichverteilung mod 1. Kapitel 9 enthält einen Beweis von Siegel für den Satz von Minkowski über Gitterpunkte in konvexen Bereichen. Die komplexe Funktionentheorie kommt in den letzten beiden Kapiteln beim Beweis des Dirichletschen Satzes über die arithmetische Progression und des Primzahlsatzes nochmals zur Anwendung.

Dieses sorgfältig und klar abgefasste Werk bietet die willkommene Möglichkeit, sich von berufenster Hand in klassische Gebiete von unvergänglicher Schönheit einführen zu lassen.

E. TROST