Comment. Math. Helvetici **53** (1978) 651–659 Birkhäuser Verlag, Basel

Ein Verzerrungssatz für schlichte Funktionen

VON CHRISTIAN BLATTER

1. Das Folgende ist ein Beitrag zur Theorie der schlichten analytischen Funktionen $f: D \to \mathbf{C}$, $D := \{z \mid |z| < 1\}$. Die Menge dieser Funktionen bezeichnen wir mit $\tilde{S}$, die Menge der normierten $(f(0) = 0, f'(0) = 1)$ derartigen Funktionen wie üblich mit S. Die Funktionen $f \in S$ genügen dem sogenannten *Koebeschen Verzerrungssatz*:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \quad \forall z \in D, \tag{1}$$

siehe z.B. [4], S. 21. Diese Ungleichungen sind natürlich für Schlichtheit nicht hinreichend, anderseits aber scharf: Für die *Koebe-Abbildung*

$$k(z) := \frac{z}{(1-z)^2} \tag{2}$$

und $z \leq 0$ $(z \geq 0)$ gilt in (1) links (rechts) das Gleichheitszeichen. Wir beweisen eine Ungleichung für Funktionen $f \in \tilde{S}$, die im Gegensatz zu (1) zwei freie Variable enthält. Sie liefert den Mindestabstand der Punke $f(z_0)$ und $f(z_1)$, wenn $f'(z_0)$ und $f'(z_1)$ gegeben sind, und stellt eine notwendige und hinreichende Bedingung für Schlichtheit dar.

SATZ. *Für beliebiges $f \in \tilde{S}$ und beliebige Punkte z_0, $z_1 \in D$ gilt*

$$|f(z_0) - f(z_1)|^2 \geq \frac{\sinh 2\rho}{8 \cosh 4\rho} \sum_{i=0,1} (1-|z_i|^2)^2 \, |f'(z_i)|^2, \tag{3}$$

dabei bezeichnet ρ den hyperbolischen abstand von z_0 und z_1. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn f zur Abbildung (2) *konform äquivalent ist und z_0, z_1 auf der Symmetrieachse von f liegen.*

Vom geometrischen Gehalt einmal abgesehen ist für allfällige Anwendungen dieser Ungleichung auf Koeffizientenprobleme der folgende Umstand von Bedeutung (vgl. die Ergebnisse von FitzGerald [1]): Schreibt man (3) in der Form

$$\Psi(f, z_0, z_1) \geqslant 0,$$

so ist Ψ eine hermitisch-quadratische Funktion des Koeffizientenvektors von f und wegen

$$\operatorname{tgh} \rho = \left| \frac{z_0 - z_1}{1 - \bar{z}_0 z_1} \right|$$

eine reell-analytische Funktion der Variablen z_0, $z_1 \in D$.

2. Es sei $f \in \tilde{S}$, und es seien z_0, z_1 zwei beliebige Punkte in D. Die Verbindungsstrecke σ_{01} der Bildpunke $f(z_0)$ und $f(z_1)$ liegt entweder ganz in $f(D)$ oder nicht. Im ersten Fall (=: I) ist ihr Urbild ein analytischer Bogen γ_{01} in D von endlicher Länge $2L$, im zweiten Fall (=: II) enthält $f^{-1}(\sigma_{01})$ wenigstens zwei analytische Bögen γ_0 und γ_1, die von z_0 bzw. z_1 ausgehend bis zum Rand von D laufen und damit beide unendliche hyperbolische Länge besitzen. Es sei $\gamma: s \mapsto z(s)$ einer der erwähnten Bögen in D, bezogen auf die hyperbolische Bogenlänge, und

$$\sigma: \; s \mapsto w(s) := f(z(s)) \tag{4}$$

der Bildbogen in der w-Ebene. Wir schreiben

$$\dot{w}(s) =: \lambda(s) e^{i\Theta(s)}; \tag{5}$$

dabei ist $\Theta(s)$ bei den hier gemachten Annahmen konstant, und $\lambda(s) > 0$ stellt den lokalen Streckungsfaktor von der hyperbolischen Metrik im Punkt $z := z(s) \in D$ zur euklidischen Metrik im Punkt $f(z) \in \mathbf{C}$ dar. Für den Abstand der Punkte $f(z_0)$ und $f(z_1)$ erhalten wir damit im Fall I:

$$\Delta := |f(z_0) - f(z_1)| = \int_{-L}^{L} \lambda(s)\, ds$$

und im Fall II:

$$\Delta \geqslant \int_{\gamma_0} \lambda(s)\, ds + \int_{\gamma_1} \lambda(s)\, ds. \tag{6}$$

3. Ueber die Funktion λ bzw. $u := \log\lambda$ werden wir in den Abschnitten 6 und 7 folgendes beweisen:

$$|\dot{u}(s)| \leq 4 \quad \forall s, \tag{7}$$

$$\ddot{u}(s) \leq 2(16 - \dot{u}^2(s)) \quad \forall s. \tag{8}$$

Wir wenden uns zunächst dem Fall I zu und beginnen mit dem folgenden

LEMMA. *Die Funktion* $u : [-L, L] \to \mathbf{R}$ *genüge den Bedingungen* (7) *und* (8). *Dann gibt es eine Lösung* u_* *der Differentialgleichung*

$$\ddot{y} = 2(16 - \dot{y}^2), \tag{9}$$

die an den Stellen $\pm L$ *dieselben Werte annimmt wie* u, *und es gilt*

$$u(s) \geq u_*(s) \quad \forall s \in [-L, L]. \tag{10}$$

Beweis. Wegen (7) gilt jedenfalls

$$-8L \leq u(L) - u(-L) \leq 8L, \tag{11}$$

und die Grenzfälle treten nur auf, falls $\dot{u}(s) \equiv \pm 4$. Die Funktionen

$$y(s) := \tfrac{1}{2} \log(\cosh 8s + \tau \sinh 8s) + c, \quad \tau \in [-1, 1], c \in \mathbf{R}, \tag{12}$$

sind Lösungen der Differentialgleichung (9). Eine kurze Rechnung liefert

$$y(L) - y(-L) = \operatorname{artgh}(\tau \operatorname{tgh} 8L);$$

durch geeignete Wahl von $\tau \in [-1, 1]$ lässt sich daher der angeschribenen Differenz jeder Wert im Intervall $[-8L, 8L]$ erteilen. Wegen (11) folgt hieraus die Existenz einer Funktion u_*, die das angegebene Randwertproblem löst.

In den Grenzfällen $\dot{u}(s) \equiv \pm 4$ wird $\tau = \pm 1$ und $u_*(s) \equiv u(s)$. Die Ungleichung (10) ist dann trivialerweise erfüllt. Im allgemeinen Fall ist $|\tau| < 1$, und mit $\tau =: \operatorname{tgh} c'$, $c' \in \mathbf{R}$, erhält man aus (12):

$$\dot{u}_*(s) = 4 \operatorname{tgh}(8s + c'),$$

wir dürfen daher für den Rest des Beweises

$$|\dot{u}_*(s)| < 4 \quad \forall s \in [-L, L]$$

annehmen. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $s_0 \in [-L, L]$ mit $\dot{u}(s_0) = \dot{u}_*(s_0)$. Wir zeigen zunächst:

$$\dot{u}(s) \leqslant \dot{u}_*(s) \quad \forall s \in [s_0, L]. \tag{13}$$

Widrigenfalls sei

$$s_1 := \inf\{s \geqslant s_0 \mid \dot{u}(s) > \dot{u}_*(s)\}.$$

Dann ist

$$\dot{u}(s_1) = \dot{u}_*(s_1) \in]-4, 4[. \tag{14}$$

Wegen (8) gilt in einer geeigneten Umgebung $U_\delta(s_1)$:

$$\frac{\ddot{u}(t)}{2(16-\dot{u}^2(t))} \leqslant 1 = \frac{\ddot{u}_*(t)}{2(16-\dot{u}_*^2(t))}$$

und somit für $s \in [s_1, s_1+\delta[$:

$$\operatorname{artgh} \frac{\dot{u}}{4}\bigg|_{s_1}^{s} \leqslant \operatorname{artgh} \frac{\dot{u}_*}{4}\bigg|_{s_1}^{s}.$$

Wegen (14) folgt hieraus $\dot{u}(s) \leqslant \dot{u}_*(s)$ für alle s unmittelbar rechts von s_1, im Widerspruch zur Definition von s_1. Aus (13) folgt: $u - u_*$ ist im Intervall $[s_0, L]$ monoton fallend. Wegen $u(L) = u_*(L)$ ist daher $u(s) \geqslant u_*(s)$ für alle $s \in [s_0, L]$. —Analog schliesst man für das Teilintervall $[-L, s_0]$. q.e.d.

4. Nach dem beim Beweis des Lemmas Gesagten ist

$$\Delta = \int_{-L}^{L} \lambda(s)\, ds \geqslant \int_{-L}^{L} \lambda_*(s)\, ds \tag{15}$$

mit

$$\lambda_*(s) = C(\cosh 8s + \tau \sinh 8s)^{1/2},$$

wobei die Parameter C und τ so zu wählen sind, dass gilt:

$$\lambda_*(-L)=\lambda(-L)=:\lambda_0, \quad \lambda_*(L)=\lambda(L)=:\lambda_1.$$

Setzt man $\lambda_0^2+\lambda_1^2=:R^2$, so ergibt sich folgende Bedingung für C:

$$2C^2\cosh 8L=R^2.$$

Damit erhalten wir anstelle von (15):

$$\Delta \geqslant \frac{R}{\sqrt{2\cosh 8L}}\int_{-L}^{L}(\cosh 8s+\tau\sinh 8s)^{1/2}\,ds. \tag{16}$$

Wir bezeichnen das Integral rechter Hand mit $B(\tau)$. Wegen

$$B''(\tau)=-\tfrac{1}{4}\int_{-L}^{L}\frac{\sinh^2 8s}{(\cosh 8s+\tau\sinh 8s)^{3/2}}\,ds<0 \quad (-1\leqslant\tau\leqslant 1)$$

nimmt $B(\tau)$ auf $[-1, 1]$ das Minimum in den Punkten $\tau:=\pm 1$ an, und man erhält

$$B(\tau)\geqslant\int_{-L}^{L}(\cosh 8s+\sinh 8s)^{1/2}\,ds=\tfrac{1}{2}\sinh 4L \quad (-1\leqslant\tau\leqslant 1).$$

Wird dies in (16) eingesetzt, so folgt schliesslich

$$\Delta^2\geqslant\frac{\sinh^2 4L}{8\cosh 8L}R^2, \tag{17}$$

und zwar gilt das Gleichheitszeichen nur im Fall $\tau=\pm 1$, d.h. $\dot{u}(s)\equiv\pm 4$. Wir notieren noch:

$$\frac{\sinh^2 4L}{8\cosh 8\mathrm{L}}\nearrow\frac{1}{16} \quad (\mathrm{L}\to\infty).$$

Nun war ja $2L$ die hyperbolische Länge einer Kurve, die die beiden Punkte z_0 und z_1 verbindet. Bezeichnen wir den hyperbolischen Abstand dieser beiden Punkte mit ρ, so dürfen wir anstelle von (17) schreiben:

$$\Delta^2\geqslant\frac{\sinh^2 2\rho}{8\cosh 4\rho}(\lambda_0^2+\lambda_1^2). \tag{18}$$

Im Fall II (siehe (6)) trifft diese Formel (mit $>$) trivialerweise zu: Wegen $\dot{u}(s) \geqslant -4$ gilt längs γ_i $(i=0,1)$:

$$\lambda(s) \geqslant \lambda_i e^{-4s}.$$

Damit wird

$$\Delta \geqslant (\lambda_0 + \lambda_1) \int_0^\infty e^{-4s}\, ds$$

und somit

$$\Delta^2 > \frac{1}{16}(\lambda_0^2 + \lambda_1^2).$$

Wird (18) schliesslich auf f, z_0 und z_1 umgeschrieben (für λ siehe (23)), so resultiert gerade (3).

5. In (18) steht genau dann das Gleichheitszeichen, wenn erstens $\dot{u}(s) \equiv 4$ (oder $\equiv -4$) ist und wenn zweitens gilt: $2L = \rho$, das heisst: wenn γ_{01} eine hyperbolische Geodätische ist. Bis auf eine Aehnlichkeit der w-Ebene hat man dann $\lambda(s) = e^{4s}$,

$$\sigma_{01}:\ w(s) = \tfrac{1}{4}(e^{4s} - 1); \tag{19}$$

und bis auf einen konformen Automorphismus von D ist γ_{01} von der Form

$$\gamma_{01}:\ z(s) = \operatorname{tgh} s. \tag{20}$$

Wird die Variable s aus (19) und (20) eliminiert, so ergibt sich für ein gewisses reelles Interval $I \subset D$ die Beziehung

$$w = \frac{z}{(1-z)^2} \quad \forall z \in I.$$

Somit ist $f: z \mapsto w$ die Koebe-Abbildung (2).

6. Zum Beweis der Relationen (7) und (8) benutzen wir die bekannten Ungleichungen ([4], S. 20; [3])

$$|a_2| \leqslant 2, \quad |a_3 - a_2^2| \leqslant 1, \quad |a_3| \leqslant 3$$

für Funktionen

$$f(z) := z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \tag{21}$$

in S. Diese Ungleichungen werden differentialgeometrisch interpretiert und mit Hilfe der konformen Invarianz der hyperbolischen Metrik an beliebiger Stelle $\zeta \in D$ zur Anwendung gebracht.

Es sei also zunächst $f \in S$ gegeben durch (21), und es sei

$$\gamma:\ s \mapsto z(s),\ \ z(s_0) = 0,$$

ein analytischer Bogen durch 0, bezogen auf die hyperbolische Bogenlänge in D:

$$\dot{z}(s) = (1 - z(s)\bar{z}(s))e^{i\theta(s)}. \tag{22}$$

Der Bildbogen (4) in der w-Ebene braucht vorerst nicht geradlinig zu sein. Mit den in (4) und (5) eingeführten Bezeichnungen erhält man für $\dot{w}$:

$$\lambda e^{i\Theta} = f'(z)(1 - z\bar{z})e^{i\theta} \tag{23}$$

(wir unterdrücken die Variable s). Logarithmische Ableitung nach s liefert unter Verwendung von (22):

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + i\dot{\Theta} = \frac{f''(z)}{f'(z)}(1 - z\bar{z})e^{i\theta} - (\bar{z}e^{i\theta} + ze^{-i\theta}) + i\dot{\theta}.$$

Vermöge der Liouvilleschen Formel

$$\dot{\theta} = \kappa_g + i(\bar{z}e^{i\theta} - ze^{-i\theta})$$

(siehe z.B. [2], S. 37f.) bringen wir nun die geodätische Krümmung κ_g von γ (bezüglich der hyperbolischen Metrik in D) und vermöge

$$\dot{\Theta} = \lambda\kappa_e$$

die euklidische Krümmung κ_e des Bildbogens σ ins Spiel. Damit erhalten wir

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + i\lambda\kappa_e = \frac{f''(z)}{f'(z)}(1 - z\bar{z})e^{i\theta} + i\kappa_g - 2\bar{z}e^{i\theta} \tag{24}$$

und insbesondere an der Stelle $s := s_0$ (ergo $z = 0$):

$$2a_2 e^{i\theta} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} + i(\lambda\kappa_e - \kappa_g) \quad (s = s_0). \tag{25}$$

Von jetzt ab nehmen wir an, der Bildbogen σ sei geradlinig. Dann ist $\kappa_e \equiv 0$, und (25) vereinfacht sich zu

$$2a_2 e^{i\theta} = \dot{u} - i\kappa_g \quad (s = s_0), \tag{26}$$

wobei wir wiederum $\log \lambda =: u$ gesetzt haben. Wegen $|a_2| \leq 2$ hat man insbesondere

$$|\dot{u}| \leq 4 \quad (s = s_0). \tag{27}$$

Wir differenzieren nun (24) nocheinmal nach s und setzen anschliessend wieder $s := s_0$. Es ergibt sich

$$\ddot{u} = (6a_3 - 4a_2^2)e^{2i\theta} + 2a_2 e^{i\theta} i\kappa_g + i\dot{\kappa}_g - 2 \quad (s = s_0). \tag{28}$$

Wegen (26) ist aber

$$2a_2 e^{i\theta} i\kappa_g = 2a_2 e^{i\theta}(-a_2 e^{i\theta} + \bar{a}_2 e^{-i\theta}) = -2a_2^2 e^{2i\theta} + 2|a_2|^2.$$

Addiert man daher

$$2\dot{u}^2 = 2(a_2 e^{i\theta} + \bar{a}_2 e^{-i\theta})^2 = 4 \operatorname{Re}(a_2^2 e^{2i\theta}) + 4|a_2|^2$$

zu (28), so folgt

$$\ddot{u} + 2\dot{u}^2 = \operatorname{Re}[(6a_3 - 2a_2^2)e^{2i\theta}] + 6|a_2|^2 - 2$$

und damit schliesslich

$$\ddot{u} + 2\dot{u}^2 \leq 6\left|a_3 - \frac{a_2^2}{3}\right| + 6|a_2|^2 - 2. \tag{29}$$

Mit den Bezeichnungen

$$p := |a_3 - a_2^2| \leq 1, \quad q := |a_3| \leq 3$$

erhält man elementargeometrisch

$$|a_3-\frac{a_2^2}{3}|^2=\tfrac{1}{3}(p^2+2q^2)-\tfrac{2}{9}|a_2|^4\leq\tfrac{1}{9}(57-2|a_2|^4)$$

und somit anstelle von (29):

$$\ddot{u}+2\dot{u}^2\leq 2\sqrt{57-2|a_2|^4}+6|a_2|^2-2.$$

Wie man leicht verifiziert, ist hier die rechte Seite im Bereich $|a_2|\leq 2$ eine monoton wachsende Funktion von $A:=|a_2|^2$. Hiernach ist jedenfalls $\ddot{u}+2\dot{u}^2\leq 32$ oder eben

$$\ddot{u}\leq 2(16-\dot{u}^2)\quad (s=s_0). \tag{30}$$

7. Die allgemeine Situation ($f\in\tilde{S}$, $z(s_0)=\zeta$) lässt sich jederzeit mit Hilfe eines konformen Automorphismus von D und einer Aehnlichkeit der w-Ebene auf den schon betrachteten Fall zurückführen. Wie man sich leicht überlegt, bleiben dabei $\dot{u}$ und $\ddot{u}$ (sowie κ_g und $\lambda\kappa_e$) invariant. Wegen (27) und (30) sind damit (7) und (8) als richtig erwiesen.

8. Aus (25) ergibt sich noch die folgende differentialgeometrische Interpretation der Ungleichung $|a_2|\leq 2$:

$$\left|\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}+i(\lambda\kappa_e-\kappa_g)\right|\leq 4,$$

und zwar gilt dies längs beliebigen Bögen γ in D und für beliebiges $f\in\tilde{S}$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] CARL H. FITZGERALD. *Quadratic inequalities and coefficient estimates for schlicht functions.* Arch. Rational Mech. Anal. *46* (1972), 356–368.

[2] DETLEF LAUGWITZ. *Differentialgeometrie.* Stuttgart 1960.

[3] KARL LÖWNER. *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I.* Math. Ann. *89* (1923), 103–121.

[4] CHRISTIAN POMMERENKE. *Univalent Functions.* Göttingen 1975.

Eingegangen den 7 Januar 1978.