Einige Bemerkungen zur Algebra der Polyeder in nicht-euklidischen Räumen.

Autor(en): **Jessen, Borge**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **53 (1978)**

PDF erstellt am: **01.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-40783

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helvetici **53** (1978) 525–528 Birkhäuser Verlag, Basel

Einige Bemerkungen zur Algebra der Polyeder in nicht-euklidischen Räumen

BØRGE JESSEN

Herrn H. Hadwiger zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Als ich vor einigen Jahren die Ehre hatte in Bern über die Algebra der Polytope vorzutragen, habe ich am Schluss des Vortrags einige Bemerkungen über die Möglichkeit einer Übertragung des Dehn-Sydlerschen Satzes [1], [3] auf nicht-euklidische Räume gemacht. Eine nähere Ausführung dieser Bemerkungen bildet den Inhalt der vorliegenden kleinen Arbeit.

2. Es sei gestattet zunächst in aller Kürze an den Dehn-Sydlerschen Satz zu erinnern.

Unter der Polydergruppe $\mathfrak{P}$ des gewöhnlichen Euklidischen Raumes verstehen wir die von den (abgeschlossenen, nicht entarteten) Polyedern erzeugte freie Abelsche Gruppe.

Ein Polyeder P heisst aus den Polyedern $P_1, \ldots, P_n$ zusammengesetzt, falls $P = P_1 \cup \cdots \cup P_n$, und die Inneren von $P_1, \ldots, P_n$ disjunkt sind.

Mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen wir die Untergruppe von $\mathfrak{P}$, die von allen Elementen $P - P_1 - \cdots - P_n$, wo P aus $P_1, \ldots, P_n$ zusammengesetzt ist, und allen Elementen $P - P'$, wo P' aus P durch eine Bewegung entsteht, erzeugt wird. Zwei Elemente X und Y von $\mathfrak{P}$ heissen äquivalent, falls $X - Y \in \mathfrak{E}$.

Mit $\mathrm{Vol}: \mathfrak{P} \to \mathbf{R}$ bezeichnen wir den Homomorphismus von $\mathfrak{P}$ in die additive Gruppe $\mathbf{R}$, dessen Wert für ein Polyeder sein Volumen ist. Die Bedingung $\mathrm{Vol}\, X = \mathrm{Vol}\, Y$ ist offenbar für die Äquivalenz von X und Y notwendig. Hierzu kommt die Dehnsche Bedingung, für die Hadwiger [2] die folgende einfache Formulierung gegeben hat. Es bezeichne $H_\varphi: \mathfrak{P} \to \mathbf{R}$ für eine beliebige additive Funktion $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $\varphi(\pi) = 0$ den Homomorphismus von $\mathfrak{P}$ in $\mathbf{R}$, dessen Wert für ein Polyeder P durch

$$H_\varphi(P) = \sum_{v=1}^{n} l_v \varphi(\alpha_v)$$

gegeben ist, wo $l_1, \ldots, l_n$ die Kantenlängen und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die zugehörigen Flächenwinkel von P sind. Die Dehnsche Bedingung besagt dann, dass $H_\varphi(X) = H_\varphi(Y)$ für die Äquivalenz von X und Y notwendig ist. Nach Sydler ist das

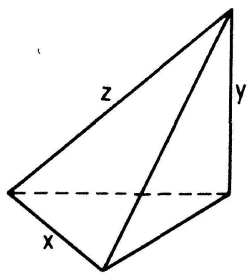
Erfülltsein der beiden Bedingungen Vol $X = \text{Vol } Y$ und $H_\varphi(X) = H_\varphi(Y)$ für jedes additive φ mit $\varphi(\pi) = 0$ für die Äquivalenz von X und Y auch hinreichend.

3. Das Äquivalenzproblem lässt sich unmittelbar auf den Fall übertragen, wo von Polyedern im sphärischen oder hyperbolischen Raum die Rede ist. Schon Dehn hat darauf hingewiesen, dass die Volumengleichheit und seine weitere Bedingung auch für die Äquivalenz von Elementen der Polyedergruppe in der sphärischen oder hyperbolischen Geometrie notwendig ist. Man wird hier fragen, ob auch das Sydlersche Resultat auf diese Fälle übertragen werden kann, also ob die Bedingungen auch hinreichend sind.

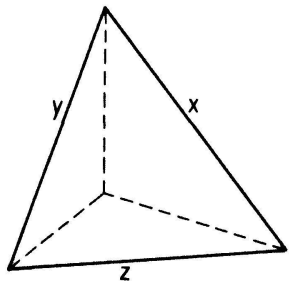
4. Ein Umstand, der dieses zweifelhaft macht, ist, dass das Volumen eines Polyeders in der sphärischen und der hyperbolischen Geometrie nach Schläfli und Lobačevskiĭ mit Hilfe von transcendenten Funktionen dargestellt wird. Das Äquivalenzproblem ist seinem Charakter nach ein algebraisches Problem, und es ist schwierig sich vorzustellen, dass die transcendente Volumenbedingung in seine Lösung eingehen kann. Wie dem auch sein mag, ist es naheliegend zu fragen, ob diejenigen Spezialfälle des Äquivalenzsatzes, worauf der Sydlersche Beweis beruht, auf die sphärische und hyperbolische Geometrie übertragen werden können. Wenn das der Fall sein sollte, hätte man jedenfalls einen Angriffspunkt für die Lösung des Äquivalenzproblems in nicht-euklidischen Räumen.

5. Die Spezialfälle, auf denen die Sydlersche Beweisführung für den Euklidischen Fall beruht, beziehen sich auf zwei Typen von Tetraedern, in welchen drei Flächenwinkel rechte sind.

Figur 1 zeigt den ersten Typus. Die Winkel längs den Kanten x, y, z sind $\frac{1}{2}\pi - \alpha$, $\frac{1}{2}\pi - \beta$, γ. Die Winkel längs den drei übrigen Kanten sind rechte. Wird $\cos^2 \alpha = a$, $\cos^2 \beta = b$ gesetzt, so gilt $\cos^2 \gamma = ab$. Ferner gilt $x = \lambda \tan \alpha$, $y = \lambda \tan \beta$, $z = \lambda \tan \gamma$ für ein gewisses λ. Bezeichnet man das Tetraeder mit $T(a, b, \lambda)$, so zeigt man leicht, dass $X = T(a, b, \lambda) + T(ab, c, \lambda)$ und $Y = T(a, c, \lambda) + T(ac, b, \lambda)$ für beliebige a, b, c, λ die für Äquivalenz notwendigen Bedingungen erfüllen. Das fundamentale Sydlersche Lemma besagt, dass tatsächlich X und Y äquivalent sind.



Figur 1.



Figur 2.

Betrachten wir jetzt im sphärischen Raum der Krümmung 1 ein Tetraeder von dem in Figur 1 gezeigten Typus. An Stelle der Relationen $x = \lambda \tan \alpha$, $y = \lambda \tan \beta$, $z = \lambda \tan \gamma$ finden wir dann $\tan x = \lambda \tan \alpha$, $\tan y = \lambda \tan \beta$, $\tan z = \lambda \tan \gamma$ für ein gewisses λ, und an Stelle der Relation $\cos^2 \gamma = ab$ finden wir

$$\cos^2 \gamma = a \bigcirc_\lambda b = ab - \lambda^2(1-a)(1-b).$$

Die hier auftretende Komposition $\bigcirc_\lambda$ erweist sich als associativ. Bezeichnet man das Tetraeder mit $T(a, b, \lambda)$, so zeigt man leicht, dass $X = T(a, b, \lambda) + T(a \bigcirc_\lambda b, c, \lambda)$ und $Y = T(a, c, \lambda) + T(a \bigcirc_\lambda c, b, \lambda)$ die für Äquivalenz notwendigen Bedingungen erfüllen. Die Frage ist also, ob X und Y tatsächlich äquivalent sind. Im hyperbolischen Raum der Krümmung -1 ist die Situation ganz analog. An Stelle von $\tan x$, $\tan y$, $\tan z$ treten hier $\tanh x$, $\tanh y$, $\tanh z$, und die Komposition $\bigcirc_\lambda$ ist hier durch

$$a \bigcirc_\lambda b = ab + \lambda^2(1-a)(1-b)$$

zu definieren.

Figur 2 zeigt den zweiten Typus. Die Winkel längs den Kanten x, y, z sind $\alpha, \beta, \frac{1}{2}\pi - \gamma$. Die Winkel längs den drei übrigen Kanten sind rechte. Wird $\cos^2 \alpha = a$, $\cos^2 \beta = b$ gesetzt, so gilt $\cos^2 \gamma = a + b$. Ferner gilt $x = \mu \cos \alpha \sin \alpha$, $y = \mu \cos \beta \sin \beta$, $z = \mu \cos \gamma \sin \gamma$ für ein gewisses μ. Bezeichnet man das Tetraeder mit $U(a, b, \mu)$, so zeigt man leicht, dass $X = U(a, b, \mu) + U(a + b, c, \mu)$ und $Y = U(a, c, \mu) + U(a + c, b, \mu)$ für beliebige a, b, c, μ die für Äquivalenz notwendigen Bedingungen erfüllen. Sydler bewies (mit Hilfe des fundamentalen Lemmas), dass tatsächlich X und Y äquivalent sind.

Betrachten wir jetzt im sphärischen Raum ein Tetraeder von dem in Figur 2 gezeigten Typus. An Stelle der Relationen $x = \mu \cos \alpha \sin \alpha$, $y = \mu \cos \beta \sin \beta$, $z = \mu \cos \gamma \sin \gamma$ finden wir dann $\tan x = \mu \cos \alpha \sin \alpha$, $\tan y = \mu \cos \beta \sin \beta$, $\tan z = \mu \cos \gamma \sin \gamma$ für ein gewisses μ, und an Stelle der Relation $\cos^2 \gamma = a + b$ finden wir

$$\cos^2 \gamma = a \oplus_\mu b = \frac{a + b + \mu^2 ab}{1 + \mu^2 ab}.$$

Die hier auftretende Komposition $\oplus_\mu$ erweist sich als associativ. Bezeichnet man das Tetraeder mit $U(a, b, \mu)$, so zeigt man leicht, dass $X = U(a, b, \mu) + U(a \oplus_\mu b, c, \mu)$ und $Y = U(a, c, \mu) + U(a \oplus_\mu c, b, \mu)$ die für Äquivalenz notwendigen Bedingungen erfüllen. Die Frage ist also, ob X und Y tatsächlich äquivalent sind. Im hyperbolischen Raum ist die Situation ganz analog. An Stelle von $\tan x$, $\tan y$, $\tan z$ treten hier $\tanh x$, $\tanh y$, $\tanh z$, und die Komposition $\oplus_\mu$

ist hier durch

$$a \oplus_\mu b = \frac{a + b - \mu^2 ab}{1 - \mu^2 ab}$$

zu definieren.

LITERATUR

[1] DEHN, M. *Ueber den Rauminhalt*, Math. Ann. *55* (1902), 465–478.
[2] HADWIGER, H. *Zum Problem der Zerlegungsgleichheit der Polyeder*, Arch. Math. *2* (1950), 441–444.
[3] SYDLER, J.-P. *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*, Comment. Math. Helv. *40* (1965), 43–80.

Børge Jessen
Dantes Plads 3
DK-1556 *Kopenhagen V*
Dänemark

Eingegangen den 26. Juli 1977