Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 27 (1953)

Artikel: Sur certains sous-groupes des groupes de Lie compacts.
Autor: Borel, A. / Serre, J.-P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21890

Sur certains sous-groupes des groupes de Lie compacts

Par A. BOREL, Genève, et J.-P. SERRE, Paris

1. Introduction

On sait que tout sous-groupe abélien connexe H d'un groupe de Lie compact G est contenu dans un tore maximal de G; par contre cette propriété peut être en défaut pour un sous-groupe H non connexe [1]). Cependant nous montrerons (théorème 1) qu'un tel sous-groupe H est contenu, sinon dans un tore maximal, du moins dans le normalisateur N d'un tore maximal T de G. En fait ce résultat vaut pour une catégorie de groupes H plus vaste que celle des groupes abéliens : celle des groupes vérifiant la propriété (MP) du n° 2 qui comprend aussi les groupes nilpotents finis. Appliqué au cas où G est le groupe unitaire $U(n)$, le théorème 1 redonne un résultat classique sur les représentations monomiales (n° 5).

Ainsi, l'étude des sous-groupes abéliens de G est ramenée à l'étude des sous-groupes abéliens de N; cela nous permettra d'obtenir quelques propriétés des sous-groupes de type $(p, \ldots, p)$ de G, sous-groupes qui sont, à certains égards, l'analogue «modulo p» des tores contenus dans G. Ces sous-groupes sont en rapport avec la p-torsion [2]) des groupes d'homologie de G; de façon plus précise, nous montrerons (théorème 2) que si G est un groupe de Lie compact connexe de rang l qui contient un sous-groupe isomorphe à $(Z_p)^{l+1}$, alors G a de la p-torsion. En particulier, nous verrons que les groupes exceptionnels G_2, F_4 et E_8 ont de la 2-torsion.

2. La propriété (MP)

C'est une propriété portant sur un *groupe topologique* G:

(MP) — *G possède une suite finie de sous-groupes invariants fermés*

[1]) Il suffit de prendre pour G le groupe $SO(3)$ des rotations de l'espace à trois dimensions et pour H le groupe engendré par les rotations de 180° autour de trois axes rectangulaires.

[2]) On dit qu'un espace a de la *p-torsion* (p premier) si l'un de ses groupes d'homologie à coefficients entiers a un coefficient de torsion divisible par p.

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{k-1} \subset G_k = G$$

telle que les quotients successifs G_i/G_{i-1} *soient isomorphes à un groupe cyclique fini ou au tore à une dimension.*

Nous dirons qu'une suite (G_i) de sous-groupes vérifiant les conditions précédentes est une *suite semi-principale* de G.

Un groupe G possédant la propriété (MP) est un *groupe de Lie compact résoluble* et sa composante connexe de l'élément neutre est un *tore*. On notera cependant qu'il existe des groupes résolubles finis ne vérifiant pas (MP) [3]).

Tout groupe de Lie compact abélien vérifie (MP) car il est isomorphe au produit direct d'un tore et d'un groupe abélien fini. L'exemple donné dans la Note [3]) montre donc que si G/N et N vérifient (MP), il n'en est pas nécessairement de même pour G. Cependant, toute extension *centrale* G d'un groupe G/N vérifiant (MP) par un groupe de Lie compact abélien N vérifie aussi (MP). En effet, N étant dans le centre de G, les éléments d'une suite semi-principale (N_i) de N sont des sous-groupes invariants dans G et on obtient une suite semi-principale de G en complétant (N_i) par l'image réciproque d'une suite semi-principale de G/N. En particulier, nous voyons ainsi que tout groupe de Lie compact *nilpotent* vérifie (MP).

Proposition 1. *Tout sous-groupe fermé et tout groupe quotient d'un groupe vérifiant* (MP) *vérifie aussi* (MP).

Soient G un groupe vérifiant (MP), H un sous-groupe fermé de G, N un sous-groupe invariant fermé de G, et $K = G/N$. Si (G_i) est une suite semi-principale de G, nous poserons $H_i = H \cap G_i$ et $K_i = N \cdot G_i/N$; les H_i et les K_i sont des sous-groupes invariants fermés de H et de K respectivement ; le groupe H_i/H_{i-1} (resp. K_i/K_{i-1}) est isomorphe à un sous-groupe fermé (resp. à un quotient par un sous-groupe fermé) du groupe G_i/G_{i-1} ; il s'ensuit que H_i/H_{i-1} et K_i/K_{i-1} sont isomorphes soit à un groupe cyclique fini, soit au tore à une dimension ce qui montre que (H_i) et (K_i) sont des suites semi-principales de H et de K respectivement.

Proposition 2. *Un groupe topologique non réduit à l'élément neutre qui vérifie* (MP) *contient un sous-groupe invariant cyclique d'ordre premier.*

---

[3]) Citons par exemple le produit semi-direct de $Z_2 + Z_2$ par Z_3, le groupe Z_3 opérant sur les éléments non nuls de $Z_2 + Z_2$ par permutation circulaire (Z_n désignant comme à l'ordinaire le groupe additif des entiers modulo n): on voit tout de suite que ce groupe, bien que résoluble, n'admet pas de sous-groupe invariant cyclique $\neq \{e\}$; il ne vérifie donc pas (MP).

Soit G_i une suite semi-principale d'un groupe G vérifiant (MP) ; on peut supposer $G_1 \neq \{e\}$. Si G_1 est isomorphe au tore à une dimension, G_1 contient pour tout entier $n \geqslant 1$ un unique sous-groupe cyclique d'ordre n ; si G_1 est cyclique d'ordre k et si p est un nombre premier divisant k, G_1 contient un unique sous-groupe cyclique d'ordre p. Dans tous les cas nous obtenons au moins un sous-groupe cyclique d'ordre premier invariant par tous les automorphismes de G_1, donc en particulier par les automorphismes intérieurs de G ; ce sous-groupe est donc invariant dans G, cqfd.

3. Le théorème principal

Théorème 1. *Soient G un groupe de Lie compact et H un sous-groupe de G vérifiant la propriété (MP). Il existe un tore maximal T de G dont le normalisateur dans G contient H.*

Dire que le normalisateur de T contient H équivaut à dire que T est *stable* par les automorphismes intérieurs que définissent les éléments de H. Soient alors $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, K le groupe d'automorphismes de $\mathfrak{g}$ défini par H ; le groupe K étant un groupe quotient de H vérifie (MP) d'après la prop. 1 ; il nous faut trouver une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\sigma(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$ pour tout $\sigma \in K$. Autrement dit, il nous suffit d'établir le théorème suivant (du reste équivalent au théorème 1) :

Théorème 1′. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de groupe compact et K un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui vérifie la propriété (MP). Il existe alors une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}$ qui est stable par les opérations de K.*

Pour prouver le théorème 1′ nous nous appuyerons sur la proposition suivante qui sera démontrée dans le n° 4 :

Proposition 3. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de groupe compact et σ un automorphisme de $\mathfrak{g}$ d'ordre égal à un nombre premier p. Si l'ensemble des points fixes de σ est réduit à $\{0\}$, $\mathfrak{g}$ est une algèbre abélienne.*

Admettons provisoirement cette proposition, et démontrons le théorème 1′ par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$, le cas où celle-ci est égale à 0 étant trivial.

On sait que $\mathfrak{g}$ est isomorphe au produit direct $\mathfrak{c} \times \mathfrak{g}'$ de son centre $\mathfrak{c}$ par son algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$ et ces deux sous-algèbres sont évidemment stables par K. Si $\mathfrak{c} \neq \{0\}$, l'hypothèse de récurrence montre l'existence d'une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{t}'$ de $\mathfrak{g}'$ stable par K, et $\mathfrak{c} \times \mathfrak{t}'$ est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$ stable par K.

Il nous reste donc à examiner le cas où $\mathfrak{c} = \{0\}$, donc où $\mathfrak{g}$ est *semi-simple*. Le théorème est évidemment vrai si $K = \{e\}$; sinon, d'après la proposition 2, K possède un sous-groupe invariant L cyclique d'ordre premier; si σ désigne un générateur de L, l'ensemble $\mathfrak{a}$ des points fixes de σ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ qui est $\neq \{0\}$ d'après la Prop. 3, et qui est $\neq \mathfrak{g}$ puisque σ n'est pas l'automorphisme identique; puisque L est invariant dans K, cette sous-algèbre $\mathfrak{a}$ est stable par K, et ce dernier définit un groupe K' d'automorphismes de $\mathfrak{a}$ qui est un quotient de K, donc qui vérifie aussi (MP). Comme, d'après un résultat bien connu, $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie de groupe compact, on peut appliquer au couple $(\mathfrak{a}, K')$ l'hypothèse de récurrence et il existe une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{a}$ stable par K', donc par K. Soit alors $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ formée des éléments b tels que $[u, b] = 0$ pour tout $u \in \mathfrak{u}$. Elle contient évidemment toute sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{u}$ et elle a donc même rang que $\mathfrak{g}$. Puisque $\mathfrak{u}$ est stable par K, $\mathfrak{b}$ l'est aussi; en outre, puisque $\mathfrak{u} \neq \{0\}$ et que le centre de $\mathfrak{g}$ est $\{0\}$, on a $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{g}$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au couple $(\mathfrak{b}, K'')$, où K'' est le groupe d'automorphismes de $\mathfrak{b}$ défini par K, et l'on obtient une sous-algèbre abélienne maximale $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{b}$ qui est stable par les opérations de K'', donc de K. Comme $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{g}$ ont même rang, $\mathfrak{t}$ est aussi une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{g}$, ce qui achève la démonstration.

4. Sur les automorphismes d'ordre premier d'une algèbre de Lie

Pour achever la démonstration du théorème 1′, nous devons encore établir la proposition 3. Or, on sait qu'une algèbre de Lie de groupe compact qui est nilpotente est de ce fait abélienne; la proposition 3 est donc une conséquence de la proposition suivante, que nous allons maintenant démontrer:

Proposition 4. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et σ un automorphisme de $\mathfrak{g}$ d'ordre égal à un nombre premier p. Si l'ensemble des points fixes de σ est réduit à $\{0\}$, $\mathfrak{g}$ est une algèbre nilpotente.*

Soit $\mathfrak{g}_C = \mathfrak{g} \otimes C$ l'algèbre de Lie complexe déduite de $\mathfrak{g}$ par passage du réel au complexe; tout élément de $\mathfrak{g}_C$ s'écrit d'une seule façon sous la forme $z = x + i \cdot y\,(x, y \in \mathfrak{g})$. Nous prolongerons σ à $\mathfrak{g}_C$ en posant $\sigma(x + iy) = \sigma(x) + i \cdot \sigma(y)$; si l'ensemble des points fixes de σ dans $\mathfrak{g}$ est réduit à $\{0\}$, il en est de même dans $\mathfrak{g}_C$.

Soit $\varepsilon \neq 1$ une racine p-ième de l'unité; les valeurs propres de σ sont de la forme ε^j, $j \in Z_p$ (groupe des entiers mod. p), et nous noterons V_j le

sous-espace propre de $\mathfrak{g}_C$ relatif à la valeur propre ε^j ; $\mathfrak{g}_C$ est somme directe des V_j et l'on a :

$$V_0 = \{0\} \tag{4.1}$$

$$[V_j, V_k] \subset V_{j+k} \qquad j, k \in Z_p . \tag{4.2}$$

(La formule 4.1 signifie que l'ensemble des points fixes de σ est réduit à $\{0\}$ et la formule 4.2 résulte de $\sigma([x, y]) = [\sigma(x), \sigma(y)])$.

Désignons par ad. x l'endomorphisme $y \to [x, y]$ de $\mathfrak{g}_C$. Nous allons montrer que ad. x est nilpotent lorsque x est contenu dans l'un des sous-espaces V_j. D'après 4.1, on peut supposer $j \not\equiv 0 \mod p$, et d'après 4.2, on a ad. x $(V_k) \subset V_{j+k}$, d'où (ad. $x)^q(V_k) \subset V_{qj+k}$, quel que soit l'entier q. Choisissons en particulier pour q un entier positif, $< p$, et tel que $qj + k \equiv 0 \mod p$, ce qui est possible, puisque $j \not\equiv 0 \mod p$. On a alors (ad. $x)^q(V_k) \subset V_0 = \{0\}$, d'où *a fortiori* (ad. $x)^p(V_k) = \{0\}$, et ceci ayant lieu pour tout k on en conclut que (ad. $x)^p = 0$, ce qui montre bien que ad. x est nilpotent.

Soit $f(x, y) = Tr(\text{ad. } x \circ \text{ad. } y)$ la *forme de Killing* de $\mathfrak{g}_C$; elle est invariante par tout automorphisme de $\mathfrak{g}_C$, donc en particulier par σ et la formule $f(x, y) = f(\sigma(x), \sigma(y))$ entraîne immédiatement :

$$f(x, y) = \varepsilon^{j+k} \cdot f(x, y) \qquad \text{si} \quad x \in V_j \quad \text{et} \quad y \in V_k . \tag{4.3}$$

Montrons maintenant que $f(x, y)$ est identiquement nulle ; il suffit évidemment de prouver que $f(x, y) = 0$ si $x \in V_j$, $y \in V_k$, quels que soient $j, k \in Z_p$. Si $j + k \not\equiv 0 \mod p$, cela résulte de 4.3 ; si $j + k \equiv 0 \mod p$, alors $[x, y] = 0$ d'après 4.1 et 4.2 et les endomorphismes ad. x et ad. y commutent. Comme ils sont tous deux nilpotents, leur produit ad. $x \circ$ ad. y est aussi nilpotent et sa trace $f(x, y)$ est nulle. Ainsi la forme de Killing de $\mathfrak{g}_C$ est nulle. D'après un critère classique d'Elie Cartan, ceci entraîne que $\mathfrak{g}_C$ est une algèbre *résoluble*. Si n est la dimension de $\mathfrak{g}$, on sait qu'il existe alors n formes linéaires sur $\mathfrak{g}_C$ $\omega_1, \ldots, \omega_n$ telles que les racines de l'équation caractéristique de ad. x soient les n nombres $\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)$ (les ω_i sont les *poids* de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}_C$.) Puisque ad. x est nilpotent pour tout $x \in V_j$, on a $\omega_1(x) = \cdots = \omega_n(x) = 0$ pour tout $x \in V_j$, et comme $\mathfrak{g}_C$ est somme directe des V_j ceci entraîne $\omega_1(x) = \cdots = \omega_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}_C$. L'endomorphisme ad. x est donc nilpotent pour tout $x \in \mathfrak{g}_C$. ce qui signifie que $\mathfrak{g}_C$ est une algèbre de Lie nilpotente. Il en est donc de même de $\mathfrak{g}$, cqfd.

Remarque. La dernière partie de la démonstration précédente est inutile pour démontrer la proposition 3 ; il est en effet immédiat qu'une

algèbre de Lie de groupe compact dont la forme de Killing est nulle est abélienne.

5. Représentations monomiales

Soit $h \to M_h$ une représentation linéaire d'un groupe H dans un espace vectoriel complexe E de dimension finie n ; on dit que M est *monomiale* s'il est possible de trouver une base $(\mathbf{e}_i)$ de E telle que, pour tout $h \in H$ et tout i, le vecteur $M_h(\mathbf{e}_i)$ soit colinéaire à l'un des vecteurs $\mathbf{e}_j$. Un théorème classique ([6], I, § 8) affirme que toutes les représentations linéaires d'un p-groupe sont monomiales. Ce théorème est un cas particulier de la proposition suivante :

Proposition 5. *Toute représentation linéaire d'un groupe H qui vérifie la propriété (MP) est monomiale.*

Soit M la représentation, que l'on peut supposer unitaire, H étant compact ; M est donc un homomorphisme de H dans le groupe unitaire $U(n)$ et l'image K de H par M vérifie (MP) d'après la prop. 1. Le théorème 1 montre alors l'existence d'un tore maximal T de $U(n)$ dont le normalisateur N contient K. Mais tout tore maximal de $U(n)$ s'obtient évidemment en prenant les matrices diagonales par rapport à une base orthonormée $(\mathbf{e}_i)$ de E. Le normalisateur N de ce tore est l'ensemble des matrices unitaires qui transforment chaque $\mathbf{e}_i$ en un multiple scalaire d'un $\mathbf{e}_j$; il s'ensuit que N, et *a fortiori* K, sont des groupes monomiaux, cqfd.

Remarque. Il existe des groupes qui vérifient la prop. 5 sans vérifier le théorème 1 (ni à plus forte raison (MP)). Le groupe cité dans la Note [3]) en est un exemple : toutes ses représentations sont monomiales puisque son groupe des commutateurs est abélien (cf. [6], *loc. cit.*) et on peut le plonger dans $SO(3)$ de telle sorte qu'il ne soit contenu dans le normalisateur d'aucun tore maximal.

6. Le p-rang d'un groupe de Lie compact

Soient G un groupe de Lie compact, T un tore maximal de G, N le normalisateur de T dans G, $\Phi(G) = N/T$ le *groupe de Weyl* de G [4]), qui est un groupe *fini*. Le théorème 1 montre que, pour qu'un groupe abélien H puisse être plongé biunivoquement dans G, il est nécessaire qu'il admette un sous-groupe H_1 isomorphe à un sous-groupe de T, le quotient H/H_1 étant isomorphe à un sous-groupe de $\Phi(G)$.

[4]) On trouvera un exposé des propriétés classiques de N, T, $\Phi(G)$ dans [5].
Nous écrirons fréquemment Φ au lieu de $\Phi(G)$ lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre.

Nous nous intéresserons spécialement aux sous-groupes H de G qui sont abéliens finis de type $(p, \ldots, p)$, autrement dit qui sont isomorphes à $Z_p + \cdots + Z_p$, p premier. Nous poserons la définition suivante :

Définition. *Le p-rang d'un groupe de Lie compact G est le plus grand entier h tel que G contienne un sous-groupe isomorphe à $(Z_p)^h$.*

Nous désignerons le p-rang par $l_p(G)$, ou simplement l_p si aucune confusion n'est à craindre, et nous désignerons le rang au sens usuel (dimension de T) par $l(G)$ ou l.

Le p-rang d'un tore est égal à la dimension du tore quel que soit p ; comme $l_p(G) = l_p(N)$ d'après le théorème 1, et que

$$l_p(T) \leqslant l_p(N) \leqslant l_p(T) + l_p(\Phi),$$

on en conclut :

$$l \leqslant l_p(G) \leqslant l + l_p(\Phi). \tag{6.1}$$

Les inégalités 6.1 montrent notamment que $l_p(G)$ est *fini*. Lorsque G est connexe on a le résultat plus précis suivant :

Proposition 6. *Si G est un groupe de Lie compact connexe, on a $l \leqslant l_2 \leqslant 2l$, $l \leqslant l_p \leqslant 3\,l/2$ si $p \neq 2$, et $l = l_p$ si p ne divise pas l'ordre du groupe $\Phi(G)$.*

G étant connexe, on sait [5] que Φ opère *fidèlement* sur l'algèbre de Lie du tore maximal T. Tout sous-groupe de Φ isomorphe à $(Z_p)^h$ admet donc une représentation linéaire réelle *fidèle* de dimension l. Il s'ensuit comme on sait que $h \leqslant l$ si $p = 2$ et que $h \leqslant l/2$ si $p \neq 2$; ceci signifie que $l_2(\Phi) \leqslant l$ et que $l_p(\Phi) \leqslant l/2$ si $p \neq 2$; d'autre part il est évident que $l_p(\Phi) = 0$ si p ne divise pas l'ordre de Φ. Notre proposition est alors une conséquence des inégalités 6.1.

Exemples

1. *Groupe unitaire* $U(n)$. Comme tout sous-groupe abélien du groupe unitaire peut être mis sous forme diagonale, c'est-à-dire plongé dans un tore maximal, on a $l_p = l = n$ pour tout nombre premier p.

2. *Groupe orthogonal unimodulaire* $SO(n)$. Ici on a $l = [n/2]$ (nous notons $[x]$ la partie entière du nombre x). D'autre part, si H est un sous-groupe abélien de $SO(n)$, on sait qu'on peut décomposer l'espace R^n en somme directe de sous-espaces à deux dimensions (augmentée d'un sous-espace à une dimension si n est impair) qui sont stables par H. On en déduit que $l_2 = 2n - 1$ et que $l_p = [n/2] = l$ si $p \neq 2$;

en particulier si $n = 2k + 1$ on a $l = k$ et $l_2 = 2k$, ce qui montre que l'inégalité $l_2 \leqslant 2l$ ne peut être améliorée en général.

3. *Groupe exceptionnel* G_2. C'est le groupe des automorphismes de l'algèbre des octaves de Cayley, son rang est égal à 2. On peut y définir un sous-groupe isomorphe à $Z_2 + Z_2 + Z_2$ comme suit : soit $\{1, e_i\}$, $i \in Z_7$, une base des octaves où les systèmes quaternioniens sont les triplets (e_i, e_{i+1}, e_{i+3}) ; soit S_i la transformation définie par $S_i(1) = 1$, $S_i(e_j) = -e_j$ si $j = i, i+2, i+3, i+4$ et $S_i(e_j) = e_j$ sinon ; on vérifie immédiatement que S_i est un automorphisme pour tout $i \in Z_7$, et que les sept transformations S_i forment avec l'identité un groupe isomorphe à $Z_2 + Z_2 + Z_2$.

On a donc $l_2(G_2) \geqslant 3$, inégalité que nous retrouverons par une autre voie au n° 8 ; nous verrons au n° 7 qu'en fait $l_2(G_2) = 3$.

7. Relations du p-rang avec la torsion

On sait que les nombres de Betti d'un groupe de Lie compact connexe G sont complètement déterminés par la connaissance du groupe de Weyl Φ, considéré comme groupe d'automorphismes de l'algèbre de Lie d'un tore maximal T de G [5]) ; ils sont en particulier égaux pour deux groupes G_1 et G_2 localement isomorphes. Cependant, alors que G_1 et G_2 ont même homologie réelle, ils se distinguent en général par leurs coefficients de torsion ; et d'autre part les normalisateurs des tores maximaux de G_1 et G_2 sont en général des extensions différentes de Φ par T. Ceci suggère assez naturellement que les propriétés de l'extension de Φ par T sont en quelque manière liées à la torsion. C'est dans ce sens que l'on peut interpréter le théorème 2, car il met en rapport la torsion avec le p-rang, notion qui dépend visiblement de l'extension de Φ par T.

Théorème 2. *Soient G un groupe de Lie compact connexe, p un nombre premier. Si $l_p(G) > l(G)$, le groupe G a de la p-torsion.*

Raisonnant par l'absurde, nous supposerons G sans p-torsion et nous démontrerons qu'on a alors $l_p \leqslant l$.

Soit B_G un espace classifiant pour G [6]). D'après [1], § 19 l'algèbre de cohomologie modulo p $H^*(B_G, Z_p)$ est une algèbre de polynomes à l générateurs de degrés $p_1, \ldots, p_l$.

---

[5]) Ce résultat est dû à *Cartan-Chevalley-Koszul-Weil* ainsi qu'à *Leray*. *Voir* à ce sujet les articles de *Cartan, Koszul et Leray* du Colloque de Topologie de Bruxelles (1950), ainsi que [1], Chap. VI.

[6]) Pour tout ce qui concerne la notion d'espace classifiant, la notation B_G, *voir* [1], Chap. V.

Soit d'autre part H un sous-groupe de G isomorphe à $(Z_p)^k$; nous devons montrer que $k \leqslant l$. Soit B_p un espace classifiant pour le groupe Z_p ; l'algèbre $H^*(B_p, Z_p)$ est bien connue[7]: si $p = 2$ c'est une algèbre de polynomes à un générateur de degré 1 et si $p \neq 2$ c'est le produit tensoriel d'une algèbre extérieure à un générateur de degré 1 par une algèbre de polynomes à un générateur de degré 2. On peut prendre pour espace classifiant B_H pour H le produit direct de k espaces homéomorphes à B_p ; il s'ensuit, d'après la formule de Künneth, que $H^*(B_H, Z_p)$ est isomorphe au produit tensoriel de k algèbres isomorphes à $H^*(B_p, Z_p)$, donc est isomorphe au produit tensoriel d'une algèbre de dimension finie par une algèbre de polynomes à k générateurs. L'inégalité $k \leqslant l$ que nous avons en vue est donc un cas particulier de la proposition suivante :

Proposition 7. *Soient G un groupe de Lie compact connexe, H un sous-groupe fermé de G (non nécessairement connexe) et p un nombre premier. On suppose que $H^*(B_G, Z_p)$ (resp. $H^*(B_H, Z_p)$) est isomorphe au produit tensoriel d'une algèbre de dimension finie par une algèbre de polynomes à r générateurs (resp. à s générateurs). On a alors l'inégalité $s \leqslant r$.*

(Dans l'application au théorème 2 on a $s = k, r = l$, et on en tire bien $k \leqslant l$) .

Avant de donner la démonstration de la proposition 7, fixons quelques notations :

$H^*(B_G, Z_p) = L \otimes U$, où dim. $L = a < +\infty$, et où U est une algèbre de polynomes à r générateurs de degrés $p_1, \ldots, p_r$;

$H^*(B_H, Z_p) = M \otimes V$, où dim. $M = b < +\infty$, et où V est une algèbre de polynomes à s générateurs de degrés $q_1, \ldots, q_s$;

$H^*(G/H, Z_p) = P$ est une algèbre de dimension finie (puisque G/H est une variété compacte) que nous désignerons par c .

Enfin, si A est une algèbre graduée par des sous-espaces A_n de dimension finie, on désignera par $A(t)$ la *série formelle de Poincaré* de A :

$$A(t) = \Sigma_n(\text{dim. } A_n) \cdot t^n .$$

Démontrons maintenant la proposition 7. D'après [1], § 22, l'espace B_H peut être fibré de base B_G et de fibre G/H . Cette fibration donne naissance à une suite spectrale dont le second terme est isomorphe à $H^*(B_G, Z_p) \otimes H^*(G/H, Z_p) = L \otimes P \otimes U$, et dont le terme final est

[7]) Lorsque H est un groupe fini, la cohomologie de B_H n'est autre que la cohomologie du groupe H, au sens de *Hopf*. Ici, nous utilisons la détermination de la cohomologie des groupes cycliques que l'on trouvera par exemple dans *S. Eilenberg*, Bull. Amer. Math. Soc., *55* (1949), 3—27.

isomorphe à l'algèbre graduée associée à $H^*(B_H, Z_p) = M \otimes V$. Il s'ensuit que l'on a dim. $(L \otimes P \otimes U)_n \geqslant$ dim. $(M \otimes V)_n$ pour tout n, ce qui se traduit par :

$$(L \otimes P \otimes U)(t) = (M \otimes V)(t) + R(t), \tag{7.1}$$

où $R(t)$ est une série formelle à coefficients tous positifs.

Explicitons 7.1. On a $U(t) = \Pi_{i=1}^{i=r} 1/(1-t^{p_i})$, $V(t) = \Pi_{j=1}^{j=s} 1/(1-t^{q_j})$ d'où :

$$\frac{L(t)\cdot P(t)}{\Pi(1-t^{p_i})} - \frac{M(t)}{\Pi(1-t^{q_j})} = R(t) \tag{7.2}$$

Le premier membre de 7.2 est une série entière qui converge pour $|t| < 1$; il en est donc de même du second membre, et $R(t)$ peut être considérée comme une *fonction* de t, définie pour $|t| < 1$. Puisque tous les coefficients de la série de Taylor de $R(t)$ sont positifs, on a $R(t) \geqslant 0$ pour $0 \leqslant t < 1$, ce qui donne :

$$\frac{L(t)\cdot P(t)}{\Pi(1-t^{p_i})} \geqslant \frac{M(t)}{\Pi(1-t^{q_j})} \text{ pour } 0 \leqslant t < 1. \tag{7.3}$$

Posons $t = 1 - 1/N$. Lorsque N tend vers $+\infty$, on voit tout de suite que le premier membre de 7.3 équivaut à $a.\,c.\,N^r/p_1 \cdots p_r$, et que le second membre équivaut à $b.\,N^s/q_1 \cdots q_s$. Pour que le premier membre reste supérieur au second lorsque N tend vers $+\infty$ il est donc nécessaire que $r \geqslant s$, ce qui démontre la proposition. De plus nous voyons que, si $s = r$, on a :

$$a.\,c.\,q_1 \cdots q_s \geqslant b.\,p_1 \cdots p_r. \tag{7.4}$$

Corollaire. *Si $H^*(G, Z_2)$ possède un système simple de r générateurs universellement transgressifs (au sens de* [1], § 19), *on a les inégalités $l \leqslant l_2 \leqslant r$.*

D'après [1], prop. 19.2, $H^*(B_G, Z_2)$ est une algèbre de polynomes à r générateurs ; la proposition 7 montre alors que $l_2 \leqslant r$. L'inégalité $l \leqslant l_2$ a été démontrée dans la proposition 6.

Remarques. 1. Si $G = U(n)$, $Sp(n)$ ou $SO(n)$, on a l'égalité $l_2 = r$; mais cette égalité n'est pas générale : on peut montrer qu'elle est en défaut pour le groupe adjoint de $SO(6)$.

2. D'après [2], le groupe exceptionnel G_2 vérifie les hypothèses du corollaire précédent avec $r = 3$. On a donc $l_2(G_2) \leqslant 3$, d'où, compte tenu du n° 6, $l_2(G_2) = 3$.

8. Sur le 2-rang des groupes exceptionnels

Les cinq types exceptionnels de groupes de Lie simples compacts sont notés usuellement G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. Ces symboles désigneront également ici les représentants simplement connexes de ces structures de groupes de Lie. Leurs centres ont respectivement 1, 1, 3, 2, 1 éléments (cf. [4]) et tous les automorphismes de G_2, F_4, E_7, E_8 sont intérieurs (cf. [3], ainsi que *F. Gantmacher*, Rec. Math. Moscou N. S., 5, 1939, p. 101—144).

Lemme. *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie de groupe semi-simple compact et* $\mathfrak{t}$ *une sous-algèbre abélienne maximale de* $\mathfrak{g}$. *Il existe un automorphisme* σ *de* $\mathfrak{g}$, *d'ordre deux, et dont la restriction à* $\mathfrak{t}$ *est donnée par* $\sigma(t) = -t$, $t \in \mathfrak{t}$ [8]).

Soient $\mathfrak{g}_C = \mathfrak{g} \otimes C$ l'algèbre de Lie complexe déduite de $\mathfrak{g}$ par passage du réel au complexe, et $\mathfrak{t}_C = \mathfrak{t} \otimes C$. D'après H. Weyl [7], on peut trouver une base $h_1, \ldots, h_l, e_\alpha, e_\beta, \ldots$ de $\mathfrak{g}_C$, où $h_i \in \mathfrak{t}_C$, et où $\alpha, \beta, \ldots$ sont des formes linéaires sur $\mathfrak{t}_C$ (les *racines* de $\mathfrak{g}_C$), qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\alpha \neq 0\,;\ \textit{si}\ \alpha\ \textit{est une racine,}\ -\alpha\ \textit{est aussi une racine.} \tag{8.1}$$

$$[h, e_\alpha] = \alpha(h) \cdot e_\alpha\ \textit{pour tout}\ h \in \mathfrak{t}_C\,. \tag{8.2}$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = 0\ \textit{si}\ \alpha + \beta\ \textit{n'est pas une racine.} \tag{8.3}$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} \cdot e_{\alpha+\beta}\ \textit{si}\ \alpha + \beta\ \textit{est une racine.} \tag{8.4}$$

$$N_{\alpha\beta} = \overline{N}_{\alpha\beta} = N_{-\alpha, -\beta}\,. \tag{8.5}$$

Les éléments de la forme $\sum a_i \cdot h_i + \sum b_\alpha \cdot e_\alpha$, *où* a_i *est imaginaire pur et où* $\overline{b_{-\alpha}} = b_\alpha$, *forment une sous-algèbre de Lie (réelle)* $\mathfrak{g}_0$ *de* $\mathfrak{g}_C$ *isomorphe à* $\mathfrak{g}$. (8.6)

Comme les sous-algèbres abéliennes maximales de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par les automorphismes de $\mathfrak{g}$ (cf. [7] par exemple), on peut donc supposer qu'il existe un isomorphisme $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_0$ qui applique $\mathfrak{t}$ sur $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{t}_C$.

Soit maintenant ψ la transformation linéaire de $\mathfrak{g}_C$ définie par :

$$\psi(h) = -h \quad \text{si} \quad h \in \mathfrak{t}_C\,, \quad \psi(e_\alpha) = e_{-\alpha}\,.$$

En utilisant 8.1 et 8.5 on voit que ψ respecte les relations 8.2, 8.3 et 8.4 ; ψ est donc un *automorphisme* de $\mathfrak{g}_C$; en outre $\mathfrak{g}_0$ est stable par ψ. En posant $\sigma = \varphi^{-1} \circ \psi \circ \varphi$ on obtient alors l'automorphisme de $\mathfrak{g}$ cherché.

---

[8]) Ce résultat est un cas particulier d'un résultat classique ; pour être complets, nous en rappelons la démonstration.

Corollaire. *Soit G un groupe de Lie semi-simple compact de rang l et de centre réduit à $\{e\}$. Si tous les automorphismes de G sont intérieurs, G contient un sous-groupe isomorphe à $(Z_2)^{l+1}$.*

Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{t}$ les algèbres de Lie de G et d'un tore maximal T de G; l'automorphisme σ du lemme précédent définit un automorphisme de G, laissant stable T, qui vérifie $\sigma(x) = x^{-1}$ pour tout $x \in T$. Vu les hypothèses faites sur G, on a $\sigma(x) = g \cdot x \cdot g^{-1}$, avec $g \in G$, et $g^2 = e$. L'élément g commute donc avec les éléments d'ordre 2 de T, et engendre avec eux un sous-groupe isomorphe à $(Z_2)^{l+1}$.

Proposition 8. *Les groupes G_2, F_4, Ad. E_7 et E_8 ont un 2-rang strictement plus grand que leur rang. Ils possèdent donc de la 2-torsion.*

(On a noté Ad. G le *groupe adjoint* de G, quotient de G par son centre).

Cette proposition résulte immédiatement du corollaire précédent et des résultats rappelés au début de ce numéro.

Remarques.

1. L'existence de la 2-torsion n'est nouvelle que pour E_8. Elle est en effet triviale pour Ad. $E_7 \approx E_7/Z_2$, et la cohomologie modulo 2 de G_2 et de F_4 a déjà été déterminée par l'un de nous [2].

2. La proposition 8 montre à nouveau que $l_2(G_2) \geqslant 3$.

3. Elle montre également que $l_2(F_4) \geqslant 5$. Mais il résulte de [2] et du corollaire à la proposition 7 que $l_2(F_4) \leqslant 5$. On a donc finalement $l_2(F_4) = 5$.

4. Nous ne savons pas si les groupes E_6 et E_7 vérifient la proposition 8.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *A. Borel,* Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts. Thèse, Paris 1952, à paraître aux Ann. of Math.

[2] *A. Borel,* La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes, Comment. Math. Helv. *27* (1953), 165ff.

[3] *E. Cartan,* Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples. Bull. Sci. Math., *49* (1925), 130—152.

[4] *E. Cartan,* La géométrie des groupes simples. Annali Mat. Pura Appl., *4* (1927), 209—256.

[5] *E. Stiefel,* Über eine Beziehung zwischen geschlossenen Lieschen Gruppen und diskontinuierlichen Bewegungsgruppen euklidischer Räume und ihre Anwendung auf die Aufzählung der einfachen Lieschen Gruppen. Comment. Math. Helv., *14* (1942), 350—380.

[6] *B.-L. van der Waerden,* Gruppen von linearen Transformationen. Ergebnisse der Math. IV, *2*, Berlin, Springer (1935).

[7] *H. Weyl,* Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen III. Math. Z., *24* (1926), 377—395.

Reçu le 12 septembre 1952.