Über die Grenzen der einfachzusammenhängenden Gebiete.

Über die Grenzen der einfachzusammenhängenden Gebiete

Von T. van AARDENNE-EHRENFEST und

JULIUS WOLFF, Utrecht (Holland)

Primenden *erster Art* der Grenze eines Gebietes sind diejenigen, welche aus nur *einem* Punkte bestehen. Ein solcher Grenzpunkt ist erreichbar. Primenden *zweiter Art* sind diejenigen, welche einen erreichbaren und mindestens *einen* unerreichbaren Grenzpunkt enthalten.

Frau T. van Aardenne-Ehrenfest hat festgestellt, daß aus zwei Sätzen von J. Wolff (siehe Fußnote [1]) und die Behauptung beim untenstehenden Beweise) die negative Beantwortung einer bekannten Frage von Carathéodory hervorgeht:

Satz. *Es gibt kein einfachzusammenhängendes Gebiet, dessen Grenze nur aus Primenden zweiter Art besteht.*

Beweis: Wir nehmen für einen Augenblick an, daß ein Gebiet G vorliege, dessen Grenze g nur aus Primenden zweiter Art bestehe. Wir bilden G konform auf die Halbebene $D(x > 0)$ ab mittels der Abbildungsfunktion $f(z) = f(x + iy)$. Nach einem früher bewiesenen Satz[1]) besteht in jedem Punkte iy der imaginären Axe d der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} f(x + iy) = \varphi(y) \quad . \tag{1}$$

Es sei ε eine positive Zahl. Wir behaupten, daß jedes Rechteck $R(0<x<a\,;\ b<y<c)$ ein Rechteck $R_1(0<x<a_1<a\,;\ b<b_1<y<c_1<c)$ enthält, in welchem die Schwankung von $f(z)$ kleiner als ε ist. Zum Beweise nehmen wir für einen Augenblick an, es existiere ein R mit der Eigenschaft, daß in jedem R_1 die Schwankung von $f(z)$ größer oder gleich ε sei. Nach (1) ist $\varphi(y)$ Limes einer stetigen Funktion. Folglich liegen die Stetigkeitspunkte von $\varphi(y)$ überall dicht. Es sei y_0 ein Stetigkeitspunkt des Intervalles $(b < y < c)$ und $i_0(b_0 < y < c_0)$ ein Inter-

---

[1]) La représentation conforme au voisinage d'un point frontière. Proceedings Akad. v. Wetensch., Amsterdam, vol. 45 nº 2, 1942, p. 169—170.

Nach dem dort bewiesenen Satze ist $\varphi(y)$ sogar der Winkellimes von $f(z)$ für $z \to iy$. Mittlerweile sahen wir, daß *R. Nevanlinna* diesen Satz sogar für jede beschränkte holomorphe Funktion in D bewiesen hat (Eindeutige analytische Funktionen, Springer 1936).

vall, das y_0 enthält, innerhalb des Intervalles $(b < y < c)$ liegt und genügend klein ist, damit

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ auf } i_0 . \tag{2}$$

Nach (1) und (2) liegt auf der Halbgeraden $(x > 0,\ y = y_0)$ ein Punkt $z_1 = x_1 + i\,y_0$ mit den Eigenschaften

$$0 < x_1 < \tfrac{1}{2};\ |f(z) - \varphi(y_0)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ für } 0 < x < x_1,\ y = y_0 . \tag{3}$$

Im Rechteck $R_1(0 < x < x_1;\ b_0 < y < c_0)$ soll nach Voraussetzung die Schwankung von $f(z)$ größer oder gleich ε sein. Folglich enthält R_1 einen Punkt $\zeta_1 = \xi_1 + i\,\eta_1$ mit $|f(\zeta_1) - \varphi(y_0)| > \frac{\varepsilon}{3}$. Wegen der Stetigkeit von $f(z)$ in D besteht ein Intervall i_1 innerhalb R_1, das ζ_1 enthält, parallel zur imaginären Axe d ist und genügend klein, damit

$$|f(z) - \varphi(y_0)| > \frac{\varepsilon}{3} \text{ in jedem Punkt von } i_1 . \tag{4}$$

Nach (1) und (2) liegt auf der Halbgeraden $(x > 0,\ y = \eta_1)$ ein Punkt $z_2 = x_2 + i\,\eta_1$ mit den Eigenschaften

$$0 < x_2 < \xi_1\ ;\ \ 0 < x_2 < \frac{1}{2^2};\ |f(z) - \varphi(y_0)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{für } 0<x<x_2,\ y=\eta_1. \tag{5}$$

Im offenen Rechteck R_2, zwischen den beiden Projektionen von i_1 auf d und auf die Gerade $x = x_2$, soll die Schwankung von $f(z)$ größer oder gleich ε sein. Folglich enthält R_2 einen Punkt $\zeta_2 = \xi_2 + i\,\eta_2$ mit $|f(\zeta_2) - \varphi(y_0)| > \frac{\varepsilon}{3}$, also ein Intervall i_2 innerhalb R_2, das ζ_2 enthält, parallel zu d ist und genügend klein, damit

$$|f(z) - \varphi(y_0)| > \frac{\varepsilon}{3} \text{ in jedem Punkt von } i_2 . \tag{6}$$

Indem wir so fortfahren, erhalten wir eine unendliche Folge von Intervallen i_n, parallel zu d, deren Abszissen kleiner als $\frac{1}{2^n}$, so beschaffen, daß für $n = 1, 2, \ldots$ die Projektion von i_{n+1} auf d innerhalb derjenigen von i_n liegt, und daß

$$|f(z) - \varphi(y_0)| > \frac{\varepsilon}{3} \text{ in jedem Punkt jedes } i_n . \tag{7}$$

Es existiert eine Gerade $y = h$, welche jedes i_n schneidet. Nach (1) und (7) ist

$$| \varphi(h) - \varphi(y_0) | \geqq \frac{\varepsilon}{3} \,. \tag{8}$$

Nach (2) aber ist

$$| \varphi(h) - \varphi(y_0) | \leqq \frac{\varepsilon}{4} \,. \tag{9}$$

Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung. Daraus aber ergibt sich wegen der Willkür von ε, daß diejenigen Punkte iy auf d, wo $\varphi(y)$ *zweidimensionaler* Limes von $f(z)$ ist, ein Residuel (nach der Denjoy'schen Benennung) M bilden, das heißt: die Komplementärmenge von M besteht aus höchstens abzählbar vielen nirgends dichten Punktmengen; also enthält jedes Intervall auf d eine perfekte Teilmenge von M. Weil den Punkten von M Primenden erster Art auf der Grenze von G entsprechen, ist nicht nur unser Satz bewiesen, sondern sogar folgender schärfere

Satz. *Hat die Grenze g eines einfachzusammenhängenden Gebietes G nur Primenden erster und zweiter Art, so hat die Menge m der Primenden erster Art die Mächtigkeit des Kontinuums. Bei Abbildung von G auf die Halbebene D entspricht m einem Residuel auf der Begrenzungsgeraden d von D.*

(Eingegangen den 20. April 1944.)