

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 16 (1943-1944)

Artikel: Reelle Freigeilde.
Autor: Finsler, Paul
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-15549>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Reelle Freigeilde

Von PAUL FINSLER, Zürich

*Seinem hochverehrten Lehrer
Herrn Constantin Carathéodory
zum 70. Geburtstag gewidmet.*

In dieser Arbeit sollen die Eigenschaften der Freigeilde¹⁾ besonders im Hinblick auf das reelle Gebiet betrachtet werden. Verschiedene in der Abhandlung IV für Freisysteme und in VI für eindimensionale Freigeilde hergeleitete Sätze lassen sich auf beliebige Freigeilde übertragen und gelten auch im Reellen. Insbesondere soll ein Zusammenhang mit den Hyperflächen zweiten Grades, der sich in II § 3 für den dreidimensionalen Raum ergeben hatte, auf den n -dimensionalen Raum erweitert werden; er ist für die in III behandelten Sätze von Bedeutung.

1. Definition

In der Geometrie wird vielfach ein Gebilde als „reell“ bezeichnet, wenn es durch Gleichungen mit reellen Koeffizienten darstellbar ist. Dies führt aber z. B. beim „imaginären Kugelkreis“ zu Schwierigkeiten. Wir wollen deshalb diese Gebilde nur als „reellartig“ bezeichnen und sagen:

Ein algebraisches Gebilde, insbesondere ein Freigeilde, heißt *reellartig*, wenn es mit dem konjugiert komplexen Gebilde zusammenfällt.

Weiter wird speziell für Freigeilde erklärt:

Ein Freigeilde heißt *reell*, wenn es reellartig ist und seine reellen Punkte nicht in einem Raum geringerer Dimension enthalten sind wie die komplexen.

Dabei ist die erste Bedingung nicht überflüssig, da z. B. ein imaginärer Kegelschnitt vier reelle Punkte enthalten kann. Aus der Definition ergibt sich aber:

Satz 1. *Ein zum L_q gehörendes reellartiges Freigeilde ist dann und nur dann reell, wenn es $q + 1$ linear unabhängige reelle Punkte enthält.*

¹⁾ Man vergleiche die im folgenden mit I bis VI zitierten Arbeiten:

- I. Über algebraische Gebilde, Math. Annalen 101 (1929), S. 284.
- II. Über eine Klasse algebraischer Gebilde (Freigeilde), Comm. Math. Helv. 9 (1937), S. 172.
- III. Über das Vorkommen definiter und semidefiniter Formen in Scharen quadratischer Formen, Comm. Math. Helv. 9 (1937), S. 188.
- IV. Über Freisysteme (lineare Freigeilde), Comm. Math. Helv. 11 (1938), S. 62.
- V. Über die Darstellung und Anzahl der Freisysteme und Freigeilde, Monatshefte für Math. und Phys. 48 (1939), S. 433.
- VI. Die eindimensionalen Freigeilde, Comm. Math. Helv. 12 (1940), S. 254.

2. Freisysteme

Die Verbindungsgerade von zwei konjugiert komplexen Punkten ist stets reell; ein reellartiger linearer Raum L_ϱ enthält daher auch $\varrho + 1$ linear unabhängige reelle Punkte und es gilt:

Satz 2. *Jeder reellartige lineare Raum, insbesondere jeder Schnitt- oder Verbindungsraum von reellen oder von konjugiert komplexen linearen Räumen ist reell.*

Ein reellartiges Freisystem braucht aber, wenn es zusammengesetzt ist, nicht reell zu sein, und seine irreduziblen Teile müssen auch nicht reellartig sein. Dies zeigt schon das Beispiel eines aus zwei konjugiert komplexen Punkten bestehenden Systems. Dagegen gilt:

Satz 3. *Ist ein Freisystem reell, so sind auch seine irreduziblen Teile reell.*

Wenn nämlich das Freisystem G reellartig ist, so muß es mit jedem nichtreellen L_α auch den konjugiert komplexen Raum $\bar{L}_\alpha$ enthalten; die reellen Punkte des L_α liegen daher im Schnitt mit dem zugehörigen Rest G' . Wäre also der in IV Satz 24 erwähnte, nicht gebundene Raum L_α von G nicht reell, so wären die reellen Punkte von G schon in dem zum Rest G' gehörenden Raum enthalten, der kleinere Dimension hat wie der zu G gehörende; G wäre dann also nicht reell. Ist aber der L_α reell, so ist auch der Schnitt mit dem zugehörigen Rest reell und dieser muß selbst ein reelles Freigebilde sein, da sonst wiederum G nicht reell wäre. Durch Induktion ergibt sich somit Satz 3.

Es zeigt sich also, daß die reellen Punkte der reellen Freisysteme Gebilde ergeben, die mit den direkt im reellen Gebiet definierten Freisystemen²⁾ übereinstimmen.

3. Eindimensionale Gebilde

Die reellen Punkte einer Kurve sind die Schnittpunkte mit der konjugiert komplexen Kurve. Da dasselbe auch für die Projektionen der Kurven auf eine zweidimensionale reelle Ebene gilt, so kann eine irreduzible nichtreellartige Kurve ϱ -ter Ordnung höchstens ϱ^2 reelle Punkte enthalten. Eine Freikurve ϱ -ter Ordnung ist jedoch schon durch $\varrho + 3$ ihrer Punkte eindeutig bestimmt³⁾ und enthält daher, wenn sie nicht reellartig ist, höchstens $\varrho + 2$ reelle Punkte. Ist sie jedoch reellartig und nicht reell, so ist nach Satz 2 $\varrho > 1$, und sie enthält dann höchstens

¹⁾ Vgl. die Einleitung von IV, S. 62.

²⁾ E. Bertini, Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume, Wien 1924, S. 323.

$\varrho - 2$ reelle Punkte, denn durch $\varrho - 1$ solche könnte man unendlich viele reelle $L_{\varrho-1}$ legen, deren ϱ -ter Schnitt mit der Kurve rational bestimmbar und daher selbst reell sein müßte. Die Kurve enthielte dann $\varrho + 1$ linear unabhängige reelle Punkte und wäre somit ebenfalls reell; sie enthält dann auch stets einen reellen Linienzug⁴⁾.

Ist aber eine nichtreellartige Freikurve in einem reellartigen eindimensionalen Freigebilde enthalten, so ist auch die konjugiert komplexe Kurve darin enthalten und, wie aus der Herleitung von VI Satz 12 (S. 260) hervorgeht, können sich diese beiden Kurven in höchstens einem Punkte treffen. Es gilt also

Satz 4. *Eine reelle Freikurve C^e des L_ϱ enthält stets unendlich viele reelle Punkte, d. h. einen reellen Linienzug; eine reellartige, nichtreelle höchstens $\varrho - 2$, eine nichtreellartige höchstens $\varrho + 2$ (bzw. 1 für $\varrho = 1$) und, wenn sie in einem reellartigen eindimensionalen Freigebilde enthalten ist, höchstens einen reellen Punkt.*

Es gilt nun weiter

Satz 5. *Ist ein eindimensionales Freigebilde G reell, so sind auch seine irreduziblen Teile und deren gegenseitigen Schnittpunkte reell. Es läßt sich also im Reellen aus Punkten und Freikurven in derselben Weise zusammensetzen, wie nach VI Satz 3, 12, 13 ein beliebiges im komplexen Gebiet.*

Zum Beweis ersetze man die irreduziblen Teile von G durch die zugehörigen Räume L_{α_i} ; nach VI Satz 13 ergibt dies ein Freisystem. Dieses kann nach IV Satz 23 nicht nur aus gebundenen Räumen bestehen. Ist L_{α_r} ein anderer, so trifft er den zugehörigen Rest G' nach VI Satz 13 höchstens in einem Punkt S . Der zum L_{α_r} gehörende Teil von G muß reell sein. Wäre er nämlich nicht reellartig, so könnte er sich mit dem konjugiert komplexen Teil nur im Punkt S treffen und die reellen Punkte von G wären schon in dem zu G' gehörenden, also in einem linearen Raum geringerer Dimension enthalten; wäre er aber reellartig und nicht reell, so könnte er höchstens $\alpha_r - 2$ reelle Punkte enthalten; diese würden in einem L_{α_r-3} liegen, der mit G' zusammen wieder einen linearen Raum geringerer Dimension bestimmen würde, in welchem alle reellen Punkte von G enthalten wären.

Der Rest G' ist nun ebenfalls ein eindimensionales, reelles Freigebilde. Wäre er nämlich nur reellartig und nicht reell, so müßten auch die reellen Punkte von G schon in einem linearen Raum geringerer Dimension liegen

⁴⁾ Dagegen enthält z. B. die reellartige Kurve $x_0^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_0^2 = 0$ wohl drei reelle, linear unabhängige Punkte, aber keinen reellen Linienzug.

wie die komplexen, da der Schnitt S mit L_{α_r} , wenn er vorhanden ist, reell sein muß. Es gelten also für G' dieselben Überlegungen wie für G und durch Induktion folgt, daß alle irreduziblen Teile von G und ihre Schnittpunkte reell sind.

Als Folgerung ergibt sich:

Satz 6. *Jedes reelle, eindimensionale Freigeilde enthält wenigstens eine reelle Freikurve.*

Weiter findet man

Satz 7. *Durch jeden reellen Punkt X des zu einer reellen Freikurve C^q gehörenden Raums L_q geht ein L_{q-1} , welcher C^q in q linear unabhängigen reellen Punkten trifft.*

Verbindet man nämlich den Punkt X mit $q - 1$ reellen Punkten $P_1, \dots, P_{q-1}$ der Kurve C^q , die noch so gewählt werden können, daß sie mit X zusammen einen L_{q-1} bestimmen, so trifft dieser Raum die Kurve noch in einem reellen Punkt P_q , sofern er sie nicht in einem der Punkte P_i berührt. Eine solche Berührung läßt sich aber durch Änderung des Punktes P_i auf C^q beseitigen, ohne daß eine neue Berührung eintritt, denn andernfalls müßte die Kurve C^q einem festen L_{q-1} angehören, was nicht der Fall ist.

Ersetzt man den Punkt X durch eine Gerade, so gilt ein entsprechender Satz, wie schon das Beispiel einer C^2 im L_2 zeigt, im Reellen nicht mehr, wohl aber nach VI Satz 2 im Komplexen. Man kann jedoch, wie im folgenden gezeigt wird, weitere Sätze von VI ins Reelle übertragen und zugleich auf beliebige mehrdimensionale Freigeilde verallgemeinern. Läßt man in den Sätzen und Beweisen die Forderung der Realität weg, so erhält man den allgemeinen Fall im komplexen Gebiet.

4. Beliebige Freigeilde

Ein zum L_q gehörendes, mindestens eindimensionales (reelles) Freigeilde G enthalte die linear unabhängigen (reellen) Punkte $P_0, P_1, \dots, P_q$. Man schneide G mit den Räumen $L_\sigma = [P_0, \dots, P_\sigma]$, $\sigma = 0, 1, \dots, q$. Wird der größte Wert von σ , für den G vom L_σ nur in endlich vielen Punkten getroffen wird, mit $\tau - 1$ bezeichnet, so wird G nach I S. 287 vom Raum $L_\tau = [P_0, \dots, P_\tau]$ in einem genau eindimensionalen (reellen) Freigeilde getroffen, das nach VI Satz 3 (bzw. nach Satz 6) eine (reelle) Freikurve enthält. Es gilt also

Satz 8. *Jedes mindestens eindimensionale (reelle) Freigeilde enthält wenigstens eine (reelle) Freikurve.*

Unter Verwendung von Satz 7 an Stelle von VI Satz 2 kann man nun den Beweis von VI Satz 4 und damit diesen Satz selbst ins Reelle übertragen und findet so unter Berücksichtigung von Satz 8:

Satz 9. *Durch jeden (reellen) Punkt X des zu einem mindestens eindimensionalen (reellen) Freigebilde G gehörenden Raums L_ϱ läßt sich ein (reeller) $L_{\varrho-1}$ legen, dessen Schnitt mit G (reell ist und) zum $L_{\varrho-1}$ gehört.*

Auf diesen Schnitt kann man nun denselben Satz anwenden und das Verfahren so lange wiederholen, bis der Schnitt nur aus einzelnen Punkten besteht. So findet man (mit $\nu = \varrho$ für Punktsysteme):

Satz 10. *Bei einem beliebigen (reellen) Freigebilde kann man durch jeden (reellen) Punkt des zugehörigen Raums einen L_ν legen bei passend gewähltem ν , der das Gebilde in $\nu + 1$ linear unabhängigen (reellen) Punkten trifft.*

Dies ist eine Verallgemeinerung von VI Satz 5. In derselben Weise lassen sich auch die weiteren Sätze VI 6 bis 11 und die zugehörigen Beweise auf beliebige Freigebilde und ins Reelle übertragen; insbesondere ergibt sich so als Verallgemeinerung von VI Satz 11:

Satz 11. *Beliebige Freigebilde ohne gemeinsame Punkte ergeben zusammen dann und nur dann ein (reelles) Freigebilde, wenn (sie reell sind und) die zugehörigen Räume sich in freier Lage befinden.*

Die Struktur beliebiger reduzibler Freigebilde ist damit noch nicht vollständig abgeklärt⁵⁾; für die weiteren Betrachtungen spielt dies aber keine Rolle. Es wird nur noch der folgende Satz gebraucht:

Satz 12. *Jeder nichtreelle Punkt P eines reellen Freigebildes G gehört einer in G enthaltenen reellen Freikurve an.*

Für eindimensionale Freigebilde ergibt sich dies aus Satz 5. Ist G mehrdimensional, so sei $\bar{P}$ der zu P konjugiert komplexe Punkt, $[G] = L_\varrho$ der zu G gehörige Raum und $P_0, \dots, P_\varrho$ seien $\varrho + 1$ linear unabhängige reelle Punkte auf G . Der Schnitt von G mit dem Raum $L_{\varrho-1} = [P_0, \dots, P_{\varrho-1}]$ ist dann wieder ein reelles, mindestens eindimensionales Freigebilde G' . Ist P in G' enthalten, so betrachte man G' an Stelle von G . Andernfalls trifft die Verbindungsgerade $g = [P, \bar{P}]$ den Raum $L_{\varrho-1}$ in einem reellen Punkt X , durch den sich nach Satz 10 im $L_{\varrho-1}$ ein L_ν legen läßt, der G' in $\nu + 1$ linear unabhängigen reellen Punkten trifft. Der Verbindungsraum $L_{\nu+1} = [g, L_\nu]$ trifft G noch in den Punkten P und $\bar{P}$, zusammen also in linear abhängigen Punkten und daher in einem

⁵⁾ Vgl. V, S. 443.

eindimensionalen reellartigen Freigebilde. Wären die Punkte P und $\bar{P}$ in diesem Gebilde isoliert, so könnte ihre Verbindungsgerade g den L_ν nach VI Satz 10 nicht treffen; P und $\bar{P}$ liegen daher entweder auf einer reellen oder auf zwei konjugiert imaginären dem Gebilde angehörenden Freikurven. Diese letzteren könnten sich nach Satz 4 höchstens in einem reellen Punkt S treffen. Dann könnte man aber im $L_{\nu+1}$ durch ν der im L_ν enthaltenen, von S verschiedenen reellen Punkte von G' unendlich viele L'_ν legen, welche die beiden Kurven in verschiedenen und folglich G in linear abhängigen Punkten, d. h. in mindestens eindimensionalen Gebilden treffen; der Schnitt des $L_{\nu+1}$ mit G wäre dann mindestens zweidimensional. P und $\bar{P}$ müssen also auf einer in G enthaltenen reellen Freikurve liegen.

5. Freigebilde und Hyperflächen zweiten Grades

Als Hyperfläche zweiten Grades oder kurz als $Q = 0$ werde eine Hyperfläche im L_n bezeichnet, die in den projektiven Koordinaten durch eine homogene Gleichung zweiten Grades mit reellen Koeffizienten in der Form $Q = 0$ dargestellt werden kann.

Ein Gebilde G wird von $Q = 0$ durchsetzt, wenn im Gebiet $Q > 0$ und im Gebiet $Q < 0$ Punkte von G vorhanden sind. Es gilt

Satz 13. Wenn die reellen Punkte eines reellen Freigebildes in einer Hyperfläche zweiten Grades enthalten sind, so ist das ganze Gebilde darin enthalten.

Für die Freikurven folgt dies nach Satz 4 aus bekannten Sätzen; es gilt daher nach Satz 12 auch für beliebige reelle Freigebilde.

Es läßt sich jetzt die Verallgemeinerung von II Satz I beweisen:

Satz 14. Wird ein zum L_ρ gehörendes reelles Freigebilde G von einer Hyperfläche zweiten Grades in $\rho + 1$ linear unabhängigen reellen Punkten getroffen und nicht durchsetzt, so ist es ganz in ihr enthalten.

Wenn G eine Freikurve, also eine rationale Normalkurve C^ρ des L_ρ ist, so folgt der Satz⁶⁾ aus der Parameterdarstellung der Kurve. Der Schnitt mit $Q = 0$ liefert Gleichungen höchstens 2 ρ -ten Grades, die algebraisch mindestens 2 $\rho + 2$ Wurzeln⁷⁾ besitzen, also identisch erfüllt sein müssen.

⁶⁾ Wie schon in II, S. 180 angegeben.

⁷⁾ Im Hinblick auf spätere Anwendungen beachte man, daß hier schon 2 $\rho + 1$ Wurzeln genügen, daß also eine Freikurve C^ρ , die von $Q = 0$ in ρ Berührungspunkten und noch einem weiteren Punkt getroffen wird, ganz in $Q = 0$ enthalten ist.

Nun sei G ein zusammenhängendes, eindimensionales Freigebilde. Ein solches besteht nach VI Satz 12 aus r Freikurven $C^{\mu_1}, \dots, C^{\mu_r}$, die sich in höchstens $r - 1$ Punkten treffen und so liegen, daß $\sum \mu_i = \varrho$ wird. Da G reell ist, sind nach Satz 5 auch diese Kurven und ihre gegenseitigen Schnittpunkte reell. Die Bezeichnung kann so gewählt werden, daß für $r > 1$ das aus den Kurven $C^{\mu_1}, \dots, C^{\mu_{r-1}}$ bestehende Gebilde G' ebenfalls zusammenhängend ist und von C^{μ_r} in einem Punkt S getroffen wird. Wenn nun $\mu_r + 1$ der $\varrho + 1$ linear unabhängigen reellen Punkte $P_0, \dots, P_\varrho$, in denen G von $Q = 0$ getroffen wird, auf der Kurve C^{μ_r} liegen, so muß diese, da sie nicht durchsetzt wird, ganz der Hyperfläche $Q = 0$ angehören. Der Punkt S ist von diesen $\mu_r + 1$ Punkten linear abhängig, also von den übrigen $\mu_1 + \dots + \mu_{r-1}$ auf G' liegenden linear unabhängig und ebenfalls in $Q = 0$ enthalten. Wenn also der zu beweisende Satz für Freigebilde, die aus $r - 1$ Kurven bestehen, als richtig angenommen wird, so muß G' und damit auch das aus r Kurven bestehende Gebilde G in $Q = 0$ enthalten sein.

Von den linear unabhängigen Punkten $P_0, \dots, P_\varrho$ liegen aber wegen $\sum \mu_i = \varrho$ mindestens μ_r auf der Kurve C^{μ_r} . Wenn die übrigen $\varrho + 1 - \mu_r$ alle in G' enthalten sind, so ergibt die Induktionsannahme wieder, daß G' und somit S in $Q = 0$ enthalten ist. S ist jetzt aber von den μ_r auf C^{μ_r} liegenden Punkten linear unabhängig, also ist auch diese Kurve und damit G selbst in $Q = 0$ enthalten.

Ist weiter G ein eindimensionales Freigebilde, das aus mehreren getrennten Teilen besteht, deren zugehörige Räume die Dimensionen ϱ_i besitzen, so befinden sich diese Räume nach VI Satz 11 in freier Lage und es ist daher $\varrho + 1 = \sum_i (\varrho_i + 1)$. Die Treffpunkte $P_0, \dots, P_\varrho$ mit $Q = 0$ müssen sich also so verteilen, daß auf die einzelnen zusammenhängenden Teile je $\varrho_i + 1$ davon entfallen; diese Teile und damit G selbst sind somit in $Q = 0$ enthalten.

Satz 14 ist damit für die eindimensionalen Freigebilde bewiesen. In ganz ähnlicher Weise läßt er sich auch für die Freisysteme herleiten. Dies ist jedoch nicht notwendig, da sich der allgemeine Fall beliebiger Freigebilde auf den der eindimensionalen Gebilde zurückführen läßt, wie nun gezeigt werden soll.

Es werde angenommen, daß der Satz für μ Treffpunkte $P_0, \dots, P_{\mu-1}$ und ihren Verbindungsraum $L_{\mu-1}$ erfüllt sei; er gilt insbesondere für $\mu = 1$. Es ist zu zeigen, daß er dann auch für $\mu + 1$ Treffpunkte im L_μ richtig ist. Der Schnitt des reellen Freigebildes G mit dem $L_{\mu-1} = [P_0, \dots, P_{\mu-1}]$ sei also in $Q = 0$ enthalten und P sei ein reeller Punkt von G ,

der im $L_\mu = [P_0, \dots, P_\mu]$ gelegen sei. Für $P = P_\mu$ liegt P auf $Q = 0$; für $P \neq P_\mu$ trifft die Gerade $[P, P_\mu]$ den $L_{\mu-1}$ in einem reellen Punkt X , durch den sich nach Satz 10 ein L_ν legen läßt, der den Schnitt von G mit dem $L_{\mu-1}$ in $\nu + 1$ linear unabhängigen reellen Punkten trifft; diese liegen nach der gemachten Annahme in $Q = 0$. Der Verbindungsraum $L_{\nu+1} = [L_\nu, P_\mu]$ schneidet dann G in einem reellen, höchstens eindimensionalen Gebilde, das den Punkt P enthält und nach dem für solche Gebilde schon Bewiesenen zu $Q = 0$ gehört. Da also jeder reelle und somit nach Satz 13 auch jeder beliebige im L_μ gelegene Punkt von G in $Q = 0$ enthalten ist, so folgt Satz 14 durch Induktion für beliebige reelle Freigeilde.

(Eingegangen den 25. Juni 1943.)