Über die Möglichkeit einiger diophantischer Gleichungen 3. und 4. Grades in quadratischen Körpern.

Autor(en): **Fogels, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **10 (1937-1938)**

PDF erstellt am: **06.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-11000

Über die Möglichkeit einiger diophantischer Gleichungen 3. und 4. Grades in quadratischen Körpern

Von E. Fogels, Riga

§ 1. Die Möglichkeit der diophantischen Gleichung $X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$ in quadratischen Körpern hat zuerst Herr *Fueter*[1]) mit Hilfe einer idealtheoretischen Methode untersucht. Eine elementare Methode hat *W. Burnside*[2]) benutzt und gezeigt, daß diese Gleichung unendlich viele Lösungen durch Zahlen quadratischer Körper besitzt. Herr *Aigner* zeigte[3]), daß $K(\sqrt{-7})$ der einzige quadratische Körper ist, in dem die Gleichung $X^4 + Y^4 = Z^4$ Lösungen besitzt und diese sind den Zahlen $\frac{1+\sqrt{-7}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{-7}}{2}$, 1 proportional. Ich habe hier versucht in dieser Richtung ein wenig weiter zu gehen, indem ich die allgemeine Gleichung 3. Grades und einige Gleichungen von der Form $X^4 + AY^4 + BZ^4 = 0$ untersuche.

§ 2. Wir setzen voraus, daß

$$f(x, y, z, \ldots) = 0 \tag{1}$$

eine diophantische Gleichung 3. Grades mit *rationalen* Koeffizienten und $x, y, z, \ldots$ eine Lösung durch Zahlen des quadratischen Körpers $K(\sqrt{m})$ sei, wobei $x, y, z, \ldots$ nicht alle rational sind. Es sei z. B. x eine primitive Größe des Körpers und $y = hx + h_1$, $z = kx + k_1, \ldots$ ($h, \ldots, k_1$ rational). Nun ist aber die Gleichung 3. Grades $f(x, hx + h_1, kx + k_1, \ldots) = 0$ oder

$$F(x) = 0$$

durch eine algebraische Größe 2. Grades befriedigt, sie muß also eine rationale Wurzel $x = \alpha$ besitzen. (1) hat also die rationale Lösung

$$x = \alpha, \quad y = h\alpha + h_1, \quad z = k\alpha + k_1, \ldots$$

---

1) Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie 1913.

2) Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 14 (1915).

3) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 43 (1934).

Setzen wir in umgekehrter Weise voraus, daß $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ eine rationale Lösung der Gleichung (1) sei, und suchen wir alle Lösungen durch Zahlen quadratischer Körper, die dieser rationalen Lösung entsprechen. Wir bestimmen die rationalen Zahlen $h_1, k_1, \ldots$ aus den Gleichungen $\beta = h\alpha + h_1$, $\gamma = k\alpha + k_1, \ldots$. Es ist also $h_1 = \beta - h\alpha$, $k_1 = \gamma - k\alpha, \ldots$, oder $y = h(x - \alpha) + \beta$, $z = k(x - \alpha) + \gamma, \ldots$. Die gesuchten Lösungen sind durch die Formel gegeben:

$$f[\alpha + (x - \alpha)\,, \quad \beta + h(x - \alpha)\,, \quad \gamma + k(x - \alpha)\,, \ldots] = 0\,, \tag{2}$$

wo $h, k, \ldots$ beliebig rational und x eine Lösung der quadratischen Gleichung $\varphi(x) = 0$ ist, die wir erhalten, wenn wir (2) durch $x - \alpha$ dividieren. Es ist also

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} + h\frac{\partial f}{\partial \beta} + k\frac{\partial f}{\partial \gamma} + \cdots\right) + \frac{x-\alpha}{2\,!}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} + h\frac{\partial f}{\partial \beta} + k\frac{\partial f}{\partial \gamma} + \cdots\right)^2 + \\ + \frac{(x-\alpha)^2}{3\,!}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} + h\frac{\partial f}{\partial \beta} + k\frac{\partial f}{\partial \gamma} + \cdots\right)^3 = 0\,.\end{aligned} \tag{3}$$

Ist jedoch bei gewählten $h, k, \ldots$ die Diskriminante der letzten Gleichung ein vollständiges Quadrat, dann ist es möglich, daß die Formel (2) neue rationale Lösungen der Gleichung (1) liefert. Auf die Frage, ob zwei verschiedenen rationalen Lösungen dieselben irrationalen Lösungen entsprechen, werde ich hier nicht eingehen.

Eine Gleichung wie

$$X^3 + Y^3 + AZ^3 = 0 \tag{4}$$

hat jedenfalls die rationale Lösung $\alpha, -\alpha, 0$. Dieser entspricht die irrationale Lösung $x, h(x - \alpha) - \alpha, k(x - \alpha)$, wobei x eine Wurzel der quadratischen Gleichung $(Ak^3 + h^3 + 1)x^2 + (-2Ak^3 - 3h^2 - 2h^3 + 1)\alpha x + [Ak^3 + (h + 1)^3]\alpha^2 = 0$ ist. Es genügt hier $\alpha = -1$, $h = 0$ zu setzen; dann kommen wir nach einer kleinen Umgestaltung auf die Lösung

$$\{3 + \sqrt{-3(4Ak^3 + 1)}\}^3 + \{3 - \sqrt{-3(4Ak^3 + 1)}\}^3 + A(6k)^3 = 0\,,$$

die für $A = 1$ *W. Burnside* gegeben hat.

Hieraus läßt sich zeigen, daß mit jedem rationalen A die Gleichung (4) in unendlich vielen quadratischen Körpern lösbar ist und daß sie in jedem dieser Körper unendlich viele Lösungen besitzt. Das erste wird klar, wenn man bemerkt, daß die Gleichung $4Ax^3+1=my^2$ für jedes nichtquadratische m nur eine begrenzte Anzahl ganzer rationaler Lösungen hat. Die zweite Behauptung wird aber dadurch begründet, daß man nach dem bekannten Tangentenverfahren von einer Lösung $(x, y, z, \ldots)$ der Gleichung (1) ausgehend im allgemeinen unendlich viele Lösungen konstruieren kann.

Es lassen sich nun aber Gleichungen

$$X^3+AY^3+BZ^3=0$$

anführen, die außer $X=Y=Z=0$ keine andere rationale Lösung besitzen. So ist es z.B. der Fall mit der Gleichung $X^3+7Y^3+AZ^3=0$, wo A eine ganze rationale Zahl $\equiv \pm 2$ oder $\pm 3 \pmod 7$ ist. Diese Gleichungen haben auch keine Lösung durch Zahlen irgendwelcher quadratischer Körper. Denn nach (3) reduziert sich in diesem Falle die Gleichung $\varphi(x)=0$ auf $x^2(1+Ah^3+Bk^3)=0$, die aber keine quadratisch irrationale Lösungen besitzt.

§ 3. Wir betrachten nun die Gleichung

$$X^4+AY^4-BZ^4=0, \tag{5}$$

wo A und B ganze *rationale* Zahlen sind. Besitzt (5) eine Lösung, für die X, Y, Z von 0 verschiedene Zahlen des quadratischen Körpers $K(\sqrt{m})$ sind, dann können wir setzen:

$$X=a_1+b_1\sqrt{m}\,, \quad Y=a_2+b_2\sqrt{m}\,, \quad Z=c\ .$$

Hier sind a_1, a_2, b_1, b_2, c ganze rationale Zahlen mit größtem gemeinsamen Teiler $=1$. Aus der Gleichung $(a_1+b_1\sqrt{m})^4+A(a_2+b_2\sqrt{m})^4=Bc^4$, wo $\sqrt{m}$ eine irrationale Zahl ist, erhalten wir das System

$$(a_1^2b_1^2+Aa_2^2b_2^2)\,[(a_1^2+mb_1^2)^2+4Ama_2^2b_2^2]=ABc^4a_2^2b_2^2\,,$$
$$(a_1^2b_1^2+Aa_2^2b_2^2)\,[A(a_2^2+mb_2^2)^2+4ma_1^2b_1^2]=Bc^4a_1^2b_1^2\,,$$

oder, indem wir

$$a_1^2b_1^2+Aa_2^2b_2^2=e \tag{6}$$

setzen, das System

$$\left.\begin{aligned} eb_1^4m^2+2e(e+Aa_2^2b_2^2)m+ea_1^4-ABc^4a_2^2b_2^2&=0\,,\\ Aeb_2^4m^2+2e(e+a_1^2b_1^2)m+Aea_2^4-Bc^4a_1^2b_1^2&=0\,.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Da m rational ist, sollen die Diskriminanten $Ae[4e^2 + B(b_1c)^4]a_2^2b_2^2$, $e[4e^2 + AB(b_2c)^4]a_1^2b_1^2$ gleich Quadraten zweier rationaler Zahlen sein. So erhalten wir das System

$$Ae(4e^2 + Bx^4) = u^2 , \qquad e(4e^2 + ABy^4) = v^2 , \tag{8}$$

wo die Unbekannten e, $x = b_1c$, $y = b_2c$, u und v ganze rationale Zahlen sind. Unter der Bedingung

$$a_1a_2b_1b_2 \neq 0 \tag{9}$$

ist die triviale Lösung $e = 0$ nach (7) nicht vorhanden. Ist jedoch (9) nicht erfüllt, so ist eine von den Zahlen X, Y entweder rational, oder eine rein quadratische Irrationalität. Daraus folgt, daß auch die andere Zahl derselben Natur ist, und wir erhalten die eine oder die andere der Gleichungen

$$a^2 + Ab^4 - Bc^4 = 0, \quad a^4 + Ab^2 - Bc^4 = 0, \quad a^4 + Ab^4 - Bc^2 = 0, \tag{10}$$

wo a, b, c von 0 verschiedene ganze rationale Zahlen sind.

Wir benutzen (8) und (10), um verschiedene Fälle der Gleichung (5) zu diskutieren. Setzen wir z. B. $A = -B = 1$, dann ist keine von den Gleichungen (10) möglich und in (8) oder

$$e(4e^2 - x^4) = u^2 , \qquad e(4e^2 - y^4) = v^2 \tag{8'}$$

ist nach (6) $e > 0$. Es genügt hier, daß nur die erste der beiden Gleichungen (8′) diskutiert wird.

Setzen wir erstens $e = \alpha^2$, dann erhalten wir die Gleichung $4\alpha^4 - x^4 = u_1^2$ mit der einzigen rationalen Lösung[4] $x = 0$. Dieser aber entsprechen nur triviale Lösungen der Gleichung (5).

Es geht also wenigstens eine Primzahl p in einer ungeraden Potenz in e auf. Wir setzen $e = p^{2k+1}\alpha$, $x \doteq p^h x_1 (\alpha x_1, p$ teilerfremd, $kh \geqslant 0)$ und erhalten $s = 4e^2 - x^4 = 4p^{4k+2}\alpha^2 - p^{4h}x_1^4$. Ist $p \neq 2$, dann enthalten die Glieder im letzten Ausdruck ungleiche Potenzen von p, und die Summe s enthält p in keiner höheren Potenz als p^ν, wo $\nu = \mathrm{Min}\,(4k+2, 4h)$ eine gerade Zahl ist. Es ist also $p = 2$ oder $e = 2\alpha^2$. Aus (8′) erhalten wir die Gleichung $(2\alpha)^4 - x^4 = 2u_1^2$ mit der Lösung[5] $4\alpha^2 = x^2$. In ähnlicher Weise erhalten wir aus der zweiten Gleichung (8′) $4\alpha^2 = y^2$. Hieraus folgen die Beziehungen

$$b_1^2 = b_2^2 = b^2 , \qquad c^2 = 2(a_1^2 + a_2^2) .$$

---

[4]) *L. Euler*, Opera omnia (1) 1, 1911, p. 442—3.

[5]) ibid.

Die Gleichungen (7) oder

$$b^4m^2 + 2b^2m(a_1^2 + 2a_2^2) + (a_1^2 + 2a_2^2)^2 = 0 ,$$
$$b^4m^2 + 2b^2m(a_2^2 + 2a_1^2) + (a_2^2 + 2a_1^2)^2 = 0$$

haben bezw. die Lösungen $b^2m = -a_1^2 - 2a_2^2$, $b^2m = -a_2^2 - 2a_1^2$. Durch Vergleich der letzteren erhalten wir die Beziehungen

$$a_1^2 = a_2^2 = a^2 , \quad b^2m = -3a^2 .$$

Hieraus folgt $m = -3$, $b = \pm a$, $c = \pm 2a$. Wir setzen $a = \frac{1}{2}$ und konstruieren die Lösungen

$$\pm \varrho^2 , \quad \pm \varrho , \quad \pm 1 \quad \left(\varrho = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right) \tag{11}$$

der Gleichung

$$X^4 + Y^4 + Z^4 = 0 .$$

Die letzte ist also nur in dem Körper $K(\sqrt{-3})$ möglich und alle ihre Lösungen sind den Zahlen (11) proportional[6]).

In derselben Weise wird gezeigt, daß die Gleichung

$$X^4 - Y^4 - Z^4 = 0$$

nur in dem quadratischen Körper $K(\sqrt{-7})$ nicht triviale Lösungen besitzt, und daß dieselben den Zahlen $\pm \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$, $\pm \frac{3 \mp \sqrt{-7}}{2}$, ± 2 proportional sind. Im wesentlichen ist das dieselbe Lösung, wie die von Herrn *Aigner*.

Die Gleichung $\qquad X^4 + Y^4 - 8Z^4 = 0$

hat Lösungen mit $XYZ \neq 0$ nur in den quadratischen Körpern $K(\sqrt{2})$ und $K(\sqrt{-2})$. Alle Lösungen sind, bis auf den Proportionalitätsfaktor, durch die Formeln

$$(\sqrt{2})^4 + (\pm\sqrt{2})^4 - 8 = 0 , \quad (\sqrt{-2})^4 + (\pm\sqrt{-2})^4 - 8 = 0$$

gegeben.

---

[6]) Mit den Beziehungen $\varrho^3 = 1$, $\varrho^2 + \varrho + 1 = 0$ wird bewiesen, daß im allgemeinen jede *Fermat*sche Gleichung $X^n + Y^n + Z^n = 0$, wo n ganz und nicht durch 3 teilbar, durch die Zahlen $X = 1$, $Y = \varrho$, $Z = \varrho^2$ befriedigt werden kann.

Wir betrachten noch die Gleichung

$$X^4 + Y^4 - 2p^2Z^4 = 0 \ , \tag{12}$$

wo p eine Primzahl $\equiv 3 \pmod 8$ ist. Die erste oder die zweite der Gleichungen (10) ist nur dann möglich, wenn sie durch p^2 gekürzt werden kann. Dann kommen wir auf eine Gleichung $u^2 + p^2v^2 = 2w^2$, die nur nebst $\left(\frac{2}{p}\right) = +1$ bestehen kann. Die dritte der Gleichungen (10) hat die einzige Lösung $a^2 = b^2 = c^2 = p^2$. Dieser entsprechen die Lösungen von (12)

$$(\sqrt{p})^4 + (\pm\sqrt{p})^4 - 2p^2 = 0 \ , \quad (\sqrt{-p})^4 + (\pm\sqrt{-p})^4 - 2p^2 = 0 \, . \tag{13}$$

Um nun andere Lösungen der Gleichung (12) zu finden, setzen wir in (8) der Reihe nach $e = \alpha^2, 2\alpha^2, p\alpha^2$ und $2p\alpha^2$. Im ersten Falle kommen wir dann auf eine Gleichung $\alpha^4 + 8p^2\beta^4 = \gamma^2$, deren Unmöglichkeit mit einer *descente infinie* bewiesen werden kann. Die zweite Annahme liefert die Gleichung

$$8\alpha^4 + p^2x^4 = u^2 \, .$$

Ist sie durch p^2 nicht kürzbar, dann gilt die Beziehung $\pm\, px^2 = a^2 - 2b^2$, wo a eine ungerade Zahl ist. Wir haben hier $p \equiv \pm 1 \pmod 8$.

In den zwei übrigen Fällen finden wir eine Gleichung $\alpha^4 + 8\beta^4 = p\gamma^2$, die nur mit $p \equiv 1 \pmod 8$ bestehen kann.

Die Gleichung (12) ist also nur in den quadratischen Körpern $K(\sqrt{p})$ und $K(\sqrt{-p})$ möglich. Alle Lösungen sind, bis auf den Proportionalitätsfaktor, durch die Formel (13) gegeben.

§ 4. Es seien noch andere ähnliche Ergebnisse mitgeteilt. Zu diesem Zweck bezeichnen wir die Gleichung $X^4 + AY^4 + BZ^4 = 0$ mit $(1, A, B)$; unter ν verstehen wir stets 1 oder 3, $n \neq 0$ sei beliebig rational und p, q, r, r_1 positive Primzahlen, wobei $p \equiv 3 \pmod 8$, $q \equiv 5 \pmod 8$, $r_1^\nu \equiv 11 \pmod{16}$, $r^\nu \equiv 7$ oder $11 \pmod{16}$ ist. Dann läßt es sich zeigen, daß die Gleichungen

$$(1, n^2, 2),\ (1, 1, \pm 4),\ (1, -1, \pm 4),$$

$$(1, n^2, -p^\nu),\ (1, n^2, 2p^\nu),\ (1, n^2, 4p^\nu),\ (1, n^2, -8p^\nu),\ (1, 1, -p^2),$$

$$(1, -4, -p^2),\ (1, 4, p^2),\ (1, 1, 4p^2),\ (1, n^2, 8p^2),\ (1, n^2, 2q^\nu),$$

$$(1, 1, -8q^\nu),\ (1, 1, q^2),\ (1, \pm 4, q^2),\ (1, n^2, 2q^2),\ (1, 1, -4q^2),$$

$$(1, 1, -8q^2),\ (1, n^2, r^\nu),\ (1, n^2, -4r^\nu),\ (1, -1, \pm r_1^\nu)$$

in keinem quadratischen Körper Lösungen mit $XYZ \neq 0$ besitzen. Für den Beweis benutzt man stets die Unmöglichkeit verschiedener Gleichungen in rationalen Zahlen von der Form[7]) $ax^4 + by^4 = cz^2$.

Endlich will ich noch einige Gleichungen anführen, die unendlich viele Lösungen durch Zahlen quadratischer Körper besitzen. So ist es der Fall mit der Gleichung

$$(1, -1, -2) ,$$

deren allgemeine Lösung gegeben ist durch die Formel $\alpha^4 - (\sqrt{\gamma})^4 - 2\beta^4 = 0$, wo α, β, γ rationale Lösungen der Gleichung $\alpha^4 - 2\beta^4 = \gamma^2$ sind.

Die Gleichung

$$(1, 1, -2)$$

wird gelöst durch die Formeln

$$\pm X^2 = \pm Y^2 = Z^2 \; ; \quad (\sqrt{c})^4 + b^4 - 2a^4 = 0 \; ;$$

$$(\alpha + \sqrt{-3\alpha^2 + \gamma})^4 + (\alpha - \sqrt{-3\alpha^2 + \gamma})^4 - 2\beta^4 = 0 \; ,$$

wo die rationalen Zahlen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ den Gleichungen $2a^4 - b^4 = c^2$, bezw. $8\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2$ genügen.

Die Gleichung $\qquad (1, \; 1, \; 8)$

hat die Lösung $(\alpha + \sqrt{-3\alpha^2 + 2\gamma})^4 + (\alpha - \sqrt{-3\alpha^2 + 2\gamma})^4 + 8 = 0$. Hier genügen die rationalen Zahlen α, β, γ der Gleichung $2\alpha^4 - \beta^4 = \gamma^2$.

Ich behaupte nicht, daß die angeführten Lösungen der zwei letzten Gleichungen die einzigen sind.

§ 5. Die Frage über die Möglichkeit einer diophantischen Gleichung in irgendwelchen quadratischen Körpern ist gleichwertig der Frage nach den rationalen Parameterwerten $a, b, \ldots$ mit denen eine bestimmte Gleichung $f(x, a, b, \ldots) = 0$ reduzibel wird. So sind z. B. in jedem Falle, wo die Gleichung $(1, A, B)$ in keinem quadratischen Körper Lösungen besitzt, die Gleichungen

$$x^4 + A(ax + b)^4 + B = 0 \; , \quad (ax + b)^4 + Ax^4 + B = 0$$

für alle von 0 verschiedenen rationalen Zahlen a, b irreduzibel.

---

[7]) Die rationalen Lösungen der Gleichung $ax^4 + by^4 = cz^2$ sind für viele ganzzahlige a, b, c von *L. Euler* gegeben (Opera omnia (1) 1, 1911, p. 436—445). Einige andere Fälle dieser Gleichung sind u. a. von mir gefunden und werden in den Acta Universitatis Latviensis erscheinen.

(Eingegangen den 21. Oktober 1937.)