BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Transformation de Laplace et équations différentielles

par Ch. BLANC, professeur à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne.

La recherche de l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants est un problème assez simple ; il ne se complique guère lorsqu'il s'agit d'un système d'équations : la méthode est donnée dans tous les traités d'analyse. Mais, le plus souvent, on doit chercher une intégrale particulière ; la détermination des constantes d'intégration conduit alors à la résolution d'un système d'équations algébriques linéaires dont on peut dire, à juste titre, qu'elle constitue « un chiffrage fastidieux sans difficulté ».

Lorsqu'il s'agit d'équations linéaires aux dérivées partielles, la recherche de l'intégrale générale ne va plus aussi facilement ; le procédé de séparation des variables, qu'on emploie si souvent, ne peut être considéré comme une méthode générale. En outre, on est ensuite obligé de déterminer des constantes ou fonctions arbitraires, ce qui représente de nouveau un calcul inutilement long. On voit du reste sans peine qu'il est peu « économique » de chercher une intégrale générale pour ensuite la particulariser, surtout si les deux opérations exigent de longs calculs.

La *transformation de Laplace* permet de calculer très simplement l'intégrale particulière lorsque les conditions qui fixent les arbitraires sont des *conditions initiales* ; elle remplace alors les dérivations par des multiplications, ce qui transforme l'équation différentielle donnée en une équation algébrique linéaire.

Nous allons donner un exposé de ce qu'il faut connaître de la transformation de Laplace pour pouvoir l'appliquer à l'intégration d'équations différentielles. Nous ne pourrons être complet : les théorèmes, pour être démontrés en toute rigueur et en toute généralité, exigent de longs développements. Nous signalerons en passant les points qui demanderaient des compléments : le lecteur curieux d'en savoir plus trouvera ces compléments dans le bel ouvrage de M. Dœtsch [1]. A la fin de cet exposé, nous donnerons quelques exemples d'application de la transformation de Laplace à des équations qui se rencontrent en technique.

I. Définitions et théorèmes.

Soit $F(t)$ une fonction de t, définie pour $t \geqq 0$. Si l'intégrale

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-ts} F(t)\, dt \qquad (1)$$

a un sens, on dit que $f(s)$ est la *transformée* de $F(t)$ par la transformation de Laplace. La relation (1) définit la *transformation de Laplace.* $F(t)$ est la *fonction génératrice.* On écrira pour abréger

$$f(s) = \mathfrak{L}\{F(t)\}.$$

[1] *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* (Berlin, éd. Springer 1937).