Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 86 (1960)

Heft: 6

Artikel: Étude expérimentale et théorique de la répartition des tensions dans les plaques circulaires fléchies d'épaisseur variable

Autor: Favre, Henry / Schumann, Walter / Martinola, Marzio

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64475

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

86e année Lausanne, 12 mars 1960 N° 6

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL
de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (S.V.I.A.)
de la Section genevoise de la S.I.A.
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'E.P.F. (Ecole polytechnique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE
Président: J. Calame, ing. à Genève
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève
Membres:
Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Grosgurin, arch.; E. Martin, arch.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.; M. Renaud, ing.; Ch. Thévenaz, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION
de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: D. Bonnard, ing.
Membres: M. Bridel; J. Favre, arch.; R. Neeser, ing.; A. Robert, ing.; J. P. Stucky, ing.
Adresse: Avenue de la Gare 10, Lausanne

RÉDACTION
Vacat
Rédaction et Editions de la S. A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Adresse: Case Chauderon 475, Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse	Fr. 28.—	Etranger	Fr. 32.—
Sociétaires	»	» 23.—	»	» 28.—
Prix du numéro	»	» 1.60		

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande », N° II. 57 75, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, changements d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie La Concorde, Terreaux 29, Lausanne

ANNONCES
Tarif des annonces:

1/1 page	Fr. 290.—
1/2 »	» 150.—
1/4 »	» 75.—
1/8 »	» 37.50

Adresse: Annonces Suisses S. A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. Lausanne et succursales

SOMMAIRE

Etude expérimentale et théorique de la répartition des tensions dans les plaques circulaires fléchies d'épaisseur variable, par Henry Favre, Dr ès sc. techn., Walter Schumann, Dr ès sc. nat. et Marzio Martinola, Dr ès sc. techn (suite et fin).
Actualité industrielle (9).
Divers : Auto-route Genève-Lausanne. — Le canton de Vaud pratique une politique en matière de logements.
Bibliographie.— Les Congrès. — Documentation générale. — Informations diverses.

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE ET THÉORIQUE DE LA RÉPARTITION DES TENSIONS DANS LES PLAQUES CIRCULAIRES FLÉCHIES D'ÉPAISSEUR VARIABLE

par

HENRY FAVRE
Dr ès sc. techn.
Professeur à l'E.P.F.

WALTER SCHUMANN
Dr ès sc. nat.
Privat-docent à l'E.P.F.

MARZIO MARTINOLA
Dr ès sc. techn.
Assistant à l'E.P.F.

(Suite et fin) *

§ 4. Valeurs théoriques des tensions dans les plaques circulaires étudiées

A. *Plaque circulaire où l'épaisseur subit une variation brusque, n'entraînant pas de discontinuité du feuillet moyen (fig. 1 A)*

Les tensions se déterminent sans difficulté, en appliquant la théorie de *Kirchhoff*. On peut également obtenir leurs valeurs en posant $N = 0$ dans les formules (1) et (2) ci-dessous, relatives à la seconde plaque, et en remplaçant h_1 par h_0 dans (2).

* Voir *Bulletin technique* du 13 février 1960.

B. *Plaque circulaire où l'épaisseur subit une variation brusque, entraînant une discontinuité du feuillet moyen (fig. 1 B)*

Ce cas a été traité récemment par *M. Martinola*, qui a montré la nécessité d'introduire dans le calcul les forces N agissant dans les feuillets moyens des deux parties de la plaque [16]. Nous donnons directement ci-après, non pas les valeurs des moments et des efforts N, mais celles des tensions elles-mêmes [17].

[16] [2], p. 41 et suiv.

[17] Les formules (1) et (2) s'obtiennent en remplaçant, dans les relations (17), (18) de [2], p. 49, M_r, M_t par leurs valeurs (13) et (15) du mémoire cité.

Domaine $r_o < r < b$:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{12}{h_0^3}\left\{\frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\operatorname{Log}\left(\frac{b}{r}\right)+\frac{1-\nu}{4}\left(\frac{r_0^2}{r^2}-\bar{\rho}^2\right)+\frac{\varepsilon}{2}\right]-\right.\\
&\left.-N(\eta-t)\right\}\left(z-\frac{h_o}{2}\right)+\frac{N}{h_0},\\
\sigma_t &= \frac{12}{h_0^3}\left\{\frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\operatorname{Log}\left(\frac{b}{r}\right)+1-\nu-\frac{1-\nu}{4}\left(\frac{r_0^2}{r^2}+\bar{\rho}^2\right)+\frac{\varepsilon}{2}\right]-\right.\\
&\left.-N(\eta-t)\right\}\left(z-\frac{h_0}{2}\right)+\frac{N}{h_0};
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Domaine $b < r < a$:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{12}{h_1^3}\left\{\frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\left(\operatorname{Log}\left(\frac{a}{r}\right)+\frac{\operatorname{Log}\rho}{\rho^2-1}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\right)+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{\varepsilon}{2(\rho^2-1)}\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right)\right]+\frac{Nt}{\rho^2-1}\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right)\right\}\left(z-\frac{h_1}{2}\right)+\\
&+\frac{N\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right)}{h_1(\rho^2-1)},\\
\sigma_t &= \frac{12}{h_1^3}\left\{\frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\left(\operatorname{Log}\left(\frac{a}{r}\right)+\frac{1-\nu}{1+\nu}+\right.\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{\operatorname{Log}\rho}{\rho^2-1}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\right)-\frac{\varepsilon}{2(\rho^2-1)}\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)\right]-\\
&\left.-\frac{Nt}{\rho^2-1}\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)\right\}\left(z-\frac{h_1}{2}\right)-\frac{N\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)}{h_1(\rho^2-1)};
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

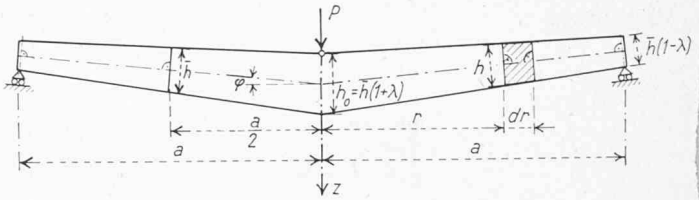


Fig. 12. — Coupe méridienne d'une coque d'épaisseur linéairement variable, où le feuillet moyen est un cône circulaire quasi plan.

force axiale P, appliquée au centre de la face supérieure. Des formules obtenues, il sera ensuite facile de déduire celles que nous cherchons.

1° *Equations générales*

Les conditions d'équilibre, des forces agissant sur l'élément de volume infinitésimal de la figure 13, sont exprimées par les équations connues [19]:

$$M_r - M_t + \frac{dM_r}{dr}\,r - Q_r\,\frac{r}{\cos\varphi} = 0\,, \qquad (3)$$

$$N_r - N_t + \frac{dN_r}{dr}\,r = 0\,, \qquad (4)$$

$$Q_r + \frac{dQ_r}{dr}\,r - N_t \operatorname{tg}\varphi = 0\,. \qquad (5)$$

Pour obtenir une relation où figure la force P, écrivons que la somme des projections verticales des forces,

$$\text{où } N = \frac{3P}{4\pi\,h_1}\;\frac{(\bar{\lambda}-1)(1-\nu)(2-\bar{\rho}^2+\varepsilon)(\rho^2-1)}{\bar{\lambda}^2\left[(1-\nu)(\rho^2-1+\bar{\lambda})+\rho^2(1+\nu)\bar{\lambda}\right]+\dfrac{3(\rho^2-1)(\bar{\lambda}-1)^2(1-\nu)\left[\rho^2(1+\nu)+1-\nu\right]}{\rho^2\left[1+\nu+k(1-\nu)\right]+(1-\nu)(1-k)}},$$

et

$$\varepsilon = \frac{4(1+\nu)\rho^2\operatorname{Log}\rho+(1-\nu)(\rho^2-1)\left[2(1-k)+k\bar{\rho}^2\right]}{(\rho^2-1)\left[k(1-\nu)+\nu\right]+\rho^2+1},$$

$$\rho = \frac{a}{b}\,,\ \bar{\rho} = \frac{r_0}{b}\,,\ k = \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^3,$$

$$\eta = \frac{h_0-h_1}{2},\quad t = \frac{h_1}{2}\,\frac{k(\bar{\lambda}-1)(1-\nu)(\rho^2-1)}{(1+\nu)\rho^2+(1-\nu)\left[1+k(\rho^2-1)\right]},$$

$$\bar{\lambda} = \frac{h_0}{h_1}\,,$$

ν désignant le coefficient de Poisson.

C. *Plaque circulaire d'épaisseur linéairement variable (fig. 1 C)*

Pour obtenir commodément les valeurs des tensions dans une telle plaque, nous nous occuperons tout d'abord d'un cas plus général, celui d'une *coque d'épaisseur linéairement variable, où le feuillet moyen est une surface conique de révolution quasi plane*, c'est-à-dire où l'angle φ formé par une génératrice et un plan perpendiculaire à l'axe est supposé petit (fig. 12).

Nous admettons que cette coque soit simplement appuyée le long du contour [18] et qu'elle supporte une

[18] Dans la théorie qui va suivre, nous avons supposé que les réactions étaient perpendiculaires au feuillet moyen. Cette condition n'a été qu'imparfaitement réalisée dans nos expériences, où les réactions étaient parallèles à l'axe z. Les erreurs qu'entraîne cette simplification sont négligeables dans notre cas.

appliquées à l'élément fini de la figure 14, doit être nulle, ce qui donne, après simplifications :

$$Q_r = N_r \operatorname{tg}\varphi - \frac{P}{2\pi r\cos\varphi}\,. \qquad (6)$$

Remarquons que cette équation n'est pas indépendante des trois précédentes. En introduisant en effet la valeur (6) de Q_r dans (5), on obtient la relation (4). Les conditions d'équilibre nous donnent donc en définitive seulement trois équations. Comme les forces intérieures inconnues M_r, M_t, N_r, N_t, Q_r sont au nombre de cinq, il est nécessaire de faire intervenir les déformations du feuillet moyen, pour obtenir des équations en nombre suffisant.

[19] Ces équations se déduisent directement de celles indiquées dans [8], p. 451 ou dans [9], p. 80 et 81.

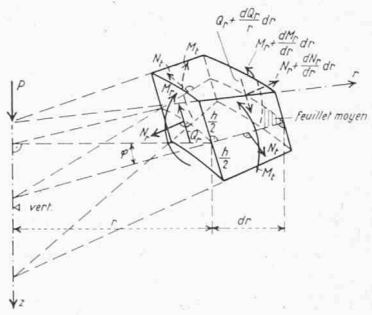


Fig. 13. — Forces agissant sur un élément infinitésimal de la coque de la figure 12.

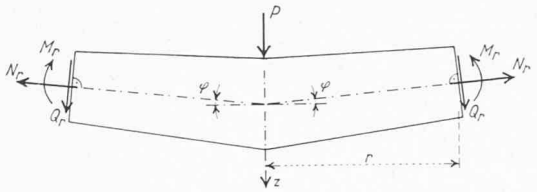
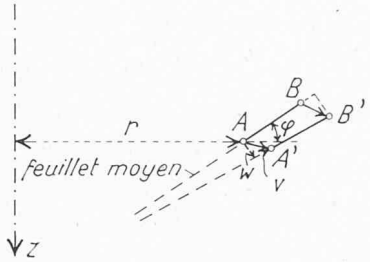


Fig. 14. — Forces agissant sur un élément fini de la coque de la figure 12.

Désignons, dans ce but, par v et w les composantes, suivant la tangente et la normale au méridien, du déplacement d'un point A de ce feuillet (fig. 15). Entre les

Fig. 15.



quantités M_r, M_t, N_r, N_t d'une part, v, w d'autre part, existent des relations générales connues [20], qui, dans le cas particulier étudié, deviennent :

$$\left.\begin{aligned} M_r &= -D\cos^2\varphi\left(w'' + \frac{\nu}{r}w'\right), \\ M_t &= -D\cos^2\varphi\left(\frac{1}{r}w' + \nu w''\right), \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} N_r &= K\cos\varphi\left[v' + \frac{\nu}{r}(v + w\,\mathrm{tg}\,\varphi)\right], \\ N_t &= K\cos\varphi\left[\frac{1}{r}(v + w\,\mathrm{tg}\,\varphi) + \nu v'\right], \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

où $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, $K = Eh/(1-\nu^2)$, h étant l'épaisseur à la distance horizontale r du sommet du feuillet moyen, E le module d'élasticité et ν, le coefficient de *Poisson*. Enfin v', v'', ..., w', w'', ... désignent les dérivées successives de v, w par rapport à r.

En introduisant la valeur (6) de Q_r dans (3), puis en remplaçant, dans la relation ainsi obtenue, M_r, M_t, N_r par leurs valeurs (7) et (8), on est conduit à une première relation où ne figurent que v, w et certaines dérivées de ces fonctions :

$$\left.\begin{aligned} &rDw''' + (D + rD')w'' + \left(\nu D' - \frac{D}{r}\right)w' + Kr\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\cos^2\varphi}v' + \\ &+ K\nu\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{\cos^2\varphi}v + K\nu\frac{\mathrm{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi}w - \frac{P}{2\pi\cos^4\varphi} = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

On obtient une seconde relation, en introduisant les valeurs (8) de N_r, N_t dans (4) :

$$\left.\begin{aligned} &rhv'' + (h + rh')v' + \left(\nu h' - \frac{h}{r}\right)v + \nu h\,\mathrm{tg}\varphi\cdot w' + \\ &+ \mathrm{tg}\varphi\left(\nu h' - \frac{h}{r}\right)w = 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Le problème est ainsi ramené à l'intégration du système de deux équations différentielles simultanées (9), (10), où v, w sont les fonctions inconnues. Ce système est du 5e ordre. Les constantes d'intégration se détermineront à l'aide des conditions aux limites.

[20] [8], p. 452 et 453.

2° *Intégration du système (9), (10)*

Cette opération pourrait en principe se faire en appliquant la méthode de *E. Meissner* [21], puisqu'il s'agit d'une coque de révolution. Mais, dans notre cas, *l'épaisseur h varie peu d'un point à un autre* (la dérivée dh/dr est petite par rapport à 1) et *l'angle* φ *est lui-même petit.* Il est alors préférable de procéder à l'aide de développements en série, en appliquant une méthode, déjà utilisée par *E. Chabloz* et l'un des trois auteurs, pour étudier le cas plus simple des plaques circulaires fléchies d'épaisseur linéairement variable, où h est très petit et où les forces N sont négligeables, ce qui n'est pas le cas dans la présente étude [22].

Posons

$$h = \bar{h}\left[1 - \lambda\left(2\frac{r}{a} - 1\right)\right], \quad (11)$$

$\bar{h}$ désignant l'épaisseur pour $r = \frac{a}{2}$, et λ, un coefficient caractérisant la variation de h (fig. 12).

Considérons maintenant la simple infinité de coques, définie par l'ensemble des valeurs (petites) de λ et φ, liées par la relation :

$$\lambda = \Omega\,\mathrm{tg}\,\varphi, \quad (12)$$

où Ω est une constante. Nous donnerons plus loin à cette constante une valeur telle que la surface supérieure de la coque soit plane, conformément à la figure 1 C représentant la plaque que nous voulons étudier. Les grandeurs v, w pouvant être alors considérées comme des fonctions non seulement de r, mais aussi de λ, développons-les en séries, selon les puissances croissantes de λ, en posant :

$$v = \sum_{i=o}^{\infty} v_i\lambda^i, \quad w = \sum_{i=o}^{\infty} w_i\lambda^i, \quad (i = 0, 1, 2\ \ldots) \quad (13)$$

où v_0, v_1, v_2, ..., w_0, w_1, w_2, ... sont des fonctions de r.

En introduisant ces expressions dans les équations différentielles (9) et (10), compte tenu du fait que $v_0 \equiv 0$ [23], et en égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de λ, on obtient respectivement les deux systèmes simultanés (14) et (15) suivants :

$$\left.\begin{aligned} \lambda^0 :\quad & \Gamma(w_0') = -H_0, \\ \lambda^1 :\quad & \Gamma(w_1') = -[A_1w_0''' + B_1w_0'' + C_1w_0'], \\ \lambda^2 :\quad & \Gamma(w_2') = -[A_1w_1''' + B_1w_1'' + C_1w_1' + \\ & \quad + A_2w_0''' + B_2w_0'' + C_2w_0' + \\ & \quad + L_2w_0 + F_1v_1' + G_1v_1 + H_2], \\ \lambda^3 :\quad & \Gamma(w_3') = -[A_1w_2''' + B_1w_2 + C_1w_2' + \\ & \quad + A_2w_1''' + B_2w_1'' + C_2w_1' + \\ & \quad + L_2w_1 + A_3w_0''' + B_3w_0'' + \\ & \quad + C_3w_0' + L_3w_0 + F_1v_2' + \\ & \quad + G_1v_2 + F_2v_1' + G_2v_1], \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

où :

$$\Gamma\,(\ldots) = \frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\,(\ldots)\right]\right\}, \qquad H_0 = -\frac{P}{2\pi r\bar{D}},$$

$$\bar{D} = \frac{E\bar{h}^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad A_1 = -3\left(\frac{2r}{a} - 1\right),$$

[21] [8], p. 455 et suiv.

[22] Voir [10].

[23] En effet, la première des équations (15) que nous établirons plus loin est homogène et on verrait facilement qu'elle n'admet que la solution $v_0 \equiv 0$, vu les conditions aux limites du problème. On peut dire aussi que le cas $\lambda = 0$, $\varphi = 0$ correspond à celui de la plaque d'épaisseur constante, où l'on doit nécessairement avoir $v = v_0 \equiv 0$.

$$B_1 = -\frac{3}{r}\left(\frac{4r}{a} - 1\right), \qquad C_1 = \frac{3}{r^2}\left[\frac{2r}{a}(1-\nu) - 1\right],$$

$$F_1 = \frac{12}{\bar{h}^2\Omega},$$

$$G_1 = \frac{12\nu}{\bar{h}^2\Omega}\frac{1}{r}, \quad A_2 = 3\left(\frac{2r}{a} - 1\right)^2, \quad B_2 = \frac{3}{r}\left(\frac{2r}{a} - 1\right)\left(\frac{6r}{a} - 1\right),$$

$$C_2 = -\frac{3}{r^2}\left(\frac{2r}{a} - 1\right)\left[\frac{4r}{a}(1-2\nu) - 1\right], \quad L_2 = \frac{12\nu}{\bar{h}^2\Omega^2}\frac{1}{r},$$

$$A_3 = -\left(2\frac{r}{a} - 1\right)^3,$$

$$B_3 = -\frac{1}{r}\left(\frac{2r}{a} - 1\right)^2\left(\frac{8r}{a} - 1\right),$$

$$C_3 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{2r}{a} - 1\right)^2\left[\frac{2r}{a}(1-3\nu) - 1\right],$$

$$F_2 = -\frac{12}{\bar{h}^2\Omega}\left(\frac{2r}{a} - 1\right), \qquad G_2 = \frac{-12\nu}{\bar{h}^2\Omega}\frac{1}{r}\left(2\frac{r}{a} - 1\right),$$

$$H_2 = -\frac{P}{\pi r \bar{D}\Omega^2}, \qquad L_3 = -\frac{12\nu}{\bar{h}^2\Omega^2}\frac{1}{r}\left(\frac{2r}{a} - 1\right),$$

. . . . . .

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda^0: \ \Gamma(\varphi_0) = 0, \\
&\lambda^1: \ \Gamma(\varphi_1) = -[\bar{F}_1 w_0' + \bar{G}_1 w_0], \\
&\lambda^2: \ \Gamma(\varphi_2) = -[\bar{A}_1 \varphi_1'' + \bar{B}_1 \varphi_1' + \bar{C}_1 \varphi_1 + \bar{F}_1 w_1' + \\
&\qquad + \bar{G}_1 w_1 + \bar{F}_2 w_0' + \bar{G}_2 w_0], \\
&\lambda^3: \ \Gamma(\varphi_3) = -[\bar{A}_1 \varphi_2'' + \bar{B}_1 \varphi_2' + \bar{C}_1 \varphi_2 + \bar{F}_1 w_2' + \\
&\qquad + \bar{G}_1 w_2 + \bar{F}_2 w_1' + \bar{G}_2 w_1],
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

. . . . . .

où :

$$\bar{A}_1 = -\left(\frac{2r}{a} - 1\right), \qquad \bar{B}_1 = -\frac{1}{r}\left(\frac{4r}{a} - 1\right),$$

$$\bar{C}_1 = \frac{1}{r^2}\left[\frac{2r}{a}(1-\nu) - 1\right],$$

$$\bar{F}_1 = \frac{\nu}{\Omega r}, \qquad \bar{G}_1 = -\frac{1}{\Omega r^2}, \qquad \bar{F}_2 = -\frac{\nu}{\Omega r}\left(\frac{2r}{a} - 1\right),$$

$$\bar{G}_2 = \frac{1}{\Omega r^2}\left[\frac{2r}{a}(1-\nu) - 1\right],$$

. . . . . .

Les équations des systèmes (14), (15) présentent l'avantage d'être toutes du même type et de pouvoir s'intégrer successivement sans difficulté par des méthodes élémentaires, en procédant comme suit. La première des équations (14) donnera la fonction $w_0(r)$ qui, introduite dans la seconde de ces relations, permettra de calculer $w_1(r)$. En substituant $w_0(r)$ dans la seconde des équations (15), on obtiendra $\varphi_1(r)$. Les valeurs de $w_0(r)$, $w_1(r)$, $\varphi_1(r)$, introduites dans les troisièmes équations (14) et (15), donneront respectivement $w_2(r)$ et $\varphi_2(r)$, et ainsi de suite.

La simplicité de l'intégration rencontrée ici — qui n'existe pas dans l'emploi des équations « accouplées » de *Meissner* — est due au fait qu'on a choisi une classe particulière de coques, dont la forme fondamentale ($\lambda = 0$, $\varphi = 0$) coïncide avec la plaque d'épaisseur constante. Cette intégration introduit des constantes arbitraires. Pour les déterminer, il est nécessaire de s'appuyer sur les conditions aux limites, que nous allons préciser.

3° *Conditions aux limites*

On doit avoir, la coque étant supposée simplement appuyée le long du contour :

$$(\varphi)_{r=0} \neq \infty, \quad (w')_{r=0} = 0, \quad (w)_{r=a} = 0, \qquad (16)$$

$$(N_r)_{r=a} = 0, \qquad (M_r)_{r=a} = 0. \qquad (17)$$

Pour que les conditions $(w')_{r=0} = 0$ et $(w)_{r=a} = 0$ soient satisfaites quel que soit λ, il est nécessaire, d'après la seconde formule (13), que

$$\underline{(w_i')_{r=0} = 0, \quad (w_i)_{r=a} = 0.} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (18)$$

En introduisant les valeurs (13) de φ, w dans les premières des formules (7) et (8), on obtient :

$$M_r = -D\cos^2\varphi \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \left(w_i'' + \frac{\nu}{r} w_i'\right),$$

$$N_r = K\lambda\cos\varphi \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \left[\varphi_{i+1}' + \frac{\nu}{r}\left(\varphi_{i+1} + \frac{w_i}{\Omega}\right)\right].$$

Pour que les deux conditions (17) soient satisfaites quel que soit λ, il est donc nécessaire que :

$$\left(w_i'' + \frac{\nu}{r} w_i'\right)_{r=a} = 0, \quad \left[\varphi_{i+1}' + \frac{\nu}{r}\left(\varphi_{i+1} + \frac{w_i}{\Omega}\right)\right]_{r=a} = 0;$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

mais puisque $(w_i)_{r=a} = 0$ en vertu de la seconde équation (18), on obtient en définitive les deux groupes de conditions :

$$\left.\begin{aligned}
&\underline{\left(w_i'' + \frac{\nu}{r} w_i'\right)_{r=a} = 0,} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots) \\
&\underline{\left(\varphi_i' + \frac{\nu}{r}\varphi_i\right)_{r=a} = 0.} \quad (i = 1, 2, \ldots)
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Quant à la première des conditions (16), elle revient à poser, φ_0 étant nul :

$$(\varphi_i)_{r=0} \neq \infty. \qquad (i = 1, 2, \ldots) \qquad (20)$$

En définitive, les fonctions φ_i, w_i doivent satisfaire aux conditions (18), (19) et (20).

Remarque. Par raison de symétrie, le sommet O' du cône du feuillet moyen ne peut que se déplacer verticalement, d'où (fig. 16) :

$$(\varphi\cos\varphi + w\sin\varphi)_{r=0} = 0, \text{ ou } (\varphi + w\,\mathrm{tg}\,\varphi)_{r=0} = 0. \quad (21)$$

En remplaçant φ et w par leurs expressions (13) et en se rappelant qu'en vertu de (12), $\lambda = \Omega\,\mathrm{tg}\,\varphi$, l'équation (21) sera vérifiée quel que soit λ, si :

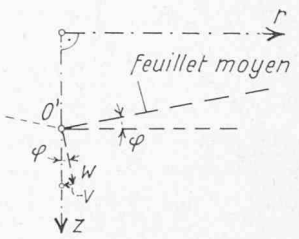


Fig. 16.

$$\left(\varphi_{i+1} + \frac{w_i}{\Omega}\right)_{r=0} = 0. \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{22}$$

Ces relations permettent de faire un contrôle des valeurs obtenues au point $r = 0$ pour les fonctions $\varphi_i(r)$, $w_i(r)$.

4° Application au cas de la plaque étudiée (fig. 1 C)

On peut poser ici (fig. 17) : $\operatorname{tg} \varphi = \lambda \bar{h}/a$, et la relation (12) montre que

$$\Omega = \frac{a}{\bar{h}}. \tag{23}$$

Nous avons effectué l'intégration des équations (14), (15), compte tenu des conditions (18), (19), (20) et de la valeur (23) de Ω, jusqu'à ce que nous ayons obtenu les fonctions $\varphi_0, \ldots, \varphi_3, w_0, \ldots, w_3$. Les deux séries (13) convergent en effet suffisamment rapidement pour que l'on puisse, dans le cas de la plaque représentée fig. 1 C, se contenter de ne considérer que les quatre premiers termes de chacune d'elles. Pour ne pas alourdir notre exposé, nous nous bornons à ne donner ci-dessous que les expressions de $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, w_0, w_1$, où l'on a remplacé Ω par $a/\bar{h}$ et désigné par ξ le rapport r/a :

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &\equiv 0,\\
\varphi_1 &= \frac{Pa\bar{h}}{4\pi\bar{D}}\left[\frac{1-2\nu}{6}\xi^2 \operatorname{Log}\xi - \frac{17-17\nu-16\nu^2}{36(1+\nu)}\xi^2 + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{7+4\nu-7\nu^2-4\nu^3}{9(1+\nu)^2}\xi - \frac{3+\nu}{4(1+\nu)}\right],\\
\varphi_2 &= \frac{Pa\bar{h}}{4\pi\bar{D}}\left[\frac{1-\nu-2\nu^2}{6}\xi^3 \operatorname{Log}\xi - \right.\\
&\quad -\frac{1}{2}(1-2\nu)\xi^2 \operatorname{Log}\xi - \frac{21+28\nu-43\nu^2-50\nu^3}{72(1+\nu)}\xi^3 + \\
&\qquad + \frac{125+83\nu-224\nu^2-128\nu^3}{108(1+\nu)}\xi^2 - \\
&\qquad - \frac{239+405\nu-133\nu^2-405\nu^3-106\nu^4}{216(1+\nu)^2}\xi + \\
&\qquad \left. + \frac{5+31\nu+8\nu^2}{36(1+\nu)}\right],\\
\varphi_3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
w_0 &= \frac{Pa^2}{4\pi\bar{D}}\left[\frac{3+\nu}{4(1+\nu)}(1-\xi^2) + \frac{\xi^2}{2}\operatorname{Log}\xi\right],\\
w_1 &= \frac{Pa^2}{4\pi\bar{D}}\left[\frac{2}{3}(1+\nu)\xi^3 \operatorname{Log}\xi - \frac{3}{2}\xi^2 \operatorname{Log}\xi + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{2}{9}(1-5\nu)\xi^3 - \frac{1-21\nu-16\nu^2}{12(1+\nu)}\xi^2 - \frac{5+31\nu+8\nu^2}{36(1+\nu)}\right],\\
w_2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
w_3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{24, 25}$$

Ayant déterminé les huit fonctions $\varphi_0, \ldots, w_3$, il a été ensuite facile de calculer M_r, M_t, N_r, N_t, en introduisant les deux séries (13), limitées à leurs quatre premiers termes, dans les formules (7) et (8) :

$$\left.\begin{aligned}
M_r &= -D\cos^2\varphi \sum_{i=0}^{3} \lambda^i \left(+w_i'' \frac{\nu}{r} w_i'\right),\\
M_t &= -D\cos^2\varphi \sum_{i=0}^{3} \lambda^i \left(\frac{1}{r} w_i' + \nu w_i''\right),
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned}
N_r &= K\lambda\cos\varphi \sum_{i=1}^{3} \lambda^{i-1}\left[\varphi_i' + \frac{\nu}{r}\left(\varphi_i + \frac{h_0}{a} w_{i-1}\right)\right],\\
N_t &= K\lambda\cos\varphi \sum_{i=1}^{3} \lambda^{i-1}\left[\frac{1}{r}\left(\varphi_i + \frac{h_0}{a} w_{i-1}\right) + \nu\varphi_i\right].
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Ces formules permettent de vérifier que $(M_r)_{r=0} = (M_t)_{r=0} = \infty$, tandis que $(N_r)_{r=0} = (N_t)_{r=0} = K(1+\nu)\cos\varphi \sum_{i=1}^{3} \lambda^i (\varphi_i')_{r=0}$.

Remarquons aussi que l'effort tranchant Q_r peut être ensuite directement déduit de la valeur (27) de N_r, à l'aide de la formule (6).

Les grandeurs M_r, M_t, N_r, N_t, Q_r se rapportent à des éléments de surface perpendiculaires au feuillet moyen (fig. 13), conformément à la théorie habituelle des coques. Il est maintenant nécessaire, si l'on veut obtenir les tensions cherchées σ_r, σ_t, τ_{rz}, de calculer les moments $\overline{M}_r$, $\overline{M}_t$ et les forces $\overline{N}_r$, $\overline{N}_t$, $\overline{Q}_r$ relatifs à des éléments de surface verticaux. Dans ce but, considérons l'élément de volume $ABB'A'$ précisé dans la figure 17. La face de gauche de cet élément est verticale, celle de droite est perpendiculaire au feuillet moyen. Remarquons que, φ étant un petit angle, le milieu $\overline{S}$ du segment $\overline{AB}$ est sensiblement situé dans le feuillet moyen, à un terme de l'ordre $h\varphi^4$ près.

Pour des raisons évidentes, on a :

$$\overline{M}_t = M_t \cos\varphi, \qquad \overline{N}_t = N_t. \tag{28}$$

Les conditions d'équilibre donnent d'autre part les trois relations suivantes, où $d\psi$ désigne l'angle des deux plans méridiens limitant latéralement l'élément de volume considéré :

$$\left.\begin{aligned}
&M_r(r+dr)\,d\psi - \overline{M}_r\, r d\psi - Q_r(r+dr)\,d\psi \frac{dr}{\cos\varphi} - \\
&\qquad - M_t \cos\varphi\, dr\, d\psi = 0,\\
&N_r(r+dr)\,d\psi\cos\varphi - N_t\, dr\, d\psi - \overline{N}_r\, r d\psi + \\
&\qquad + Q_r \sin\varphi\,(r+dr)\,d\psi = 0,\\
&-\overline{Q}_r\, r d\psi + Q_r(r+dr)\,d\psi\cos\varphi - \\
&\qquad - N_r(r+dr)\,d\psi\sin\varphi = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Dans ces équations, il n'est pas possible de considérer d'emblée dr comme un infiniment petit. Cette quantité ne peut en effet tendre vers zéro, ce qui entraînerait une intersection des segments AB et $A'B'$! Mais nous pouvons imaginer que $\bar{h}$ et dr tendent simultanément vers zéro, la face supérieure et λ restant fixes, et négliger alors les infiniment petits d'ordre supérieur. On obtient ainsi pour $\overline{M}_r$, $\overline{N}_r$, $\overline{Q}_r$ les valeurs approchées suivantes, d'autant plus exactes, dans notre cas, que φ et h_0 sont plus petits :

$$\left.\begin{aligned}
\overline{M}_r &= M_r, \qquad \overline{N}_r = Q_r \sin\varphi + N_r \cos\varphi,\\
\overline{Q}_r &= Q_r \cos\varphi - N_r \sin\varphi.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

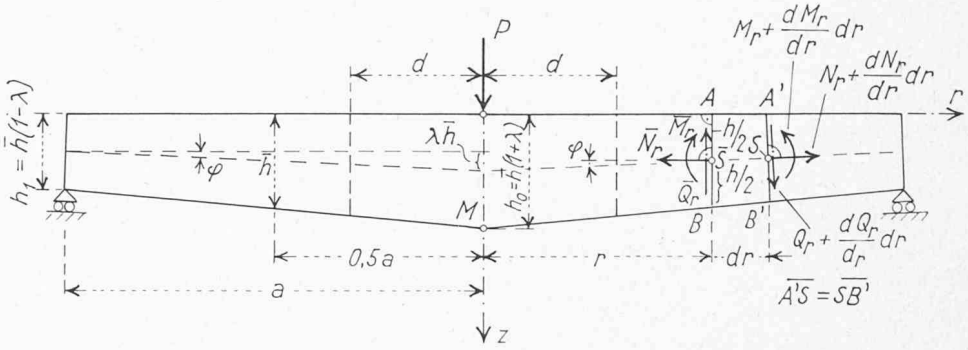


Fig. 17. — Coupe méridienne d'une plaque circulaire d'épaisseur linéairement variable, considérée comme cas particulier de la coque représentée fig. 12.

Finalement, les tensions normales cherchées σ_r, σ_t sont données par les formules :

$$\sigma_r = \frac{\overline{N}_r}{h} + \frac{12}{h^3}\overline{M}_r\left(z - \frac{h}{2}\right), \quad \sigma_t = \frac{\overline{N}_t}{h} + \frac{12}{h^3}\overline{M}_t\left(z - \frac{h}{2}\right). \tag{31}$$

Quant aux tensions tangentielles τ_{rz}, elles se calculent par la formule générale, établie récemment par deux des trois auteurs [24] :

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{rz} = &-\frac{6}{h^3}\left(\overline{Q}_r - \overline{N}_r\frac{dz_0}{dr} - 3\frac{\overline{M}_r}{h}\frac{dh}{dr}\right)z^2 + \\
&+ \left[\frac{12}{h^3}\overline{Q}_r z_0 + \frac{\overline{N}_r}{h^2}\left(\frac{dh}{dr} - \frac{12}{h}z_0\frac{dz_0}{dr}\right) + \right. \\
&\left. + \frac{12}{h^3}\overline{M}_r\left(\frac{dz_0}{dr} - 3z_0\frac{dh}{dr}\right)\right] z + \frac{\overline{N}_r}{h}\left(\frac{dz_0}{dr} - \frac{z_0}{h}\frac{dh}{dr}\right) + \\
&+ \frac{3\overline{M}_r}{h^2}\left(\frac{dh}{dr} - 4\frac{z_0}{h}\frac{dz_0}{dr}\right) - \\
&- \frac{6}{h^3}\left(\overline{Q}_r - \overline{N}_r\frac{dz_0}{dr} - 3\frac{\overline{M}_r}{h}\frac{dh}{dr}\right)\left(z_0^2 - \frac{h^2}{4}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

où z_0 désigne la cote d'un point du feuillet moyen. En tenant compte des diverses relations écrites, cette formule se réduit ici à la suivante :

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{rz} = &-\frac{6}{h^3}\left(\overline{Q}_r + \lambda\frac{\overline{h}}{a}\overline{N}_r + \frac{6\lambda\overline{h}}{ah}\overline{M}_r\right)z^2 + \\
&+ \frac{1}{h^2}\left[6\overline{Q}_r + \frac{4\lambda\overline{h}}{a}\overline{N}_r + \frac{24\lambda\overline{h}}{ah}\overline{M}_r\right]z.
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Remarques

1° Une étude théorique analogue à celle que nous venons de présenter, mais concernant un autre type de plaque d'épaisseur linéairement variable, a été publiée il y a quelques années par *B. Gilg*, dans un ouvrage déjà cité [25].

2° Dans les calculs ci-dessus, nous avons supposé que la force P agissait au centre de la face supérieure de la plaque. Si cette force est répartie sur un très petit cercle de rayon r_0, ce que suppose la figure 1 C, où $r_0 = 0{,}1h_0 = 0{,}025a$, les formules seront encore applicables.

D'autre part, au voisinage du milieu de la plaque, la théorie utilisée jusqu'ici n'est évidemment plus valable. Mais nous pouvons, pour calculer les tensions au centre M de la face inférieure (fig. 17), où l'expérience montre qu'il y a en général le plus grand danger de rupture, nous baser sur une formule établie par *S. Woinowsky-Krieger*. Ce dernier a en effet montré que, dans le cas d'une plaque circulaire d'*épaisseur constante* h_0 et de rayon a, simplement appuyée le long du contour, sollicitée par une force concentrée P appliquée au centre, la tension $\sigma_r = \sigma_t$ au point M a la valeur [26]:

$$(\sigma_r)_{r=0} = (\sigma_t)_{r=0} = \left[(1+\nu)\left(0{,}485\,\mathrm{Log}\,\frac{a}{h_0} + 0{,}52\right) + 0{,}48\right]\frac{P}{h_0^2}. \tag{34}$$

Considérons en effet la portion de plaque circulaire définie par un rayon d, choisi légèrement supérieur à h_0 (fig. 17). Les formules établies plus haut permettent de calculer $(M_r)_{r=d}$ et $(N_r)_{r=d}$. La portion en question peut être assimilée à une plaque d'épaisseur constante h_0, et la tension $\sigma_r = \sigma_t$ au point M s'obtient en ajoutant, à la valeur donnée par la formule (34) — où il faut remplacer a par d — celle qui existerait en ce point si $(M_r)_{r=d}$ et $(N_r)_{r=d}$ agissaient seuls le long du contour $r = d$. Or la valeur de cette dernière tension est

$$\frac{6}{h_0^2}(M_r)_{r=d} + \frac{(N_r)_{r=d}}{h_0} = \frac{P}{h_0^2}(6\mu_1 + \mu_2), \tag{35}$$

en posant :

$$\mu_1 = \frac{(M_r)_{r=d}}{P}, \qquad \mu_2 = \frac{h_0(N_r)_{r=d}}{P}. \tag{36}$$

On obtient donc pour la tension résultante, au point dangereux M de la plaque considérée :

$$\left.\begin{aligned}
(\sigma_r)_M = (\sigma_t)_M = &\left[(1+\nu)\left(0{,}485\,\mathrm{Log}\,\frac{d}{h_0} + 0{,}52\right) + \right. \\
&\left. + 6\mu_1 + \mu_2 + 0{,}48\right]\frac{P}{h_0^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Ajoutons qu'en toute rigueur, les tensions au sommet M du cône formé par la face inférieure de la plaque considérée devant être nulles — puisqu'aucune force extérieure n'est appliquée en M — c'est en un point situé très légèrement au-dessus, dans nos essais probablement à 1 ou 2 mm seulement, que la tension dangereuse doit se produire.

3° La formule (37) permet également de calculer la tension dangereuse $\sigma_r = \sigma_t$ au centre M des deux premières plaques (fig. 1 A et 1 B).

4° Nous verrons à la fin du paragraphe suivant que les expériences faites sur les trois modèles de plaques ont confirmé la validité de cette formule.

§ 5. Comparaison des valeurs théoriques aux résultats des expériences. Discussion

Dans les figures 5 à 10, nous avons représenté, à côté des valeurs mesurées des tensions, les valeurs calculées, soit par les formules du § 4 (plaques), soit à l'aide des procédés de la Résistance des matériaux (poutres) [27].

Considérons tout d'abord les *plaques et poutres d'épaisseur* brusquement variable (fig. 5 à 8). Nous pouvons y distinguer *quatre domaines*, dont trois sont analogues aux zones que nous avons rencontrées dans notre mémoire précédent [28]. Dans le premier domaine, que nous désignerons également par I, les formules rappelées § 4, A et B sont applicables. En termes plus précis, nous définirons cette zone — qui comprend ici deux parties distinctes — comme *le domaine où les différences*

[24] Voir [4]. Dans le mémoire en question, M_r, M_t, N_r, N_t, Q_r désignent les grandeurs appelées ici $\overline{M}_r$, $\overline{M}_t$, $\overline{N}_r$, $\overline{N}_t$, $\overline{Q}_r$.

[25] [9], p. 79 et suiv.

[26] Voir par exemple [8], p. 76 et suiv. Les essais faisant l'objet du mémoire [1] ont confirmé l'exactitude de cette formule, comme l'indique la figure 21 de l'article cité.

[27] C'est-à-dire, pour les poutres, d'après la théorie de *Navier*.

[28] [1], § 5.

entre les tensions mesurées et celles calculées sont inférieures à $0{,}048\ P/h_0^2$. Cette tolérance correspond à 10 % de la valeur qu'aurait $(\sigma_r)_{max}$ pour $r/a = 0{,}5$, si la plaque ou la poutre avait une *épaisseur (ou une hauteur) constante* h_0.

Les trois autres domaines, où les formules rappelées § 4, A et B ne sont pas applicables, seront désignés respectivement par II (voisinage du petit cercle sur lequel est appliquée la force P) [29], III (zone sous l'influence directe des réactions des appuis) et IV (domaine de perturbation créé par la discontinuité). Nous ne reviendrons pas sur les propriétés des zones II et III, qui ont déjà été décrites dans notre mémoire fréquemment cité. C'est par contre surtout à l'étude de la zone IV, essentiellement nouvelle ici, que nous allons nous arrêter un instant.

Dans le *cas où la discontinuité de l'épaisseur de la plaque (ou de la hauteur de la poutre correspondante) n'engendre pas de discontinuité du feuillet moyen* (fig. 5 et 6), la zone IV a la même extension dans les deux modèles. Elle s'étend sur une longueur de $0{,}82\ h_0$, ce qui correspond environ au cinquième du rayon ou de la demi-portée a. Deux points singuliers, l'un attractif S_a et l'autre répulsif S_r, existent dans ce domaine et sont situés approximativement sur la droite horizontale $z = \frac{h_0}{2}$ (voir les trajectoires des figures 5 *a* et 6 *a*). La distance de ces deux points est manifestement plus grande pour la poutre que pour la plaque. Remarquons aussi que, dans le domaine IV, les trajectoires des deux figures considérées sont toutes sensiblement *symétriques* par rapport à la droite $z = \frac{h_0}{2}$, et que les vecteurs, représentant les tensions relatives à deux éléments de surface symétriques, sont par contre *antimétriques* deux à deux par rapport à cette droite (fig. 5 *b*, *c*, *d* et 6 *b*, *c*). Nous reviendrons longuement sur ce point dans le § 6 [30].

Les diagrammes des dernières figures citées montrent que les tensions varient beaucoup dans la zone IV considérée. On remarquera en particulier les changements de signe des tensions tangentielles τ_{rz} (ou τ_{xz}), pour des points situés sur la même verticale. La figure 11 A représente les valeurs, mesurées et calculées, des tensions normales méridiennes le long du contour d'une section axiale, pour la plaque fig. 1 A et pour la poutre correspondante. Les valeurs mesurées confirment une fois de plus l'énorme concentration des efforts engendrée par un congé de raccord. Cette concentration dépendant surtout du rayon du congé, nous ne la commenterons pas, un seul modèle ne nous permettant évidemment pas d'étudier l'influence de ce rayon. Nous remarquerons seulement qu'au voisinage du congé, les efforts y prennent dans notre cas, des valeurs tout à fait comparables à celle de la tension au milieu M de la face inférieure. *Le danger de rupture peut donc être aussi grand, dans la zone IV, qu'il ne l'est dans la zone II.*

Passons maintenant au *cas où la discontinuité de l'épaisseur de la plaque (ou de la hauteur de la poutre) entraîne une discontinuité du feuillet moyen* (fig. 7, 8 et 11 B). La limite $r = 2{,}5\ h_0 = 0{,}625\ a$ de la zone IV de la plaque (fig. 7), est parfaitement définie, car il existe, à droite de cette limite dans le dessin, un domaine I satisfaisant à la définition donnée. Par contre, l'autre limite n'existe pas, aucune zone répondant à la définition du domaine I n'ayant pu être décelée entre le centre de la plaque et la section où l'épaisseur varie brusquement. Ainsi, les zones II et IV constituent ici un seul domaine, où la partie gauche est sous l'influence directe de la force P, et la partie droite, sous celle de la discontinuité.

Pour la poutre correspondante, par contre (fig. 8), les deux parties de la zone I existent et la zone IV, comprise entre elles, est parfaitement définie. Sa longueur est égale à $1{,}05\ h_0$, ou $0{,}265\ a$ environ.

Il est évident que les trajectoires et les tensions de la zone IV (fig. 7 et 8) ne jouissent plus des propriétés de symétrie et d'antimétrie que nous avons rencontrées plus haut (fig. 5 et 6). Mais à part les points spéciaux que nous venons de signaler, les remarques générales faites à propos de la zone IV de la première plaque (ou poutre), sont encore applicables à la même zone de la seconde. En particulier, les figures 7 et 8 révèlent l'existence de deux points singuliers S_a, S_r, qui sont respectivement situés à des distances du centre légèrement plus faibles que précédemment.

Remarquons en passant que le fait qu'il existe des zones I dans les figures 5 et 7 confirme implicitement l'exactitude de la théorie de *Kirchhoff* dans le cas de la première plaque (fig. 1 A) et celle des formules établies par *M. Martinola* dans celui de la seconde (fig. 1 B).

Considérons enfin *la plaque d'épaisseur linéairement variable et la poutre correspondante* (fig. 9 et 10). Il n'y existe évidemment aucune zone IV. Les domaines I, II et III, par contre, sont très bien définis. *La bonne coïncidence dans la zone I, pour la plaque, des valeurs des tensions mesurées et calculées (fig. 9 b, c, d) justifie pleinement la méthode de calcul exposée § 4, C.*

La figure 9 *a* révèle pour la plaque l'existence de deux points singuliers attractifs S_a, l'un dans le domaine II et l'autre dans III, et d'un point répulsif S_r, également situé dans cette dernière zone. Par contre, pour la poutre (fig. 10 *a*), le dessin des trajectoires montre qu'il y a deux points attractifs dans II, ainsi qu'un point attractif et un répulsif dans III.

Soulignons encore combien les tensions tangentielles sont différemment réparties dans la plaque (fig. 9 *c*) et dans la poutre correspondante (fig. 10 *c*).

Enfin, grâce au tableau II ci-dessus, le lecteur pourra comparer les valeurs mesurées de la tension dangereuse, *au centre M de la face inférieure des trois plaques*, aux valeurs calculées à l'aide de la formule (37), en choisissant $d = 1{,}20\ h_0$ (fig. 17). La bonne coïncidence des résultats confirme l'exactitude de cette formule.

Insistons à nouveau sur le fait que, pour les plaques des figures 1 A et 1 B, *la tension en M n'est pas nécessairement la plus dangereuse*, car il existe un autre domaine que la zone centrale II où une cassure peut

[29] Dans la zone II, la répartition des tensions dépend relativement peu du rapport $h_0/2a$, comme nous l'avons reconnu dans notre première étude, *surtout pour* $^1/_{12} \leq h_0/2a \leq {}^1/_4$, *c'est-à-dire pour* $^1/_6 \leq h_0/a \leq {}^1/_2$ (voir par exemple, à ce sujet, la figure 21 de [1]). Cela est dû à la singularité introduite par la force locale P. Nous saisissons l'occasion offerte par cette note en bas de page pour prier le lecteur de bien vouloir atténuer les termes trop exclusifs utilisés à propos de la zone II, dans notre premier mémoire, où nous avions laissé entendre par erreur que les tensions dans ce domaine sont quasi indépendantes de $h_0/2a$, alors qu'elles varient en réalité en fonction de ce rapport, mais relativement lentement.

[30] En particulier, nous y préciserons ce que nous entendons exactement par l'*antimétrie de deux vecteurs par rapport à un axe.*

TABLEAU II

Valeurs mesurées et valeurs calculées de la tension dangereuse $(\sigma_r)_M = (\sigma_t)_M$, pour les trois plaques étudiées

Modèle de plaque	Valeur de $(\sigma_r)_M = (\sigma_t)_M$	
	mesurée	calculée
Fig.		
1 A	2,44 P/h_0^2	2,40 P/h_0^2
1 B	2,28 »	2,39 »
1 C	2,68 »	2,75 »

se produire, c'est celui de la zone IV, placée directement sous l'influence de la discontinuité de l'épaisseur et où le rayon du congé de raccord joue un rôle important. Seule une étude systématique de l'influence de ce rayon sur les tensions montrerait dans quels cas c'est au point M — ou au congé de raccord — qu'une cassure est à craindre.

§ 6. Sur un théorème d'élasticité concernant les états de tension antimétriques par rapport à un axe

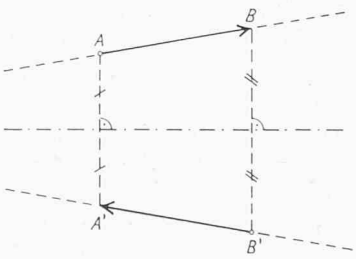
Dans le paragraphe précédent, nous avons relevé que, lorsque l'épaisseur subit une variation brusque n'entraînant pas de discontinuité du feuillet moyen, les trajectoires sont, dans la zone IV, symétriques par rapport à la droite $z = \frac{h_0}{2}$ (fig. 5 *a* et 6 *a*). D'autre part, les vecteurs représentant les tensions relatives à deux éléments de surface symétriques, sont antimétriques deux à deux par rapport à cette droite (fig. 5 *b*, *c*, *d* et 6 *b*, *c*). Ces propriétés, qui sont valables aussi bien pour la plaque que pour la poutre considérées, paraîtront naturelles à tout ingénieur ayant un certain sens de la statique. En fait, elles ne vont pas de soi, et nous croyons utile d'en donner une démonstration rigoureuse. Dans ce but, après avoir rappelé ou donné deux définitions, nous établirons un théorème assez général d'élasticité, d'où découlent directement les propriétés énoncées.

Première définition : *Dans l'espace, deux vecteurs glissants $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'A'}$, sont dits antimétriques par rapport à un axe, s'il est possible de les placer sur leurs supports respectifs de façon que 1° les segments $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ soient symétriques par rapport à cet axe; 2° l'origine B' du second vecteur soit le symétrique de l'extrémité B du premier (fig. 18)* [31].

Deuxième définition : *Un état de tension (à deux ou à trois dimensions) est dit antimétrique par rapport à un axe, si les vecteurs représentant les tensions relatives à deux éléments de surface symétriques, sont antimétriques par rapport à cet axe.*

[31] Les supports de deux tels vecteurs seront donc nécessairement symétriques par rapport à l'axe.

Fig. 18.



Cela posé, nous allons démontrer la proposition suivante :

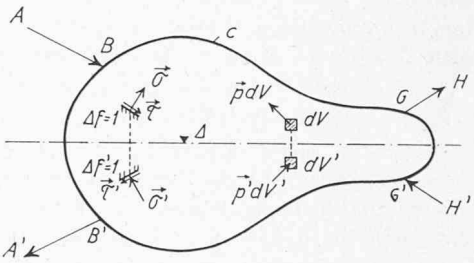
Théorème : *Soit un corps solide élastiquement déformable, limité par une surface symétrique par rapport à un axe Δ et en équilibre sous l'action d'un système de forces extérieures (de surface ou massiques). Si ces forces sont appliquées deux à deux en des points symétriques et sont antimétriques relativement à Δ, l'état de tension sera lui-même antimétrique par rapport à cet axe.*

Pour ne pas alourdir notre exposé, nous démontrerons d'abord ce théorème dans le cas particulier d'une lame plane mince, d'épaisseur constante, sollicitée par des forces extérieures, situées toutes dans le plan du feuillet moyen (élasticité plane). La généralisation sera ensuite immédiate, comme nous le verrons.

Soit donc une telle lame, limitée par une courbe c, symétrique par rapport à un axe Δ (fig. 19). Sur cette lame agissent des forces extérieures $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'A'}$, ..., $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{H'G'}$, appliquées sur le contour, et des forces massiques $\vec{p}dV$, $\vec{p}'dV'$ $(dV' = dV)$, toutes antimétriques deux à deux par rapport à Δ, et satisfaisant aux conditions générales d'équilibre. Sur deux éléments de surface symétriques $\Delta f = \Delta f' = 1$, perpendiculaires aux faces de la lame, agiront respectivement les tensions $\vec{\sigma}$, $\vec{\tau}$ et $\vec{\sigma}'$, $\vec{\tau}'$, ayant par exemple les sens indiqués.

Imaginons maintenant qu'on change le sens de toutes les forces extérieures, y compris celui des forces massiques (fig. 20). La lame sera encore en équilibre et les composantes des tensions changeront simplement de sens, en gardant les mêmes supports et grandeurs que précédemment. Elles seront donc égales à $-\vec{\sigma}$, $-\vec{\tau}$ et $-\vec{\sigma}'$, $-\vec{\tau}'$, pour les deux éléments considérés. Faisons ensuite tourner de 180° la lame autour de Δ, y compris les forces extérieures nouvellement appliquées. Ces dernières seront alors identiques à celles de la figure 19.

Fig. 19.



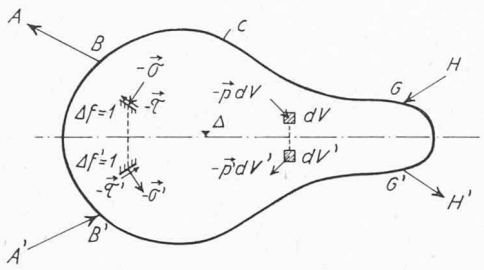
Mais comme $\Delta f'$ occupera la position primitive de Δf et réciproquement, on voit que les sens des vecteurs $\vec{\sigma}'$, $\vec{\tau}'$ ont été convenablement choisis par rapport à ceux de $\vec{\sigma}$, $\vec{\tau}$, et que l'on doit nécessairement avoir $|\vec{\sigma}'| = |\vec{\sigma}|$ et $|\vec{\tau}'| = |\vec{\tau}|$, l'état de tension étant redevenu le premier considéré, celui de la figure 19, ce qui justifie la proposition énoncée dans le cas particulier de l'élasticité plane.

On voit immédiatement que le raisonnement utilisé ici est encore applicable au cas d'un corps tridimensionnel limité par une surface symétrique par rapport à un axe, corps sur lequel agissent des forces antimétriques deux à deux par rapport à cet axe et satisfaisant aux

conditions générales d'équilibre. D'où le théorème énoncé plus haut.

Ce théorème peut d'ailleurs être encore généralisé, car on reconnaît sans difficulté qu'il reste valable si la matière du corps n'est ni homogène ni même isotrope — ce que nous avions implicitement supposé — pourvu que les propriétés mécaniques de cette matière soient symétriques par rapport à l'axe, c'est-à-dire qu'il s'agisse d'une *symétrie matérielle*. Il est également valable si les déformations ne sont pas des fonctions linéaires des forces, pourvu que ces fonctions soient impaires. *Il ne l'est par contre plus si les déformations ne sont pas très petites*, le raisonnement utilisé n'étant alors pas applicable. Quant aux forces massiques, elles peuvent être quelconques, pourvu qu'elles satisfassent à la condition d'antimétrie.

Fig. 20.



Le théorème établi permet sans difficulté de démontrer les propriétés de symétrie des trajectoires et d'antimétrie des tensions relatives à la zone IV, reconnues dans le paragraphe précédent, en discutant les résultats précisés dans les figures 5 et 6. Considérons par exemple la poutre de la figure 6. Détachons en pensées la partie $ABB'A'$, définie par deux coupes verticales AA', BB', choisies de part et d'autre de la discontinuité de l'épaisseur, dans chacun des deux domaines de la zone I, où la théorie de *Kirchhoff* est valable (fig. 21). Cette partie

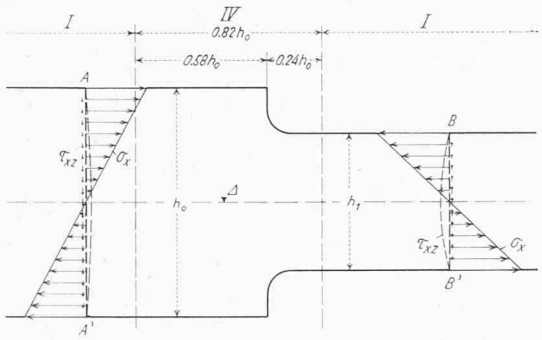


Fig. 21. — Poutre de la figure 1 A. Forces antimétriques par rapport à l'axe Δ, appliquées sur le contour de la partie $ABB'A'$ comprenant la zone IV.

$ABB'A'$ constitue une lame symétrique par rapport à l'axe Δ, et les forces extérieures σ_x, τ_{xz} appliquées sont antimétriques par rapport à cet axe. *En vertu du théorème démontré, l'état de tension de la lame doit nécessairement être lui-même antimétrique par rapport à Δ, ce qui entraîne également la symétrie des trajectoires.*

Dans le cas de la figure 5, un raisonnement analogue, fait en considérant le corps de révolution détaché dans la plaque par deux cylindres d'axe z et de rayons convenablement choisis, permet de même d'expliquer les propriétés de symétrie des trajectoires et d'antimétrie des tensions, que les résultats décrits § 5 avaient permis de prévoir.

Zurich, le 14 septembre 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Favre et W. Schumann : *Etude expérimentale de la répartition des tensions dans les plaques circulaires fléchies en fonction du rapport de l'épaisseur au diamètre.* Bulletin technique de la Suisse romande, nº 10, 10 mai 1958.

[2] M. Martinola : *La détermination optique des constantes E, ν, G des matières isotropes transparentes. Contribution à l'étude des plaques minces fléchies d'épaisseur brusquement variable.* Publication nº 7 du Laboratoire de photoélasticité de l'E.P.F., Editions Leemann, Zurich, 1959.

[3] W. Schumann : *Sur l'élimination des tensions secondaires engendrées par de grandes déformations en photoélasticité tridimensionnelle.* Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, séance du 5 janvier 1959.

[4] W. Schumann et M. Martinola : *Etude théorique et expérimentale de la répartition des tensions tangentielles dans les plaques circulaires d'épaisseur variable* Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1959, t. 249, p. 1608 et suiv.

[5] W. Schumann : *Über die experimentelle Bestimmung dreidimensionaler Spannungszustände.* Publication nº 8 du Laboratoire de photoélasticité de l'E.P.F., Editions Leemann, Zurich, 1959.

[6] M. M. Frocht : *Photoelasticity*, t. I et II. John Wiley and Sons Inc., New York, and Chapman and Hall Limited, London, 1948.

[7] L. Föppl et E. Mönch : *Praktische Spannungsoptik.* 2. Auflage. Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959.

[8] S. Timoshenko : *Theory of Plates and Shells.* McGraw-Hill Book Company, New York and London, 1940.

[9] B. Gilg : *Experimentelle und theoretische Untersuchungen an dünnen Platten.* Publication nº 5 du Laboratoire de photoélasticité de l'E.P.F. Editions Leemann, Zurich, 1952.

[10] H. Favre et E. Chabloz : *Etude des plaques circulaires fléchies d'épaisseur linéairement variable. Cas d'une surcharge uniformément répartie.* Journ. de Math. et de Ph. appl., vol. 1, 1950, p. 328 et suiv.

ACTUALITÉ INDUSTRIELLE (9)

L'alimentation de l'électro-aimant du synchrotron à protons du CERN, à Genève [1]

Dans les synchrotrons, les particules lancées sur une trajectoire circulaire subissent à chaque révolution une nouvelle accélération. L'augmentation de leur vitesse entraîne naturellement un accroissement de la force centrifuge qui s'exerce sur elles. Il faut donc que la force qui les maintient sur leur trajectoire et qui est proportionnelle au champ de l'électro-aimant de guidage, dont les éléments sont disposés tout le long du parcours, augmente également. Il s'ensuit que le courant d'excitation de l'électro-aimant doit croître pendant toute la période d'accélération. L'électro-aimant doit ensuite

[1] Article paru dans la *Revue Brown Boveri*, t. 46 (1959), nº 6, p. 327 à 349.