Transformation de Laplace et équations différentielles

Autor(en): **Blanc, Ch.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **69 (1943)**

Heft 3

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-52504

69e année — 6 février 1943 — N° 3

BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ABONNEMENTS :
Suisse : 1 an, 13.50 francs
Etranger : 16 francs
Pour sociétaires :
Suisse : 1 an, 11 francs
Etranger : 13.50 francs

Prix du numéro : 75 centimes.

Pour les abonnements s'adresser à la librairie F. Rouge & Cie, à Lausanne.

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Rédaction : D. Bonnard, ingénieur, Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Transformation de Laplace et équations différentielles

par Ch. BLANC, professeur à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne.

La recherche de l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants est un problème assez simple ; il ne se complique guère lorsqu'il s'agit d'un système d'équations : la méthode est donnée dans tous les traités d'analyse. Mais, le plus souvent, on doit chercher une intégrale particulière ; la détermination des constantes d'intégration conduit alors à la résolution d'un système d'équations algébriques linéaires dont on peut dire, à juste titre, qu'elle constitue « un chiffrage fastidieux sans difficulté ».

Lorsqu'il s'agit d'équations linéaires aux dérivées partielles, la recherche de l'intégrale générale ne va plus aussi facilement ; le procédé de séparation des variables, qu'on emploie si souvent, ne peut être considéré comme une méthode générale. En outre, on est ensuite obligé de déterminer des constantes ou fonctions arbitraires, ce qui représente de nouveau un calcul inutilement long. On voit du reste sans peine qu'il est peu « économique » de chercher une intégrale générale pour ensuite la particulariser, surtout si les deux opérations exigent de longs calculs.

La *transformation de Laplace* permet de calculer très simplement l'intégrale particulière lorsque les conditions qui fixent les arbitraires sont des *conditions initiales* ; elle remplace alors les dérivations par des multiplications, ce qui transforme l'équation différentielle donnée en une équation algébrique linéaire.

Nous allons donner un exposé de ce qu'il faut connaître de la transformation de Laplace pour pouvoir l'appliquer à l'intégration d'équations différentielles. Nous ne pourrons être complet : les théorèmes, pour être démontrés en toute rigueur et en toute généralité, exigent de longs développements. Nous signalerons en passant les points qui demanderaient des compléments : le lecteur curieux d'en savoir plus trouvera ces compléments dans le bel ouvrage de M. Dœtsch [1]. A la fin de cet exposé, nous donnerons quelques exemples d'application de la transformation de Laplace à des équations qui se rencontrent en technique.

I. Définitions et théorèmes.

Soit $F(t)$ une fonction de t, définie pour $t \geq 0$. Si l'intégrale

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-ts}\, F(t)\, dt \qquad (1)$$

a un sens, on dit que $f(s)$ est la *transformée* de $F(t)$ par la transformation de Laplace. La relation (1) définit la *transformation de Laplace.* $F(t)$ est la *fonction génératrice.* On écrira pour abréger

$$f(s) = \mathfrak{L}\{F(t)\}.$$

[1] *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* (Berlin, éd. Springer 1937).

Par exemple, si $F(t) = t$, on a

$$\mathfrak{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty t e^{-st} dt = \left| -\frac{t}{s} e^{-st} \right|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} dt,$$

d'où $$\mathfrak{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

Nous allons voir que si $F(t)$ satisfait à une équation différentielle linéaire, $f(s)$ satisfait à une équation algébrique du premier degré. Le calcul de $f(s)$ ne présente alors aucune difficulté ; on repasse ensuite à $F(t)$ par une méthode que nous donnerons.

Toute la théorie nécessaire repose sur quatre théorèmes que nous allons énoncer et démontrer.

Théorème 1. La transformation de Laplace est linéaire, c'est-à-dire que

$$\mathfrak{L}\{F_1 + F_2\} = \mathfrak{L}\{F_1\} + \mathfrak{L}\{F_2\}; \quad \mathfrak{L}\{CF_1\} = C\,\mathfrak{L}\{F_1\}.$$

La démonstration résulte sans autre de propriétés connues de l'intégrale. Comme l'intégrale (1) est une intégrale généralisée (limite infinie), il faut supposer, pour que les relations ci-dessus aient lieu, que tous les termes qui y figurent existent.

Théorème 2 (Théorème de la dérivée). *Si* F'(t) *existe,*

$$\mathfrak{L}\{F'(t)\} = s\,.\,\mathfrak{L}\{F(t)\} - F(0). \qquad (2)$$

Démonstration : Calculons $\mathfrak{L}\{F'(t)\}$. En intégrant par parties, il vient

$$\int_0^\infty e^{-st} F'(t)\,dt = \left| e^{-st} F(t) \right|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} F(t) dt =$$

$$= -F(0) + s\mathfrak{L}\{F(t)\}.$$

Remarque : Le théorème suppose que s est tel que

$$\lim_{t \to \infty} e^{-st} F(t) = 0.$$

Corollaire : En faisant les hypothèses nécessaires sur l'existence des quantités que nous introduisons, on a

$$\mathfrak{L}\{F''(t)\} = s^2\mathfrak{L}\{F(t)\} - [sF(0) + F'(0)].$$

Cela résulte de l'application itérée du théorème 2. Par récurrence, on calculera de même $\mathfrak{L}\{F^{(n)}(t)\}$.

Ces théorèmes nous permettent déjà d'indiquer comment on appliquera la transformation de Laplace. Soit par exemple l'équation différentielle

$$u'' + 4u' - 5u = 1,$$

dont on cherche l'intégrale particulière telle que, pour $t = 0$, $u = 2$, $u' = 0$. On a, en écrivant $v(s) = \mathfrak{L}\{u(t)\}$,

$$\mathfrak{L}\{u'\} = sv - 2,$$
$$\mathfrak{L}\{u''\} = s^2 v - 2s,$$
$$\mathfrak{L}\{1\} = \frac{1}{s},$$

et en vertu de la linéarité

$$s^2 v - 2s + 4(sv - 2) - 5v = \frac{1}{s},$$

d'où $$v = \frac{\frac{1}{s} + 2s + 8}{s^2 + 4s - 5}.$$

Il faut ensuite revenir de $v(s)$ à $u(t)$; on verra plus loin comment on procède.

Théorème 3 (Théorème de composition). *Si l'on a*

$$P(t) = \int_0^t a(\tau)\,b(t-\tau)\,d\tau \qquad (3)$$

alors $$\mathfrak{L}\{P(t)\} = \mathfrak{L}\{a(t)\}\,.\,\mathfrak{L}\{b(t)\}. \qquad (3')$$

(pour autant que les expressions ci-dessus ont un sens).

Remarque : On dit que $P(t)$ résulte de la *composition* de $a(t)$ et de $b(t)$. On écrit, à la place de (3),

$$P(t) = a(t) * b(t),$$

en remarquant que la composition est commutative.

Démonstration du théorème 3 : Calculons $\mathfrak{L}\{P(t)\}$:

$$\mathfrak{L}\{P(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} P(t)\,dt = \int_0^\infty\int_0^t e^{-st} a(\tau)\,b(t-\tau)\,dt\,d\tau =$$

$$= \int_0^\infty\int_\tau^\infty e^{-st} a(\tau)\,b(t-\tau)\,d\tau\,dt,$$

en renversant l'ordre des intégrations. En posant

$$\tau = u, \quad t = u + v$$

dans la dernière intégrale double, on obtient

$$\mathfrak{L}\{P(t)\} = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)} a(u)\,b(v)\,du\,dv$$

$$= \int_0^\infty e^{-su} a(u)\,du \;.\; \int_0^\infty e^{-sv} b(v)\,dv =$$

$$= \mathfrak{L}\{a(t)\}\,.\,\mathfrak{L}\{b(t)\}.$$

c. q. f. d.

Théorème 4 (Théorème du retard). *Soit une fonction* F(t) *définie pour* t $\geqq$ 0 : *soit d'autre part* G(t) *une fonction définie de la façon suivante :*

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & \text{si } t \geqq a \; (a > 0) \\ 0 & \text{si } t < a. \end{cases}$$

Alors

$$\mathfrak{L}\{G(t)\} = e^{-sa}\,\mathfrak{L}\{F(t)\}.$$

Démonstration : On calcule simplement $\mathfrak{L}\{G(t)\}$:

$$\mathfrak{L}\{G(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,G(t)\,dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-st}\,G(t)\,dt = \int_a^\infty e^{-st} F(t-a)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(t+a)} F(t)\,dt$$

$$= e^{-sa}\int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt.$$

c. q. f. d.

Ce théorème sera utilisé particulièrement dans l'intégration d'équations de propagation d'onde.

Transformation inverse de (1). La relation (1) permet de calculer la transformée à partir de la fonction génératrice. Il existe une intégrale permettant d'effectuer la transformation inverse. Mais il est plus simple d'avoir recours à une *table de transformées* (de même que pour calculer une intégrale, on utilise une table de dérivées et non la définition par une limite de sommes). Nous donnons ci-dessous une table de transformées : on pourra vérifier sans peine les calculs.

On peut se poser la question de l'*unicité* de la transformation inverse. On démontre que deux fonctions $F(t)$ et $G(t)$ qui ont même transformée sont égales partout, excepté peut-être sur un ensemble de mesure nulle ; il en résulte pratiquement, pour l'ingénieur, que si une fonction donnée est une transformée, elle n'admet qu'une fonction génératrice.

Usage de la table. On utilise cette table dans le même esprit qu'une table de primitives. Si la fonction $f(s)$ dont on cherche la génératrice figure dans la table, la solution est immédiate. Sinon, on cherche à s'y ramener, soit par la transformation de $f(s)$, soit en utilisant les théorèmes 3 et 4. Ainsi, si $f(s)$ est le produit de deux fonctions dont on connaît les génératrices, le théorème 3 donne la génératrice de $f(s)$; si $f(s) = e^{-as}g(s)$, et si on connaît la génératrice de $g(s)$, la génératrice de $f(s)$ est connue grâce au théorème 4. Enfin, si $f(s)$ est une fonction rationnelle, on trouvera sa génératrice en faisant une décomposition en éléments simples, qui nous donnera des fonctions figurant dans la table.

La table que nous donnons se limite aux cas usuels : l'ouvrage cité de M. *Dœtsch* se termine par une table sensiblement plus complète. On trouvera d'autre part une collection fort abondante de transformées (près de 700) dans le fascicule nº 100 du Mémorial des Sciences mathématiques : N. W. Mc Lachlan et P. Humbert : *Formulaire pour le calcul symbolique* (Paris, Gauthier-Villars, 1941) ; dans ce dernier ouvrage, les définitions et les notations diffèrent quelque peu de celles qui sont données ici.

2. Exemples.

I. Une équation différentielle.

Soit l'équation

$$Mx'' + fx' - 2\rho gx = \mu g. \qquad (1)$$

C'est l'équation différentielle du mouvement d'une machine d'*Atwood* lorsqu'on tient compte d'un frottement proportionnel à la vitesse, ainsi que du poids du fil. Prenons les conditions initiales

$$x = x_o, \quad x' = 0 \quad \text{pour } t = 0.$$

En posant

$$y = x + \frac{\mu}{2\rho},$$

Table de transformées.

Nº	$F(t)$	$f(s) = \mathfrak{L}\{F(t)\}$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
4	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
5	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
6	$sh\ at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
7	$ch\ at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
8	$e^{-at}\sin wt$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$
9	$e^{-at}\cos wt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$
10	$e^{-at}\, sh\, wt$	$\frac{w}{(s+a)^2-w^2}$
11	$e^{-at}\, ch\, wt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2-w^2}$
12	$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
13	$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
14	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
15	$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$e^{-a\sqrt{s}}$
16	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}}$
17	$J_n(t)$ (Bessel)	$\frac{(\sqrt{1+s^2}-s)^n}{\sqrt{1+s^2}}\ (n > -1)$
18	$J_o(\alpha\sqrt{t})$	$\frac{1}{s} e^{-\frac{{}^2}{4s}}$
19	$F(at)$	$\frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$

l'équation (1) devient

$$My'' + fy' - 2\rho gy = 0 \qquad (2)$$

avec les conditions initiales

$$y = x_o + \frac{\mu}{2\rho}, \quad y' = 0 \quad \text{pour } t = 0.$$

En posant $u = \mathfrak{L}\{y\}$, on transforme (2) en

$$(Ms^2 + fs - 2\rho g)\, u = \left(x_o + \frac{\mu}{2\rho}\right)(Ms + f),$$

d'où

$$u = \left(x_o + \frac{\mu}{2\rho}\right) \frac{s + \frac{f}{M}}{s^2 + \frac{f}{M}s - \frac{2\rho g}{M}},$$

ou, en posant

$$\frac{f}{M} = 2b, \ \frac{2\rho g}{M} = \omega^2 - b^2,$$

$$u = \left(x_o + \frac{\mu}{2\rho}\right) \frac{s + 2b}{(s+b)^2 - \omega^2}.$$

La table des transformées donne alors immédiatement

$$y = \left(x_o + \frac{\mu}{2\rho}\right) e^{-bt} \left(ch\,\omega t + \frac{b}{\omega} sh\,\omega t\right)$$

d'où

$$x = \left(x_o + \frac{\mu}{2\rho}\right) e^{-bt} \left(ch\,\omega t + \frac{b}{\omega} sh\,\omega t\right) - \frac{\mu}{2\rho},$$

qui est l'intégrale cherchée de (1).

II. *Equation des télégraphistes.*

Nous allons intégrer l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = CL \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

qui est l'équation de la tension u dans une ligne sans pertes, de capacité et de self-induction linéaires C et L. Nous poserons $CL = \frac{1}{V^2}$, et nous choisirons les conditions initiales

$$u = 0, \ \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{pour } t = 0 \qquad (2)$$

(tension et courant nuls au temps $t = 0$), et les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u &= A(t) \quad \text{pour } x = 0, \\ u &= Ri \quad \text{pour } x = l. \end{aligned} \qquad (3)$$

Transformons l'équation (1) par la transformation de Laplace. Il vient, en posant $v(x, s) = \mathfrak{L}\{u(x, t)\}$, et en tenant compte de (2)

$$v'' - \left(\frac{s}{V}\right)^2 v = 0. \qquad (4)$$

Les accents désignent des dérivations par rapport à x. Nous *admettons*, en écrivant (4), que l'on peut permuter la dérivation et la transformation de Laplace. Il faut transformer également les conditions (3). On a

$$L \frac{\partial i}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial x},$$

donc, en transformant,

$$Ls\,\mathfrak{L}\{i\} = -v',$$

et les relations (3) deviennent

$$\begin{aligned} v &= a(s) \quad \text{pour } x = 0, \quad a(s) = \mathfrak{L}\{A(t)\} \\ Lsv + Rv' &= 0 \quad \text{pour } x = l. \end{aligned} \qquad (5)$$

L'intégrale générale de (4) est

$$v = c_1 e^{\frac{s}{V}x} + c_2 e^{-\frac{s}{V}x},$$

et les conditions (5) donnent

$$c_1 + c_2 = a(s)$$

$$c_1 \left(L + \frac{R}{V}\right) e^{\frac{sl}{V}} + c_2 \left(L - \frac{R}{V}\right) e^{-\frac{sl}{V}} = 0,$$

d'où, en posant

$$\gamma = \frac{L - \frac{R}{V}}{L + \frac{R}{V}},$$

$$v(x, s) = \frac{a(s)}{1 - \gamma e^{-\frac{2sl}{V}}} \left[e^{-\frac{s}{V}} - \gamma e^{-\frac{sx}{V}(2l - x)} \right],$$

ou encore

$$u(x, s) = a(s) \sum_0^\infty \gamma^n e^{-\frac{s}{V}(x + 2ln)} - a(s) \sum_1^\infty \gamma^n e^{-\frac{s}{V}(2ln - x)}.$$

Or, par le théorème 4,

$$a(s)\, e^{-\alpha s} = \mathfrak{L}\{A(t - \alpha)\}, \quad \text{avec } A(\tau) = 0 \text{ si } \tau < 0$$

donc

$$u(x, t) = \sum_0^\infty \gamma^n A\left(t - \frac{x + 2ln}{V}\right) - \sum_1^\infty \gamma^n A\left(t - \frac{2ln - x}{V}\right).$$

On a une propagation d'onde avec réflexion aux extrémités de la ligne ; à l'extrémité $x = l$, l'onde est réfléchie avec multiplication de u par $-\gamma$. Il y a trois cas particuliers remarquables :

$R = 0$; alors $\gamma = 1$; il y a réflexion avec changement de signe ;

$R = \infty$; alors $\gamma = -1$; réflexion sans changement de signe ;

$R = LV$; alors $\gamma = 0$; l'onde est complètement absorbée à l'extrémité $x = l$.

Si maintenant, modifiant (3), nous supposons qu'en $x = l$ la ligne est fermée sur une résistance *inductive*, les calculs ne sont guère plus compliqués ; si L^* est le coefficient de self-induction de cette résistance, on a pour $v(x, s)$ la même expression que ci-dessus à condition de poser

$$\gamma = \frac{L - \frac{R + L^* s}{V}}{L + \frac{R + L^* s}{V}};$$

γ dépend alors de s, et il faut en tenir compte. La première réflexion donne

$$v_1(x, s) = -a(s)\,\gamma(s)\, e^{-\frac{s}{V}(2l - x)} = -a(s)\, w(x, s)$$

avec

$$w(x, s) = \left(-1 + \frac{2\frac{LV}{L^*}}{\frac{LV + R}{L^*} + s} \right) e^{-\frac{s}{V}(2l - x)}.$$

Or

$$\frac{2\frac{LV}{L^*}}{\frac{LV+R}{L^*}+s}=\frac{2LV}{L^*}\mathfrak{L}\left\{e^{-\frac{LV+R}{L^*}t}\right\},$$

donc

$$\frac{\frac{2LV}{L^*}}{\frac{LV+R}{L^*}+s}e^{-\frac{s}{V}(2l-x)}=\frac{2LV}{L^*}\mathfrak{L}\left\{e^{-\frac{LV+R}{L^*}\left(t-\frac{2l-x}{V}\right)}\right\},$$

d'où par le théorème de composition

$$u_1(x,t)=A\left(t-\frac{2l-x}{V}\right)-$$

$$-\frac{2LV}{L^*}\int_0^t A(t-\tau)\,e^{-\frac{LV+R}{L^*}\left(\tau-\frac{2l-x}{V}\right)}d\tau,$$

ce qui montre qu'il y a *diffusion* de l'onde après réflexion.

III. *Equation de la chaleur.*

On sait que la température u d'un mur indéfini et homogène, avec sources de chaleur uniformément réparties, vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}-A(t), \tag{1}$$

où a est un coefficient dépendant de la nature physique du mur : $A(t)$ mesure la quantité de chaleur dégagée par unité de volume et de temps au temps t ; nous allons intégrer (1) avec la condition initiale

$$u=0 \quad \text{si } t=0, \tag{2}$$

et les conditions aux limites

$$u=0 \quad \text{si } x=0 \text{ et } x=l. \tag{3}$$

En transformant (1) et en posant

$$v(x,s)=\mathfrak{L}\{u(x,t)\},\quad \varphi(s)=\mathfrak{L}\{A(t)\},$$

on a

$$v''-\frac{s}{a^2}v=-\varphi(s), \tag{4}$$

avec les conditions aux limites

$$v=0 \quad \text{si } x=0 \text{ et } x=l.$$

Il est avantageux d'intégrer (4) au moyen d'une série de Fourier. On trouve ainsi

$$v=\sum_1^\infty b_n(s)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

avec

$$b_n=\frac{2[1-(-1)^n]a^2}{n\pi}\,\frac{\varphi(s)}{s+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2}.$$

Or

$$\frac{1}{s+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2}=\mathfrak{L}\left\{e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\right\}$$

d'où

$$\frac{\varphi(s)}{s+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2}=\mathfrak{L}\left\{\int_0^t A(t-\tau)\,e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2\tau}d\tau\right\}$$

et

$$u(x,t)=\frac{2a^2}{\pi}\sum_1^\infty\frac{1-(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^t A(t-\tau)\,e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2\tau}d\tau$$

qui est l'intégrale cherchée.

Si, en particulier, $A(t)=$ constante $=A$, il vient plus simplement

$$u(x,t)=\frac{2l^2A}{\pi^3}\sum_1^\infty\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(1-e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\right).$$

IV. *Equation à coefficients variables.*

Nous avons appliqué jusqu'ici la transformation de Laplace à des équations à coefficients constants. Cette restriction peut être levée partiellement : si l'équation est aux dérivées partielles, par rapport à x et t, et si l'on applique la transformation par rapport à t, les coefficients peuvent être des fonctions de x.

Prenons par exemple l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left[\frac{2A\psi'(x)}{A\psi(x)+B}-\frac{\psi''(x)}{\psi'(x)}\right]\frac{\partial y}{\partial x}-\psi'^2(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0. \tag{1}$$

Si nous choisissons les conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} y&=0\\ \frac{\partial y}{\partial t}&=0\end{aligned}\right\}\quad \text{pour } t=0 \tag{2}$$

et les conditions aux limites

$$\begin{aligned} y&=F_1(t) \quad \text{pour } x=0\\ y&=F_2(t) \quad \text{pour } x=l,\end{aligned} \tag{3}$$

il vient, par la transformation de Laplace, en posant $u=\mathfrak{L}\{y\}$,

$$u''+\left[\frac{2A\psi'}{A\psi+B}-\frac{\psi''}{\psi'}\right]u'-\psi'^2s^2u=0 \tag{4}$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} u&=f_1(s)=\mathfrak{L}\{F_1(t)\} \quad \text{pour } x=0\\ u&=f_2(s)=\mathfrak{L}\{F_2(t)\} \quad \text{pour } x=l.\end{aligned} \tag{5}$$

L'intégrale générale de (4) est

$$u=\frac{1}{A\psi+B}[c_1e^{s\psi}+c_2e^{-s\psi}].$$

En introduisant les conditions aux limites, et en procédant comme plus haut (équation des télégraphistes), on obtient une somme de termes de la forme

$$v=f_i(s)\,e^{-s\,\varphi(x)}h(x),$$

qui sont les transformées des fonctions

$$z=h(x)\,F_i[t-\varphi(x)].$$

On met ainsi en évidence une propagation d'onde à vitesse variable, sans diffusion.

L'équation (1) généralise l'équation des propagations d'ondes dans les conduites à caractéristiques linéairement variables[1]. C'est l'équation du cas le plus général sans diffusion.

Conclusions. Nous espérons avoir montré que la transformation de Laplace est une méthode rapide et sûre pour intégrer les équations différentielles et aux dérivées partielles linéaires, lorsqu'on cherche une intégrale particulière fixée par des *conditions initiales.* Les problèmes aux limites, ceux de régimes permanents, en particulier, se résolvent par d'autres méthodes. Nous pouvons vérifier ici la remarque que nous avons faite déjà : « La méthode à choisir pour venir à bout de l'intégration dépend dans une plus large mesure de la nature des conditions qui fixent les arbitraires que de la forme de l'équation elle-même [2] ». Il serait vain, par exemple, d'utiliser la transformation de Laplace pour calculer des régimes permanents ; mais il est remarquable qu'il existe, pour chaque type de conditions fixant les arbitraires, une méthode de transformation analogue à celle de Laplace.

Lausanne, le 15 janvier 1943.

Projet d'accumulation hydraulique de Rossens-Hauterive sur la Sarine

par J.-F. BRUTTIN, ingénieur aux « Entreprises électriques fribourgeoises ».

Dans le programme décennal de construction d'usines hydroélectriques établi par l'Association suisse des électriciens et l'Union des centrales suisses d'électricité, le projet de Rossens-Hauterive ne figure que dans un tableau annexe comme usine d'intérêt régional. Cependant l'importance de cette installation et le rôle qu'elle sera appelée à jouer dans l'économie électrique de la Suisse romande, lui confèrent un intérêt qui dépasse les limites du canton de Fribourg.

Aussi, pensons-nous qu'il n'est plus prématuré d'exposer dans cette revue le but de la construction du barrage de Rossens et les grandes lignes du projet dont la mise au point vient d'être décidée par le Conseil d'administration des Entreprises électriques fribourgeoises (EEF.).

Caractéristiques et but de la nouvelle installation (voir fig. 1).

Le nouvel aménagement de Rossens-Hauterive consiste dans la création d'un lac artificiel dans la basse Gruyère, destiné à régulariser le débit de la Sarine qui alimente l'usine d'Hauterive construite en 1902 au fil de l'eau et à en augmenter la chute. Par suite de l'accumulation, le débit maximum des turbines d'Hauterive passera de 25 à 75 m³/sec et la chute brute moyenne de 69 à 95 m. La production annuelle d'énergie qui est actuellement de 40 à 50 millions de kWh, répartie très irrégulièrement sur l'année, atteindra en moyenne environ 200 millions de kWh, dont 80 au minimum en hiver.

Ces quelques chiffres montrent clairement le premier but de la nouvelle installation qui est d'augmenter et de régulariser la fourniture de courant aux réseaux des EEF.

Or, pour cette importante distribution, les EEF. ne disposent que d'usines au fil de l'eau sur la Sarine et de l'usine de Broc sur la Jogne. Le bassin d'accumulation de cette dernière permet une certaine égalisation des pointes, mais est nettement insuffisant pour compenser les débits d'étiage pendant des périodes prolongées. Aussi la fourniture de courant est-elle irrégulière et actuellement insuffisante pendant de longues périodes de l'année au cours desquelles les EEF doivent avoir recours à des sources de courant extérieures.

Par la construction de Rossens, les EEF. seront à même de fournir pendant toute l'année le courant de base à leurs réseaux et de couvrir à tout instant des pointes momentanées de 50 à 70 000 kW, suivant le niveau du lac.

Si nous dépassons maintenant le cadre local, conformément à la tendance actuelle d'organiser la production d'énergie sur l'ensemble du pays, nous constatons que les caractéristiques et la position de Rossens complètent d'une façon particulièrement satisfaisante l'équipement électrique de la Suisse romande.

Avec l'usine basse chute du Verbois au fil de l'eau, et l'usine haute chute de la Dixence à accumulation essentiellement hivernale, l'usine de Rossens-Hauterive, à chute moyenne et accumulation annuelle, forme un ensemble harmonieux capable de répartir d'une façon à peu près régulière sur toute l'année un peu plus de 800 millions de kWh, soit un dixième de la production totale de la Suisse dans ces dernières années.

Signalons enfin que la situation de l'usine d'Hauterive au centre du pays et à proximité immédiate des grandes lignes d'interconnexion de l'EOS vers la Suisse romande et de Galmiz-Mühleberg vers la Suisse allemande, l'appellera sans doute à fonctionner comme usine de secours en cas d'accident ou d'avarie aux lignes et centrales situées excentriquement sur les frontières.

Données hydrographiques et production d'énergie.

Le régime de la Sarine, dont le bassin versant ne comprend qu'une très petite proportion de glaciers, est un des plus variables que l'on puisse constater en Suisse. La moyenne des débits journaliers varie à Fribourg, par exemple, de 5 m³/sec à 150 m³/sec, les crues momentanées atteignant 300 et 350 m³/sec chaque année et exceptionnellement 600 à 700 m³/sec.

[1] Voir H. FAVRE : « La résonance des conduites à caractéristiques linéairement variables », *Bulletin technique*, numéro du 7 mars 1942.

[2] Voir : « Les méthodes du calcul symbolique », par CH. BLANC. *Bulletin technique* du 9 janvier 1943. p. 1 à 5.