

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 64 (1948-1950)
Heft: 273

Artikel: Contribution à l'étude des ultrasons [suite] : absorption par les solides
Autor: Mercier, R.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-273966>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Contribution à l'étude des ultrasons

(suite)

PAR

R. MERCIER

(Séance du 17 novembre 1948)

3. Coefficients d'élasticité et de viscosité.

Dans une première note, l'auteur a esquissé les grandes lignes d'une théorie formelle simplifiée de la propagation des ondes mécaniques longitudinales dans un solide isotrope, théorie qui doit permettre de discriminer, parmi les différentes causes de l'absorption de ces ondes, celles afférant à la viscosité de celles correspondant à la plasticité. A ce sujet, de nombreux auteurs ont établi des théories basées sur des modèles ou simplement sur la thermodynamique du solide, qui toutes cherchent à ramener l'absorption à un phénomène plus ou moins compliqué de viscosité. La diversité de ces théories démontre bien qu'aucune n'est satisfaisante et que les nombreuses mesures de l'absorption de l'énergie mécanique faites dans des circonstances très variées ne cadrent pas avec ces théories.

L'idée directrice que nous nous proposons d'exploiter ici consiste à mettre en évidence le rôle joué par les déformations de striction (déformations angulaires) dans la propagation des ondes mécaniques dites longitudinales; on sait en effet que le module d'Young E intervenant dans les lois de la déformation des longueurs peut être exprimé au moyen du module de glissement G qui s'introduit dans les lois de la déformation angulaire, tout au moins en première approximation. On a en effet

$$E = 2 G (1 + m)$$

où m est le module de Poisson ou de contraction latérale, dans le cas d'élasticité pure. Cette relation permet d'écrire la loi fondamentale de l'élasticité sous la forme tensorielle

$$\Psi = (1/\alpha - \frac{2}{3} G) I \text{ tr } \Phi + 2 G \Phi \quad 3.1$$

où Ψ est le tenseur des tensions et Φ est le tenseur de la déformation pure, une fois déduits les déplacements de translation et de rotation du milieu¹. Cette notation est équivalente à la suivante, obtenue en faisant emploi d'un système de coordonnées cartésien, de directions quelconques :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{2}{3} G \right) (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2 G e_{11} & \tau_{12} &= 2 G e_{12} \\ \sigma_{22} &= \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{2}{3} G \right) (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2 G e_{22} & \tau_{23} &= 2 G e_{23} \\ \sigma_{33} &= \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{2}{3} G \right) (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2 G e_{33} & \tau_{31} &= 2 G e_{31} \end{aligned} \right\} 3.2$$

où les σ sont les tensions normales, τ les tensions tangentielles, e_{ii} les allongements spécifiques dans le sens des axes et les e_{ij} représentent la moitié des déformations angulaires du parallélépipède élémentaire. Comme finalement la trace de Ψ et celle de Φ sont proportionnelles, leur rapport étant le triple de l'inverse du coefficient de compressibilité (la trace de Ψ représente le triple de la tension « moyenne »), la loi de l'élasticité pure peut encore se mettre sous la forme très symétrique

$$(\Psi - \frac{1}{3} \mathbf{I} \operatorname{tr} \Psi) = 2 G (\Phi - \frac{1}{3} \mathbf{I} \operatorname{tr} \Phi) \quad 3.3$$

Or l'étude des milieux isotropes fluides visqueux fait intervenir les vitesses de déformation, en particulier des déformations angulaires. Ces vitesses de déformation constituent un nouveau tenseur dont les éléments sont les dérivées par rapport au temps du tenseur des déformations Φ . On peut donc le noter $\dot{\Phi}$. Si maintenant, on considère comme première approximation (d'ailleurs suffisante dans tous les cas d'application) une loi de proportionnalité entre les vitesses de déformation angulaire et les tensions tangentielles, on obtient, sous forme tensorielle, l'expression

$$(\Psi - \frac{1}{3} \mathbf{I} \operatorname{tr} \Psi) = 2 \eta (\dot{\Phi} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \operatorname{tr} \dot{\Phi}) \quad 3.4$$

qui est équivalente aux expressions cartésiennes

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} - \bar{\sigma} &= 2 \eta (\dot{e}_{11} - \dot{\bar{e}}) & \tau_{12} &= 2 \eta \dot{e}_{12} \\ \sigma_{22} - \bar{\sigma} &= 2 \eta (\dot{e}_{22} - \dot{\bar{e}}) & \tau_{23} &= 2 \eta \dot{e}_{23} \\ \sigma_{33} - \bar{\sigma} &= 2 \eta (\dot{e}_{33} - \dot{\bar{e}}) & \tau_{31} &= 2 \eta \dot{e}_{31} \end{aligned} \right\} 3.5$$

¹ A. MERCIER : Leçons et problèmes sur la théorie des corps déformables. Rouge, Lausanne, 1943.

La comparaison des deux lois fondamentales de l'élasticité pure et de la viscosité pure fait entrevoir la forme générale de la loi régissant le comportement d'un milieu continu élastique avec rigidité et viscosité. On peut imaginer en effet que lors de son mouvement, des tensions (normales et tangentielles) seront nécessaires pour entretenir la déformation actuelle, représentée par le tenseur Φ et que, de plus, des tensions supplémentaires devront exister pour entretenir les vitesses de déformation. En vertu de la linéarité des lois ci-dessus, on voit que les relations générales exprimeront une simple superposition des tensions. On admettra donc, en première approximation, la loi

$$(\Psi - \frac{1}{3} I \text{ tr } \Psi) = 2 G (\Phi - \frac{1}{3} I \text{ tr } \Phi) + 2 \eta (\dot{\Phi} - \frac{1}{3} I \text{ tr } \dot{\Phi}) \quad 3.6$$

pour le solide visqueux. Toutefois une relation supplémentaire doit être adjointe qui liera les traces des tenseurs entre elles. C'est là que se pose un problème assez ancien mais qui n'a pas encore reçu de solution satisfaisante.

Dans le cas de l'élasticité pure, nous avons vu que la dilatation spécifique, mesurée par la trace de Φ était proportionnelle à la tension moyenne, mesurée par le tiers de la trace de Ψ . Lorsqu'un frottement interne existe dans le milieu, il se manifeste généralement par des tensions tangentielles supplémentaires et ce frottement est caractérisé par le coefficient de viscosité η . Mais si le milieu est animé d'un mouvement d'expansion, sans déformation angulaire, la tension moyenne $\bar{\sigma}$ est-elle entièrement déterminée par la dilatation spécifique actuelle ou, au contraire, faut-il un supplément de tension pour entretenir le mouvement d'expansion ? Pour être général, il faudrait admettre cette dernière éventualité, quitte à la supprimer si l'expérience (qui n'a pas encore répondu à cette question) en démontre l'inexistence ¹. Nous pourrions alors, toujours en première approximation, admettre une loi linéaire de viscosité d'expansion et écrire

$$\text{tr } \Psi = \frac{3}{\alpha} \text{tr } \Phi + 3 \lambda' \text{tr } \dot{\Phi} \quad 3.7$$

Le coefficient λ' ainsi introduit dans la théorie du solide élasto-visqueux sera le coefficient de *viscosité d'expansion*. Stokes, dans sa théorie, admet qu'il est nul.

¹ Voir page 177.

4. Cas du milieu plastique.

En suivant la ligne de développement donnée à la théorie du milieu élastique et visqueux, il semble logique de l'étendre au cas du solide plastique relaxatif de Maxwell; mais il faut alors généraliser l'expression 3 donnée dans la première note¹ concernant la liaison linéaire entre déformation angulaire et tension tangentielle.

L'hypothèse nouvelle consiste donc à admettre en première approximation la relation générale suivante :

$$\begin{aligned} (\dot{\Psi} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \operatorname{tr} \dot{\Psi}) + f (\Psi - \frac{1}{3} \mathbf{I} \operatorname{tr} \Psi) = 2 G (\dot{\Phi} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \operatorname{tr} \dot{\Phi}) \\ + 2 \eta (\ddot{\Phi} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \operatorname{tr} \ddot{\Phi}) \end{aligned} \quad 4.1$$

à condition d'adjoindre à cette équation celle qui exprime comment varie la dilatation spécifique, $\operatorname{tr} \Phi$. Par raison d'analogie et de symétrie, et toujours en première approximation, il semble naturel d'admettre la relation linéaire

$$\operatorname{tr} \dot{\Psi} + f' \operatorname{tr} \Psi = \frac{3}{\kappa} \operatorname{tr} \dot{\Phi} + 3 \lambda' \operatorname{tr} \ddot{\Phi} \quad 4.2$$

qui contient, outre les coefficients de compressibilité et de viscosité d'expansion, un troisième coefficient f' que l'on pourra appeler *module de plasticité d'expansion*². L'existence de celui-ci est suggérée par les variations définitives et mesurables de la densité de corps isotropes traités mécaniquement (compression, laminage, étampage, etc.).

Sous forme cartésienne, les relations générales ci-dessus, s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} (\dot{\sigma}_{11} - \dot{\bar{\sigma}}) + f (\sigma_{11} - \bar{\sigma}) &= 2 G (\dot{e}_{11} - \dot{\bar{e}}) + 2 \eta (\ddot{e}_{11} - \ddot{\bar{e}}) \\ (\dot{\sigma}_{22} - \dot{\bar{\sigma}}) + f (\sigma_{22} - \bar{\sigma}) &= 2 G (\dot{e}_{22} - \dot{\bar{e}}) + 2 \eta (\ddot{e}_{22} - \ddot{\bar{e}}) \\ (\dot{\sigma}_{33} - \dot{\bar{\sigma}}) + f (\sigma_{33} - \bar{\sigma}) &= 2 G (\dot{e}_{33} - \dot{\bar{e}}) + 2 \eta (\ddot{e}_{33} - \ddot{\bar{e}}) \\ \dot{\tau}_{12} + f' \tau_{12} &= 2 G \dot{e}_{12} + 2 \eta \ddot{e}_{12} \\ \dot{\tau}_{23} + f' \tau_{23} &= 2 G \dot{e}_{23} + 2 \eta \ddot{e}_{23} \\ \dot{\tau}_{31} + f' \tau_{31} &= 2 G \dot{e}_{31} + 2 \eta \ddot{e}_{31} \\ \dot{\bar{\sigma}} + f' \bar{\sigma} &= \frac{3}{\kappa} \dot{\bar{e}} + 3 \lambda' \ddot{\bar{e}} \end{aligned} \right\} \quad 4.3$$

¹ R. MERCIER : *Bull. SVSN*, 64, No 272, 1948.

² Les solides polycristallins présentent souvent un état de plasticité évidente lorsque les tensions internes dépassent une certaine limite. Nous écartons ici ce cas qui ne présente pas la « linéarité » postulée.

en rappelant que

$$\begin{aligned} 3 \bar{\sigma} &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ 3 \bar{e} &= e_{11} + e_{22} + e_{33} \end{aligned}$$

Il est évident que ce système n'est pas complet au sens des mathématiciens et qu'il ne saurait, seul, résoudre tous les problèmes. Toutefois ces équations permettent, entre autres, de déterminer les tensions lorsqu'on connaît le mouvement ou réciproquement, de déterminer le mouvement de déformation si les tensions sont supposées connues. Dans nos applications, il s'agira en général de rechercher les solutions périodiques dans le temps.

5. Cas des ondes planes.

Pour se rendre compte de l'effet de la viscosité et de la plasticité lors de la propagation d'ondes dans le milieu étudié, nous allons tout d'abord admettre que le mouvement ne se fait que parallèlement à un axe (celui des x) et que chaque plan normal à cet axe est simplement animé d'une translation. Le problème est alors ramené à sa forme la plus simple; on dira qu'on a un problème unidimensionnel. L'expression mathématique de ces hypothèses est

$$e_{22} = e_{33} = e_{12} = e_{23} = e_{31} = 0$$

et les équations tensions-déformations deviennent

$$\left. \begin{aligned} (\dot{\sigma}_{11} - \dot{\bar{\sigma}}) + f(\sigma_{11} - \bar{\sigma}) &= 2G(\dot{e}_{11} - \dot{\bar{e}}) + 2\eta(\ddot{e}_{11} - \ddot{\bar{e}}) & \tau_{12} &= 0 \\ (\dot{\sigma}_{22} - \dot{\bar{\sigma}}) + f(\sigma_{22} - \bar{\sigma}) &= -2G\dot{\bar{e}} - 2\eta\ddot{\bar{e}} & \tau_{23} &= 0 \\ (\dot{\sigma}_{33} - \dot{\bar{\sigma}}) + f(\sigma_{33} - \bar{\sigma}) &= -2G\dot{\bar{e}} - 2\eta\ddot{\bar{e}} & \tau_{31} &= 0 \\ \dot{\bar{\sigma}} + f'\bar{\sigma} &= \frac{3}{\chi}\dot{\bar{e}} + 3\lambda'\ddot{\bar{e}} \end{aligned} \right\} 5.1$$

On a de plus

$$\bar{e} = \frac{1}{3} e_{11} \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \quad 5.2$$

Admettons maintenant la dépendance périodique du temps, en utilisant les quantités complexes, et en postulant une propagation d'ondes planes, dans la direction de l'axe des x , cela fournit pour l'allongement spécifique e_{11} l'expression

$$e_{11} = E e^{i(\omega t - kx)}$$

De façon analogue, les tensions normales s'écrivent

$$\sigma_{11} = S_1 e^{i(\omega t - kx)} \quad \sigma_{22} = S_2 e^{i(\omega t - kx)} \quad \sigma_{33} = S_3 e^{i(\omega t - kx)}$$

où les S_i sont leur amplitude. Nous désignerons encore par $\bar{S}$ l'amplitude de la tension moyenne.

Substituant alors dans les équations 5.1 et 5.2, on obtient toutes les tensions, réelles et moyennes, en fonction de l'amplitude E , et chacune contient l'exponentielle imaginaire en facteur. Les relations entre amplitudes (complexes) sont :

$$\left. \begin{aligned} \bar{S} &= \frac{i \omega / \kappa - \lambda' \omega^2}{f' + i \omega} E \\ S_1 &= \left\{ \frac{i \omega / \kappa - \lambda' \omega^2}{f' + i \omega} + \frac{4}{3} \frac{i \omega G - \eta \omega^2}{f + i \omega} \right\} E \\ S_2 &= \left\{ \frac{i \omega / \kappa - \lambda' \omega^2}{f' + i \omega} - \frac{2}{3} \frac{i \omega G - \eta \omega^2}{f + i \omega} \right\} E = S_3 \end{aligned} \right\} 5.3$$

La première fait apparaître un coefficient de compressibilité dynamique κ_d qui peut s'écrire

$$1/\kappa_d = \frac{1/\kappa + i \lambda' \omega}{1 - i f'/\omega} \quad 5.4$$

Il est complexe pour toute fréquence et devient imaginaire pour de très basses fréquences; il devient même infini, ce qui équivaldrait à admettre que la matière prend un volume évanescent lors d'une compression. Ce fait étant physiquement absurde, on voit que le coefficient f' de plasticité de volume ne peut être que nul¹.

$$f' = 0$$

Alors le coefficient de compressibilité dynamique devient

$$1/\kappa_d = 1/\kappa + i \lambda' \omega$$

et dans l'hypothèse d'une indépendance entre les coefficients caractéristiques, κ , λ' , η , f , d'une part et la fréquence ω d'autre part, la valeur absolue de la compressibilité doit diminuer lorsque la fréquence augmente, mais aussi présenter un déphasage sur la pression moyenne, ce qui implique une dissipation d'énergie croissant avec la fréquence.

¹ On peut aussi admettre que la plasticité ne suit pas une loi de proportionnalité; nous renvoyons ce cas, souvent rencontré en pratique, à une étude ultérieure.

Avec la dernière simplification ($f' = 0$), les tensions prennent les valeurs :

$$\left. \begin{aligned} \bar{S} &= \frac{1}{\kappa_d} E \\ S_1 &= \left\{ \frac{1}{\kappa} + i \lambda' \omega + \frac{4}{3} \frac{i \omega G - \eta \omega^2}{f + i \omega} \right\} E \\ S_2 &= \left\{ \frac{1}{\kappa} + i \lambda' \omega - \frac{2}{3} \frac{i \omega G - \eta \omega^2}{f + i \omega} \right\} E = S_3 \end{aligned} \right\} 5.5$$

Il est alors intéressant de prévoir comment doit varier, dans ces conditions, la célérité de phase de l'onde et le coefficient d'amortissement, ceci en fonction de la fréquence. Une comparaison avec les valeurs trouvées expérimentalement permettra de déterminer jusqu'à quel point les hypothèses formulées sont adéquates et éventuellement, de déduire des valeurs mesurées, les grandeurs numériques des coefficients introduits dans cette théorie. A cet effet, nous remarquons que les dernières expressions contiennent, dans leur parenthèse, le rapport constant existant entre la valeur maximum S_i de la tension normale et la valeur maximum de l'allongement spécifique e_i . Ces parenthèses ne représentent donc pas encore l'impédance d'onde Z , mais vont permettre de la calculer.

Si ξ représente le déplacement, au temps t , des points matériels dont l'abscisse (à l'état de repos) vaut x , l'allongement spécifique e_1 selon Ox est

$$e_{11} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

et sa valeur en x et à l'époque t est

$$e_{11} = E e^{i(\omega t - kx)}$$

Il en résulte, si nous excluons une translation quelconque du milieu,

$$\xi = - \frac{e_{11}}{i k}$$

de sorte que la vitesse v vaut

$$v = \dot{\xi} = - \frac{\omega}{k} e_{11} :$$

l'impédance d'onde Z , définie par le rapport complexe de la tension σ_{11} à la vitesse de déplacement v sera

$$Z = \frac{-\sigma_{11}}{v} = \frac{-S_1 e^{i(\omega t - kx)}}{-(\omega/k) e_{11}} = + \frac{k}{\omega} \left\{ \frac{1}{\kappa} + i\lambda'\omega + \frac{4}{3} \frac{i\omega G - \eta\omega^2}{f + i\omega} \right\} \quad 5.6$$

On voit ainsi que Z est liée au nombre d'onde k qui sera complexe en même temps que l'impédance d'onde.

D'autre part, la loi de Newton appliquée à une portion de matière d'extension infinitésimale, impose que

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} \quad 5.7$$

où ρ représente la densité actuelle de la matière et $\frac{Dv}{Dt}$ la dérivée matérielle; nous admettons que ρ est fort peu différente de sa valeur « au repos ». Or

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{i\omega^2}{k} (1 + e_{11}) e_{11}$$

et pour de petits mouvements, cette dérivée matérielle se réduit à la valeur

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{i\omega^2}{k} e_{11}$$

D'autre part la tension σ_{11} est aussi fonction harmonique du temps et du lieu, ce qui donne :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} = - ik S_1 e^{i(\omega t - kx)} = - ik \left\{ \frac{1}{\kappa} + i\omega\lambda' + \frac{4}{3} \frac{i\omega G - \omega^2\eta}{f + i\omega} \right\} e_{11}$$

Introduisons ces valeurs dans l'équation de Newton; on obtient

$$- \rho \frac{i\omega^2}{k} e_{11} = - ik [\dots] e_{11}$$

ou bien

$$\left(\frac{k}{\omega} \right)^2 = \frac{\rho}{[\dots]} \quad \frac{k}{\omega} = \rho^{1/2} [\dots]^{-1/2}$$

Substituant alors cette valeur dans Z , on obtient finalement

$$\underline{Z(\omega) = \rho^{1/2} \left[\frac{1}{\kappa} + i\omega\lambda' + \frac{4}{3} \frac{i\omega G - \omega^2\eta}{f + i\omega} \right]^{1/2}} \quad 5.8$$

Ainsi la recherche expérimentale de la loi de dispersion de l'impédance d'onde devrait permettre de contrôler la validité des hypothèses postulées. On voit en particulier que :

a) pour un fluide élastique parfait, l'impédance d'onde sera réelle et indépendante de la fréquence :

$$Z = \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} \quad G = \lambda' = f = \eta = 0$$

b) s'il s'agit d'un solide élastique parfait, il en sera de même

$$Z = \sqrt{\rho \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{4}{3} G \right)} \quad \lambda' = f = \eta = 0$$

c) si le solide ne présente pas de plasticité, Z sera complexe et il y aura extinction des ondes, produite par les deux viscosités

$$Z = \sqrt{\rho \left\{ \frac{1}{\kappa} + \frac{4}{3} G + i\omega \left(\lambda' + \frac{4}{3} \eta \right) \right\}} \quad f = 0$$

et, en particulier, la partie imaginaire de l'impédance contiendra un terme linéaire en ω qui proviendra de la viscosité de dilatation, représentée ici par λ' .

Au sujet de ce dernier phénomène, dont l'existence hypothétique a déjà été formulée par STOKES¹⁾ puis écartée après discussion sommaire, quelques rares auteurs ont essayé de repenser la question. Rappelons qu'il s'agit de savoir si la vitesse de compression (ou de dilatation) pouvait être limitée et s'il fallait pour produire cette compression exercer une pression hydrostatique en supplément de celle qui est nécessaire à l'équilibre ; dans l'affirmative, l'écart est-il proportionnel à la vitesse de la variation de volume ? A la connaissance de l'auteur, le premier travail fournissant un argument qui semble établir l'existence de la viscosité de dilatation est celui de L.-N. LIERBERMANN²⁾. Il est basé sur la mesure de l'absorption des ultrasons dans l'eau pure.

En général on mesurera le nombre d'onde k correspondant à une pulsation donnée. Ce nombre d'onde sera complexe et sa partie imaginaire correspondra au facteur d'extinction de l'onde.

¹ STOKES : Mathematical and Physical Papers, Vol. III, p. 55.

² N.-L. LIERBERMANN : The Origin of Sound Absorption in Water and Sea-Water, *Journ. of Acoust. Soc. America*, tome 20, p. 868, 1948.

En effet, en substituant la valeur 5,8 à Z dans l'équation 5,6, on obtient

$$k = \omega \rho^{1/2} \left\{ \frac{1}{\kappa} + i\omega\lambda' + \frac{4}{3} \frac{i\omega G - \omega^2 \eta}{f + i\omega} \right\}^{-1/2} \quad 5.9$$

et en séparant les parties réelles et imaginaires, c'est-à-dire en en posant

$$k = k_1 - i \cdot k_2$$

l'équation de l'onde de vitesse devient

$$v(x_1, t) = V_0 e^{-k_2 x} e^{i(\omega t - k_1 x)}$$

Enfin l'intensité J ou puissance spécifique moyenne de l'onde se calcule, comme d'habitude, au moyen de

$$J = 1/4 (Z v \cdot v^* + Z^* v^* \cdot v)$$

où l'astérisque indique qu'il faut prendre le complexe conjugué de la grandeur en cause.

6. Contrôle.

A titre de contrôle on peut rechercher ce que donne cette théorie générale dans le cas de la propagation d'ondes dans un milieu fluide et visqueux. Dans ce cas, il n'y a ni rigidité ($G = 0$), ni plasticité ($f = 0$). De plus nous admettons que les viscosités sont faibles.

Le coefficient d'affaiblissement de la vitesse (comme de la tension, d'ailleurs) est fourni par la partie imaginaire du nombre d'onde complexe, c'est-à-dire par k_2 . Or k devient ici

$$k = \omega \rho^{1/2} \left\{ \frac{1}{\kappa} + i\omega \left(\lambda' + \frac{4}{3} \eta \right) \right\}^{-1/2} \quad 6.1$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$k = \omega \rho^{1/2} \left(\frac{1}{\kappa} \right)^{-1/2} \left\{ 1 + i\omega\kappa \left(\lambda' + \frac{4}{3} \eta \right) \right\}^{-1/2}$$

Les viscosités sont supposées assez faibles pour que la partie imaginaire du nombre complexe entre crochets soit petite en regard de 1. Dans ces conditions, le nombre d'onde devient très sensiblement égal à

$$k = \omega \sqrt{\rho\kappa} \left\{ 1 - i \frac{\omega\kappa}{2} \left(\lambda' + \frac{4}{3} \eta \right) \right\}$$

et sa partie imaginaire

$$k_2 = -\omega \sqrt{\rho \kappa} \frac{\omega \kappa}{2} \left(\lambda' + \eta \right),$$

tandis que sa partie réelle est

$$k_1 = \omega \sqrt{\rho \kappa}$$

Cette dernière permet de calculer la célérité de phase de l'onde

$$u = \frac{\omega}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{\rho \kappa}}$$

et la longueur λ correspondante. En éliminant alors dans k_2 le coefficient de compressibilité κ , on obtient finalement pour le facteur d'extinction k_2 la valeur

$$k_2 = -\frac{2 \omega^2}{3 \rho u^3} \eta - \frac{\omega^2 \lambda'}{2 \rho u^3} \quad 6.2$$

Le premier terme est celui donné par STOKES lui-même, tandis que le second est attaché à l'existence de la viscosité de dilatation. C'est ce supplément d'extinction qui semble avoir été observé par N.-L. LIEBERMANN¹.

Ainsi la théorie de la propagation d'ondes mécaniques planes se propageant dans des milieux rigides, élastiques, visqueux et plastiques retrouve, comme cas particulier, un résultat classique.

¹ *loc. cit.*