

Valeur numériwue de K1

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **24 (1888)**

Heft 99

PDF erstellt am: **13.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale

$$w_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

On en tire

$$K_3 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K_1.$$

Ainsi, on vient de trouver

$$K_2 = K_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} K_1.$$

Valeur numérique de K_1 .

En vue d'une représentation qui sera faite ultérieurement, il est utile de connaître la valeur numérique de K_1 . Pour la déterminer, on peut se servir de la méthode de Gauss.

Si l'on pose, pour abréger,

$$f(a, b, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

et que l'on soumette cette fonction n fois de suite à la transformation de Landen, il vient

$$\begin{aligned} f(a, b, \varphi) &= \frac{1}{2} f(a_1, b_1, \varphi_1) = \frac{1}{2^2} f(a_2, b_2, \varphi_2) = \dots \\ &= \frac{1}{2^n} f(a_n, b_n, \varphi_n), \text{ où} \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{b_1}{a_1} \operatorname{tg} \varphi_1,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2), \quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{b_2}{a_2} \operatorname{tg} \varphi_2,$$

.

Le calcul doit être poussé jusqu'à ce que $\lim \frac{b_n}{a_n} = 1$. Alors, si l'on écrit encore $\lim \left(\frac{\varphi_n}{2^n} \right) = \Phi$ et $\lim a_n = \lim b_n = A$, on a $f(a, b, \varphi) = \frac{\Phi}{A}$. Lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, Φ est évidemment aussi $= \frac{1}{2}\pi$ et par conséquent

$$f(a, b, \frac{1}{2}\pi) = \frac{\frac{1}{2}\pi}{A}.$$

Or, dans le cas actuel,

$$K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}},$$

où

$$a = \sqrt{2} = 1,41421356, \quad b = 1,$$

on trouve successivement

$$a_1 = 1,20710678, \quad b_1 = 1,18920722,$$

$$a_2 = 1,19815695, \quad b_2 = 1,19812352,$$

$$a_3 = 1,19814023, \quad b_3 = 1,19814023.$$

Il s'ensuit

$$A = 1,19814023, \quad K_1 = \frac{1}{2}\pi \cdot \sqrt{2} \cdot 0,83462684 = 1,85407468.$$

Il est intéressant de constater que les sommes

$$W_h = \int_0^\alpha dw_h + \int_0^\beta dw_h,$$

où α et β signifient les zéros d'une fonction abélienne quelconque, s'expriment d'une manière très simple au moyen des

quantités K_1, K_2, K_3 . A cet effet, et afin de faciliter le contrôle des calculs par la vue, on opérera la représentation du cercle des unités à l'aide des intégrales w_1, w_2, w_3 . Pour mieux distinguer les différentes nappes, on tracera chaque dessin quatre fois. Dans les fig. 12^a ... 12^m, pl. X, les chiffres $\pm 1, \pm i$ se rapportent aux points correspondants de la surface (z). Le cercle des unités entre successivement dans chacune des quatre nappes. Si l'on exigeait que le point z restât constamment dans la même nappe, il faudrait faire intervenir les modules de périodicité des intégrales w_h ; mais il n'y a aucune utilité de procéder de cette façon.

Zéros de $\sqrt{g^0}$.

Soit à déterminer

$$W_1 = \int_{\text{III}}^{\frac{7}{12}\pi i} dw_1 + \int_{\text{II}}^{\frac{1}{12}\pi i} dw_1.$$

En soumettant l'intégrale w_1 à la transformation $\zeta = \varepsilon \frac{z}{s}$, on obtient l'intégrale indéfinie $\varepsilon' \int \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}$ (comp. p. 141). Dans le calcul des limites de ζ , on se servira des valeurs de s qui correspondent à $z = e^{\frac{7}{12}\pi i}$ dans la 3^{me} nappe et à $z = e^{-\frac{1}{12}\pi i}$ dans la 2^{me} nappe.

On trouve

$$z_{\text{III}} = e^{\frac{7}{12}\pi i}, s = e^{-\frac{1}{12}\pi i}, \zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i + \frac{7}{12}\pi i + \frac{1}{12}\pi i} = e^{\frac{11}{12}\pi i} \quad (\text{Voir les fig. 2 et 3.})$$

$$z_{\text{II}} = e^{-\frac{1}{12}\pi i}, s = e^{\frac{7}{12}\pi i}, \zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i - \frac{1}{12}\pi i - \frac{7}{12}\pi i} = e^{-\frac{5}{12}\pi i}.$$

Si l'on admet, en outre, que $\sqrt{1-\zeta^4} = +1$ pour $\zeta = 0$, le signe de $\sqrt{1-\zeta^4}$ dépend de la relation

$$s^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^4}}.$$

Or, lorsque z se meut de 0 à $e^{-\frac{1}{12}\pi i}$ dans la 2^{me} nappe, s va de i à $e^{\frac{7}{12}\pi i}$, s^2 de -1 à $e^{\frac{7}{6}\pi i}$. Sur ce parcours, la partie réelle

de s^2 est négative; il s'ensuit que, dans la 2^{me} des intégrales proposées, $\sqrt{1-\zeta^4}$ affecte le signe (—). Ainsi, il vient

$$\begin{aligned} W_4 &= \varepsilon' \left[\int_0^{e^{\frac{44}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} - \int_0^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} \right] = \\ &= \varepsilon' \left[\int_0^{e^{\frac{44}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} + \int_0^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} \right]. \end{aligned}$$

Grâce au théorème de l'addition des intégrales elliptiques de première espèce, à savoir

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \\ = \int_0^c \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \end{aligned}$$

où

$$c = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}$$

on peut réduire cette somme à une seule intégrale. Dans le cas actuel

$$\begin{aligned} k^2 &= -1, \quad x = e^{\frac{44}{12}\pi i}, \quad y = e^{\frac{7}{12}\pi i}, \\ c &= \frac{e^{\frac{44}{12}\pi i} \sqrt{1-e^{\frac{7}{3}\pi i}} + e^{\frac{7}{12}\pi i} \sqrt{1-e^{\frac{44}{3}\pi i}}}{1 + e^{\frac{44}{6}\pi i} e^{\frac{7}{6}\pi i}} = \\ &= \frac{e^{\frac{44}{12}\pi i} e^{-\frac{1}{6}\pi i} + e^{\frac{7}{12}\pi i} e^{\frac{1}{6}\pi i}}{1-1} = \frac{e^{\frac{3}{4}\pi i} + e^{\frac{3}{4}\pi i}}{0} = 2 \frac{e^{\frac{3}{4}\pi i}}{0}, \end{aligned}$$

en sorte que

$$W_4 = \varepsilon' \int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}.$$

Substituant encore $\zeta = -\varepsilon' t$, il vient finalement

$$W_1 = \varepsilon'(-\varepsilon') \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = i \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = iK_1.$$

Observation. Dans le calcul de c , on choisira celle des deux valeurs de $\sqrt{1-e^x}$ dont la partie réelle est positive.

Soit à déterminer

$$W_2 = \int_{\text{III}}^0 \frac{e^{\frac{7}{12}\pi i}}{dw_2} + \int_{\text{II}}^0 \frac{e^{-\frac{4}{24}\pi i}}{dw_2}.$$

Si l'on introduit s comme variable, on obtient l'intégrale indéfinie

$$w_2 = - \int \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}. \text{ (Comp. p. 146.)}$$

Les limites de s se trouvent comme dans le cas précédent et la relation

$$z^2 = \sqrt{1-s^4}$$

montre que, lorsque z se meut de 0 à $e^{\frac{7}{12}\pi i}$, z^2 de 0 à $e^{\frac{7}{6}\pi i}$, $\sqrt{1-s^4}$ prend le signe (—).

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_1^0 \frac{e^{-\frac{1}{12}\pi i}}{\sqrt{1-s^4}} - \int_i^0 \frac{e^{\frac{7}{12}\pi i}}{\sqrt{1-s^4}} = \int_1^0 \frac{e^{-\frac{1}{12}\pi i}}{\sqrt{1-s^4}} + \int_{-i}^0 \frac{e^{-\frac{5}{12}\pi i}}{\sqrt{1-s^4}} = \\ &= \int_0^1 + \int_1^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} + \int_0^{-i} + \int_{-i}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} - \int_0^1 - \int_0^{-i} = \\ &= \int_0^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} + \int_0^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} = K_2 + iK_2. \end{aligned}$$

L'application du théorème de l'addition aux deux premières intégrales donne

$$\int_0^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} + \int_0^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} = \varepsilon' K_1,$$

ensorte que

$$W_2 = -K_2 + iK_2 + \varepsilon' K_1 = -(1-i)\frac{K_1}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}K_1 = 0.$$

Enfin, quant à la somme

$$W_3 = \int_{\text{III}}^{\frac{7}{12}\pi i} dw_3 + \int_{\text{II}}^{\frac{4}{12}\pi i} dw_3,$$

on remarque d'abord que dans la 2^e nappe, le long de l'intervalle rectiligne de 0 à $e^{-\frac{1}{12}\pi i}$, le radical $\sqrt{1-z^4}$ affecte le signe (—). Par conséquent

$$W_3 = \int_0^{\frac{7}{12}\pi i} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} - \int_0^{\frac{4}{12}\pi i} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \int_0^{\frac{7}{12}\pi i} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} + \int_0^{\frac{11}{12}\pi i} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

Ensuite le théorème de l'addition fournit

$$\begin{aligned} W_3 &= \int_0^{-i'\infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\varepsilon' \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \\ &= -\varepsilon' K_1 = -\frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{2} K_3 = -(1-i)K_3. \end{aligned}$$

Les valeurs de W_1, W_2, W_3 relatives aux zéros de $\sqrt{g^0}$ une fois établies par le calcul direct qui vient d'être fait, les fig. 12^a ... 12^m permettent de reconnaître immédiatement l'exactitude des résultats suivants :

$$\begin{aligned} W_1 &= iK_1 \text{ pour les zéros de } \sqrt{g^0}, \sqrt{g}, \sqrt{\gamma_2^0}, \sqrt{\gamma_2} \\ &= -K_1 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \sqrt{g'}, \sqrt{g''}, \sqrt{\gamma_3'}, \sqrt{\gamma_3''} \\ &= -iK_1 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \sqrt{\gamma_1^0}, \sqrt{\gamma_1}, \sqrt{\gamma_5^0}, \sqrt{\gamma_5} \\ &= K_1 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \sqrt{\gamma_1'}, \sqrt{\gamma_1''}, \sqrt{\gamma_2'}, \sqrt{\gamma_2''} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_3 &= -(1-i)K_3 \text{ pour les zéros de } \sqrt{g^0}, \sqrt{g''}, \sqrt{\gamma_4^0}, \sqrt{\gamma_4''} \\ &= (1-i)K_3 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \sqrt{g}, \sqrt{g'}, \sqrt{\gamma_1}, \sqrt{\gamma_1'} \\ &= -(1+i)K_3 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \sqrt{\gamma_2^0}, \sqrt{\gamma_2'}, \sqrt{\gamma_5^0}, \sqrt{\gamma_5'} \\ &= (1+i)K_3 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \sqrt{\gamma_2}, \sqrt{\gamma_2''}, \sqrt{\gamma_5}, \sqrt{\gamma_5''} \end{aligned}$$

et $W_2 = 0$ pour les zéros de toutes ces 16 fonctions abéliennes.

Seules les intégrales relatives aux zéros des fonctions $V_{\xi_5}, V_{\xi_6}, V_{x_5}, V_{x_6}$ ne peuvent être traitées de cette manière sommaire. Elles ne présentent d'ailleurs aucune difficulté nouvelle.

Zéros de V_{ξ_5} .

Soit à déterminer

$$a) \quad \frac{1}{2} W_1 = \int_{\Pi_0}^{-\varepsilon' \infty} \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^5}}.$$

(On se souvient que les zéros de chacune des fonctions $V_{\xi_5}, V_{\xi_6}, V_{x_5}, V_{x_6}$ se confondent). Réduisant d'abord à la 1^{re} nappe, il vient

$$\frac{1}{2} W_1 = -i \int_0^{-\varepsilon' \infty} \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^5}} = i \varepsilon' \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt[4]{(1+z^4)^5}};$$

posant ensuite

$$z = \frac{\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}}, \quad dz = \frac{d\zeta}{(1-\zeta^4)^{\frac{5}{4}}},$$

cette intégrale prend la forme

$$i \varepsilon' \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}},$$

ensorte que

$$\frac{1}{2} W_1 = i \varepsilon' K_5 = \varepsilon K_5 = \frac{1+i}{2} K_1.$$

$$b) \quad \frac{1}{2} W_2 = \int_{\Pi_0}^{-\varepsilon' \infty} \frac{z dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^5}} = -i \int_0^{-\varepsilon' \infty} \frac{z dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^5}} = - \int_0^{\infty} \frac{z dz}{\sqrt[4]{(1+z^4)^5}}$$

Substituant

$$z = \frac{\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}}$$

on obtient
$$\frac{1}{2}W_2 = - \int_0^1 \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt[4]{(1-\zeta^4)^3}} = -K_2.$$

c)
$$\frac{1}{2}W_3 = \int_{II_0}^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = - \int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \varepsilon' \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} =$$

$$= \varepsilon' K_4 = (1-i)K_3.$$

D'une manière analogue, on trouve aisément :

Pour les zéros de $\sqrt{\xi_6}$:
$$\frac{1}{2}W_1 = \int_0^{\varepsilon\infty} dw_1 = -\frac{1-i}{2}K_4,$$

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_0^{\varepsilon\infty} dw_2 = -K_2, \quad \frac{1}{2}W_3 = \int_0^{\varepsilon\infty} dw_3 = -(1+i)K_3.$$

Pour les zéros de $\sqrt{x_5}$:
$$\frac{1}{2}W_1 = \int_0^{\varepsilon'\infty} dw_1 = -\frac{1+i}{2}K_4,$$

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_0^{\varepsilon'\infty} dw_2 = -K_2, \quad \frac{1}{2}W_3 = \int_0^{\varepsilon'\infty} dw_3 = -(1-i)K_3.$$

Pour les zéros de $\sqrt{x_6}$:
$$\frac{1}{2}W_1 = \int_0^{-\varepsilon\infty} dw_1 = \frac{1-i}{2}K_4,$$

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_0^{-\varepsilon\infty} dw_2 = -K_2, \quad \frac{1}{2}W_3 = \int_0^{-\varepsilon\infty} dw_3 = (1+i)K_3.$$

Valeur numérique de quelques intégrales normales.

A l'aide des formules

$$\left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{\pi(2-i)}{20} \left[-2 \frac{w_1}{K_1} + \frac{w_2}{K_2} + \frac{w_3}{K_3} \right], \\ u_2 &= \frac{\pi(1-3i)}{20} \left[\frac{w_1}{K_1} - i \frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2} \frac{w_3}{K_3} \right], \\ u_3 &= \frac{\pi(3+i)}{20} \left[\frac{w_1}{K_1} - (1-i) \frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2} \frac{w_3}{K_3} \right] \end{aligned} \right.$$

(comp. p. 115) et du tableau p. 110 on construit sans difficulté le