

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Herausgeber:** Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Band:** 16 (1879-1880)  
**Heft:** 82

**Artikel:** Quelques exemples de représentation conforme : avec leur application à un problème d'hydrodynamique  
**Autor:** Amstein, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-259039>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

QUELQUES EXEMPLES  
DE  
REPRÉSENTATION CONFORME

avec leur application à un problème d'hydrodynamique,

PAR LE

**Dr H. AMSTEIN**

professeur à l'Académie de Lausanne.



Dans un mémoire intitulé : « Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen » (Monatsberichte der k. preuss. Akad. der Wissensch. zu Berlin 1868, p. 215-228), M. *Helmholtz* résout certains problèmes d'hydrodynamique en tenant compte des forces discontinues qui prennent naissance dans le sein même du liquide en mouvement, et il étudie, comme exemple, le mouvement d'un liquide qui coule d'un espace large dans un canal étroit. M. *Kirchhoff*, dans un mémoire intitulé : « Zur Theorie freier Flüssigkeiten (Borchardts Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 70, 1869, p. 289-298), » généralise la méthode inventée par M. Helmholtz et traite quelques cas très intéressants de veines liquides. Enfin, dans son excellent ouvrage : « Vorlesungen über mathematische Physik » (Leipzig, chez B.-G. Teubner, 1876), ce dernier savant donne un résumé de cette théorie (XXII<sup>e</sup> Vorlesung, p. 290-307), et la complète en ce sens qu'il fait voir la relation intime qui existe entre le problème des veines liquides et la représentation conforme d'une figure plane sur une autre.

Le présent mémoire, se rattachant étroitement au dernier ouvrage cité et se servant des méthodes y indiquées, a pour but de traduire pour ainsi dire quelques exemples de représentation conforme en hydrodynamique et d'étudier les mouvements qui en résultent. Il se compose de deux parties. La première partie est consacrée à l'étude de deux exemples de représentation conforme qui, abstraction faite de leur application, ont paru dignes d'un certain intérêt théorique. Dans la seconde partie, il sera fait application de différents cas de représentation conforme à la solution des problèmes correspondants de l'hydrodynamique.

---

## I

### A. La cardioïde.

#### *1. Représentation conforme de l'intérieur du cercle sur l'intérieur de la cardioïde.*

Soient

$$Z = X + Yi \text{ et } \zeta = \xi + \eta i, \text{ où } i = \sqrt{-1}$$

deux variables complexes reliées par la relation

$$(1) \quad \zeta = 2Z - Z^2.$$

Les valeurs que ces deux variables peuvent affecter seront représentées géométriquement dans deux plans différents ( $Z$ ) et ( $\zeta$ ). Si, par exemple,  $Z$  parcourt une courbe quelconque dans son plan,  $\zeta$  parcourra la courbe correspondante dans le plan ( $\zeta$ ).

On sait qu'une fonction quelconque d'une variable complexe  $\zeta = f(Z)$  établit entre les deux plans ( $Z$ ) et ( $\zeta$ ) une relation telle, qu'à une figure infiniment petite dans l'un des

plans, correspond en général une figure semblable dans l'autre, et que cette similitude n'est interrompue que dans les points singuliers pour lesquels la dérivée  $f'(Z)$  s'annule ou devient infinie. Or, dans le cas considéré, la dérivée

$$\frac{d\zeta}{dZ} = 2 - 2Z = 2(1 - Z)$$

s'annule pour  $Z = 1$  et devient infinie pour  $Z = \infty$ . En conséquence, les deux points  $Z = 1$  et  $Z = \infty$  sont, pour la fonction  $\zeta$ , des points singuliers dans lesquels la similitude entre les éléments correspondants cesse d'avoir lieu.

Tandis que  $\zeta$  est une fonction uniforme de  $Z$ , évidemment  $Z$  est une fonction biforme de  $\zeta$ ; il s'ensuit qu'au même point du plan ( $\zeta$ ) correspondent deux points différents ou coïncidents du plan ( $Z$ ). Pour amener la correspondance des points des deux plans un à un, on peut d'abord se figurer que tous les points du plan ( $\zeta$ ) se composent de deux points coïncidents, et l'on peut ensuite opérer la séparation en admettant que le plan ( $\zeta$ ) se dédouble en deux nappes superposées, de sorte que deux points qui constituent un point double du plan ( $\zeta$ ) se trouvent répartis sur les deux nappes. Afin de permettre au point  $\zeta$  de passer d'une manière continue de l'une des nappes à l'autre, on établira une *ligne de passage* (*Uebergangslinie*) entre les points  $\zeta = 1$  et  $\zeta = \infty$  (correspondant à  $Z = 1$  et  $Z = \infty$ ). Une ligne de passage peut être une courbe quelconque joignant les points singuliers ou points de ramification, pourvu qu'elle ne se coupe pas elle-même. Cependant, pour des raisons qui découlent de l'étude même qui va suivre, il convient de choisir comme ligne de passage dans le cas considéré la partie de l'axe réel  $\Xi$  comprise entre  $\zeta = +1$  et  $\zeta = +\infty$ .

Une surface formée par deux ou plusieurs nappes liées entre elles par une ou plusieurs lignes de passage, suivant

la fonction qu'il s'agit d'étudier, est généralement appelée *une surface de Riemann*.

Si dans la fonction proposée on fait

$$Z = re^{\omega i},$$

ce qui revient à déterminer les points du plan (Z) par leurs coordonnées polaires, et que l'on sépare les parties réelles des parties imaginaires, on obtient

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = 2r \cos \omega - r^2 \cos 2\omega \\ \eta = 2r \sin \omega - r^2 \sin 2\omega. \end{cases}$$

Ces équations représentent soit un système d'épicycloïdes, savoir des limaçons de Pascal, soit un système de paraboles, suivant qu'on y considère  $r$  ou  $\omega$  comme constant. Dans le plan (Z) les courbes correspondantes sont  $r = \text{const.}$  et  $\omega = \text{const.}$ , c'est-à-dire un système de cercles concentriques et le faisceau de leurs rayons communs. Les rayons rencontrent toutes les circonférences sous des angles droits; par conséquent, comme il y a similitude dans les parties infiniment petites entre les plans ( $\zeta$ ) et (Z), les paraboles sont les trajectoires orthogonales des épicycloïdes et réciproquement. Ces épicycloïdes sont engendrées par un cercle de rayon  $r$  qui roule sans glisser sur un cercle fixe de même rayon. Le point qui décrit une des courbes se trouve à la distance  $r^2$  du centre du cercle mobile. L'épicycloïde particulière qu'on obtient en faisant  $r = 1$  est parfois appelée *la cardioïde*. Elle est engendrée par un point de la circonférence d'un cercle de rayon 1 qui roule sur un cercle fixe de même rayon. Ses équations sont

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = 2 \cos \omega - \cos 2\omega \\ \eta = 2 \sin \omega - \sin 2\omega \end{cases}$$

Le point  $\xi = 1, \eta = 0$  de cette courbe est un point de rebroussement de la première espèce. Les courbes correspon-

quant à des valeurs de  $r$  plus grandes que l'unité présentent des points doubles sur l'axe des  $\Xi$  à la distance  $\xi = r^2$  de l'origine. Pour  $r < 1$  les courbes ne possèdent que des points simples. Aux limites  $r = 0$  et  $r = \infty$  les courbes deviennent des circonférences dont les rayons sont respectivement infiniment petit et infiniment grand. On doit d'ailleurs se figurer que la circonférence à l'infini ne se ferme qu'après deux tours.

Pour obtenir l'équation des trajectoires orthogonales, il suffit d'éliminer la variable  $r$  des deux équations

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = 2r \cos \omega - r^2 \cos 2\omega \\ \eta = 2r \sin \omega - r^2 \sin 2\omega, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\xi = 2 \cos \omega \cdot \frac{\xi \sin 2\omega - \eta \cos 2\omega}{2 \sin \omega} - \cos 2\omega \cdot \left( \frac{\xi \sin 2\omega - \eta \cos 2\omega}{2 \sin \omega} \right)^2.$$

On peut simplifier cette équation en faisant une transformation de coordonnées au moyen des formules

$$\begin{cases} \xi = a + \xi' \cos 2\omega + \eta' \sin 2\omega \\ \eta = b + \xi' \sin 2\omega - \eta' \cos 2\omega \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} a = \cos^2 \omega (2 - \cos 2\omega) \\ b = \sin^2 \omega \sin 2\omega. \end{cases}$$

En introduisant ces valeurs pour  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $a$  et  $b$  dans l'équation précédente, on trouve

$$\eta'^2 = -4 \sin^2 \omega \cdot \xi'.$$

Les trajectoires orthogonales des épicycloïdes sont donc bien des paraboles. L'une quelconque de ces paraboles a le paramètre  $2 \sin^2 \omega$ , son axe fait l'angle  $2\omega$  avec l'axe des  $\Xi$ , et les coordonnées de son sommet par rapport au système primitif sont  $a$  et  $b$ . Toutes ces paraboles passent par l'origine des coordonnées  $\Xi$  et  $H$ , et l'on peut remarquer que les deux branches infinies qui constituent la courbe correspondent à deux valeurs de  $\omega$  qui diffèrent d'un angle de  $180^\circ$ ,

les branches étant comptées à partir du point commun à toutes les paraboles.

Lorsque le point  $Z$  se meut sur une des circonférences concentriques, le point  $\zeta$  parcourt l'épicycloïde correspondante. Mais d'après ce qui précède on reconnaît aisément que seulement dans le cas où  $r \leq 1$  les points de la circonférence et de l'épicycloïde se correspondent d'une manière uniforme.

Une courbe fermée qui ne se coupe pas elle-même partage le plan entier en deux parties qu'on peut, par laconisme, appeler *l'intérieur* et *l'extérieur de la courbe*. L'intérieur de la courbe sera la partie du plan qui est complètement limitée par la courbe, l'extérieur de la courbe sera ce qui reste du plan, lorsqu'on aura enlevé l'intérieur de la courbe.

Cette convention faite, on peut dire que la fonction proposée sert d'intermédiaire à la représentation conforme de l'intérieur du cercle des unités sur l'intérieur de la cardioïde.

L'étude qui vient d'être faite gagne beaucoup en clarté, lorsqu'on cherche comment se répartissent les deux nappes de la surface de Riemann sur le plan ( $Z$ ). La seconde des équations (2)

$$\eta = 2r \sin \omega - r^2 \sin 2\omega$$

montre que  $\eta$  est constamment égal à zéro dans les deux cas : 1° lorsque  $\omega = 0$  et 2° lorsque

$$r = \frac{1}{\cos \omega} \text{ ou } r \cos \omega = 1 \text{ ou } X = 1.$$

De là il s'ensuit qu'à l'axe des  $\Xi$  du plan ( $\zeta$ ) correspond : 1° l'axe des  $X$  du plan ( $Z$ ) et 2° la droite  $X = 1$ ; mais tandis que l'axe des  $X$  est l'image de l'axe des  $\Xi$  dans chacune des nappes de la surface de Riemann, la droite  $X = 1$  doit être considérée comme l'image de la ligne de passage qui unit les deux nappes en question.

La droite  $X = 1$  partage le plan (Z) en deux parties dont l'une est l'image de la nappe supérieure et l'autre celle de la nappe inférieure. (Dans la figure 2, pl. XIII, la seconde de ces parties est hachée.) Or, dans le plan (Z) toute circonférence d'un rayon plus grand que l'unité et dont l'origine est le centre, coupe la droite  $X = 1$  en deux points. Par conséquent, toute épicycloïde pour laquelle  $r > 1$  est située en partie dans la première et en partie dans la seconde nappe. L'arc de cercle qui se trouve dans la partie hachée du plan (Z) est l'image du lacet de l'épicycloïde; les deux points d'intersection de la circonférence considérée avec la droite  $X = 1$  sont les images du point double de l'épicycloïde correspondante. (Voir les fig. 1 et 2, pl. XIV.)

Soit

$$w = \varphi + \psi i$$

une autre variable complexe qu'on peut figurer géométriquement dans un troisième plan ( $w$ ). Alors on sait que la fonction

$$(4) \quad w = \varphi + \psi i = \log Z = \log r + \omega i,$$

où le signe « log » signifie le logarithme népérien, transmet la représentation conforme (avec une certaine restriction) de l'intérieur du cercle des unités dans le plan (Z) sur l'intérieur d'une bande du plan ( $w$ ) limitée par les droites

$$\varphi = 0, \psi = -\pi \text{ et } \psi = \pi$$

et s'étendant de  $\varphi = 0$  jusqu'à  $\varphi = -\infty$ .

Aux circonférences concentriques tracées dans le plan (Z) avec l'origine comme centre et avec des rayons variant de 0 à 1 et au faisceau de leurs rayons communs correspondent dans le plan ( $w$ ) respectivement les droites  $\varphi = \text{const.}$  et  $\psi = \text{const.}$  qui sont parallèles les premières à l'axe des  $\Psi$  et les secondes à l'axe des  $\Phi$ . Les deux rayons pour lesquels  $\omega = \pm \pi$  se confondent, tandis que leurs images, savoir

les droites  $\psi = -\pi$  et  $\psi = \pi$  sont parfaitement distinctes. Par conséquent, la similitude dans les parties infiniment petites entre les plans (Z) et ( $w$ ) est interrompue le long du rayon qui joint l'origine au point  $Z = -1$  et la représentation considérée n'est plus conforme dans l'acception ordinaire du mot. Cependant, en coupant le cercle le long du rayon en question et en ajoutant les deux bords de la coupure au contour de la figure, on peut rétablir la similitude parfaite dans les parties infiniment petites entre la figure ainsi modifiée dans le plan (Z) et la bande détachée du plan ( $w$ ).

Si dans l'équation (1) on substitue pour Z sa valeur en fonction de  $w$ , il vient

$$(5) \quad \zeta = 2ew - e^{2w}.$$

Par cette fonction  $\zeta$  la bande décrite ci-dessus et qu'on pourrait, pour plus de brièveté, appeler une *bande incomplète*, est représentée sur l'intérieur de la cardioïde. Mais pour que la représentation soit partout conforme, il faut couper le plan ( $\zeta$ ) le long de l'axe réel négatif de manière à ce que les deux bords de la coupure fassent partie du contour de la figure représentée. Les épicycloïdes et leurs trajectoires orthogonales correspondent respectivement aux droites  $\varphi = \text{const.}$  et  $\psi = \text{const.}$  (Fig. 3, 4 et 5, pl. XIV.)

La bande du plan ( $w$ ) limitée par les droites

$$\psi = -\pi \text{ et } \psi = \pi,$$

mais illimitée dans le sens de l'axe des  $\Phi$ , pourrait pour cette raison être appelée une *bande complète*. Elle est représentée conformément sur l'intérieur du cercle des unités dans le plan (Z) (sans coupure préalable) au moyen de la fonction

$$(6) \quad Z = \frac{1 - e^{\frac{1}{2}w}}{1 + e^{\frac{1}{2}w}}.$$

Pour trouver les courbes qui dans le plan (Z) sont les images des deux systèmes de droites  $\varphi = \text{const.}$  et  $\psi = \text{const.}$ , on pose

$$Z = X + Yi = \frac{1 - e^{\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\psi i}}{1 + e^{\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\psi i}} =$$

$$= \frac{(1 - e^{\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\psi i})(1 + e^{\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\psi i})}{(1 + e^{\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\psi i})(1 + e^{\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\psi i})} = \frac{1 - 2ie^{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{2}\psi - e^{\varphi}}{1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^{\varphi}},$$

d'où, en séparant les parties réelles des parties imaginaires :

$$(7) \quad \begin{cases} X = \frac{1 - e^{\varphi}}{1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^{\varphi}} \\ Y = - \frac{2e^{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{2}\psi}{1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^{\varphi}} \end{cases}$$

Si le point  $w$  parcourt une courbe quelconque  $f(\varphi, \psi) = 0$ , le point Z se promènera sur la courbe déterminée par ces deux équations, dans lesquelles on aurait fait entrer la relation qui existe entre  $\varphi$  et  $\psi$ .

En éliminant la variable  $\varphi$  des équations (7), on obtient par un calcul qui ne présente aucune difficulté :

$$X^2 + (Y - \cotg \frac{1}{2}\psi)^2 = \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{2}\psi}.$$

Or, en considérant  $\psi$  comme constant, cette équation représente un système de circonférences qui ont leurs centres sur l'axe des Y et qui toutes passent par les deux points  $X = \pm 1$ .

L'élimination de  $\psi$  des équations (7) donne :

$$\left(X - \frac{1+e^\varphi}{1-e^\varphi}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{1+e^\varphi}{1-e^\varphi}\right)^2 - 1.$$

Pour des valeurs constantes de  $\varphi$  cette équation est celle d'un système de circonférences dont les centres sont situés sur l'axe des X. Ainsi on reconnaît qu'aux droites  $\varphi = \text{const.}$  et  $\psi = \text{const.}$  correspondent deux systèmes (conjugués) de circonférences qui se coupent sous des angles droits.

Si l'on substitue la valeur de Z en fonction de  $w$  dans l'équation (1), il vient :

$$(8) \quad \zeta = 2 \frac{1 - e^{\frac{1}{2}w}}{1 + e^{\frac{1}{2}w}} - \left( \frac{1 - e^{\frac{1}{2}w}}{1 + e^{\frac{1}{2}w}} \right)^2.$$

Par cette fonction  $\zeta$  l'intérieur de la bande complète dans le plan  $w$  est représenté d'une manière conforme sur l'intérieur de la cardioïde.

Un calcul analogue à celui qui a conduit aux formules (7) fera connaître la courbe que décrit le point  $\zeta$  lorsque le point  $w$  parcourt une courbe donnée quelconque. On a successivement :

$$Z = \frac{1 - 2ie^{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{2}\psi - e^\varphi}{1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^\varphi},$$

$$\zeta = 2 \frac{1 - 2ie^{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{2}\psi - e^\varphi}{1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^\varphi} -$$

$$- \frac{(1 - e^\varphi)^2 - 4i(1 - e^\varphi)e^{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{2}\psi - 4e^\varphi \sin^2 \frac{1}{2}\psi}{(1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^\varphi)^2},$$

$$(9) \begin{cases} \xi = 2 \frac{1 - e^{\varphi}}{1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^{\varphi}} - \frac{(1 - e^{\varphi})^2 - 4e^{\varphi} \sin^2 \frac{1}{2}\psi}{(1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^{\varphi})^2} \\ \eta = - \frac{4e^{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{2}\psi}{1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^{\varphi}} + \frac{4(1 - e^{\varphi}) e^{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{2}\psi}{(1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^{\varphi})^2} \end{cases}$$

Ces équations règlent le mouvement du point  $\zeta$ . Suivant qu'on y regarde  $\varphi$  ou  $\psi$  comme constant, elles déterminent les courbes dans le plan ( $\zeta$ ) qui correspondent aux droites  $\varphi = \text{const.}$  et  $\psi = \text{const.}$  du plan ( $w$ ). Pour  $\psi = \pm \pi$  elles doivent fournir respectivement la moitié inférieure et la moitié supérieure de la cardioïde. En effet, si l'on introduit dans les équations (9)  $\psi = \pi$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \xi &= 2 \frac{1 - e^{\varphi}}{1 + e^{\varphi}} - \frac{(1 - e^{\varphi})^2 - 4e^{\varphi}}{(1 + e^{\varphi})^2} \\ \eta &= - \frac{4e^{\frac{1}{2}\varphi}}{1 + e^{\varphi}} + \frac{4(1 - e^{\varphi}) e^{\frac{1}{2}\varphi}}{(1 + e^{\varphi})^2} \end{aligned}$$

et que l'on substitue ensuite

$$\frac{1 - e^{\varphi}}{1 + e^{\varphi}} = \cos \lambda \quad \text{ou} \quad e^{\frac{1}{2}\varphi} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\lambda$$

en supposant

$$\frac{1}{2}\pi \geq \frac{1}{2}\lambda \geq 0,$$

il vient :

$$\begin{cases} \xi = 2 \cos \lambda - \cos 2\lambda \\ \eta = -(2 \sin \lambda - \sin 2\lambda). \end{cases}$$

On peut observer que les courbes qui sont les images des droites  $\psi = \text{const.}$  passent toutes par les deux points  $\xi = +1, \eta = 0$  et  $\xi = -3, \eta = 0$ , et qu'en ces points leurs tangentes font les angles  $\psi$  et  $-\frac{1}{2}\psi$  avec l'axe positif des  $\Xi$ . (Voir les fig. 6, 7 et 8, pl. XIV.)

## 2. Représentation conforme de l'extérieur de la cardioïde sur l'intérieur du cercle des unités.

La substitution

$$\zeta' = \frac{4}{1 - \zeta}$$

a pour effet de représenter conformément l'extérieur de la cardioïde (3) sur l'intérieur de la parabole

$$\eta'^2 = 4(1 - \xi').$$

On s'en assure facilement par le calcul suivant :

$$\zeta' = \xi' + \eta'i = \frac{4}{1 - \xi - \eta i} = \frac{4(1 - \xi + \eta i)}{(1 - \xi)^2 + \eta^2}$$

d'où

$$\begin{cases} \xi' = \frac{4(1 - \xi)}{(1 - \xi)^2 + \eta^2} \\ \eta' = \frac{4\eta}{(1 - \xi)^2 + \eta^2} \end{cases}$$

Le point  $\zeta$  se meut sur la cardioïde, si l'on pose

$$\begin{cases} \xi = 2 \cos \omega - \cos 2\omega \\ \eta = 2 \sin \omega - \sin 2\omega, \end{cases}$$

valeurs qui, introduites dans les formules précédentes, donnent :

$$\begin{aligned}\xi' &= 4 \cdot \frac{1 - 2 \cos \omega + \cos 2 \omega}{(1 - 2 \cos \omega + \cos 2 \omega)^2 + (2 \sin \omega - \sin 2 \omega)^2} = \\ &= \frac{2 \cos^2 \omega - 2 \cos \omega}{1 - 2 \cos \omega + \cos^2 \omega} = 2 \cos \omega \frac{\cos \omega - 1}{(1 - \cos \omega)^2} = - \frac{2 \cos \omega}{1 - \cos \omega} = \\ &= 1 - \cotg^2 \frac{1}{2} \omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta' &= 4 \cdot \frac{2 \sin \omega - \sin 2 \omega}{(1 - 2 \cos \omega + \cos 2 \omega)^2 + (2 \sin \omega - \sin 2 \omega)^2} = \\ &= \frac{2 \sin \omega - 2 \sin \omega \cos \omega}{1 - 2 \cos \omega + \cos^2 \omega} = 2 \sin \omega \frac{1 - \cos \omega}{(1 - \cos \omega)^2} = \frac{2 \sin \omega}{1 - \cos \omega} = \\ &= 2 \cotg \frac{1}{2} \omega.\end{aligned}$$

En éliminant  $\omega$  des deux équations

$$\begin{cases} \xi' = 1 - \cotg^2 \frac{1}{2} \omega \\ \eta' = 2 \cotg \frac{1}{2} \omega \end{cases}$$

on obtient, en effet, l'équation de la parabole

$$\xi' = 1 - \frac{1}{4} \eta'^2 \quad \text{ou} \quad \eta'^2 = 4(1 - \xi').$$

M. le professeur Dr *H.-A. Schwarz*, dans le mémoire : « Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren » (XV. Jahrgang der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, p. 284), communique la formule

$$Z = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{1}{4} \pi \sqrt{\xi'} \right),$$

par laquelle l'intérieur de la parabole  $\eta'^2 = 4(1 - \xi')$  est représenté conformément sur l'intérieur du cercle  $X^2 + Y^2 = 1$ .

Si dans cette relation on exprime  $\zeta'$  en fonction de  $\zeta$ , elle prend la nouvelle forme

$$Z = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{2\sqrt{1-\zeta}} \right)$$

qui permet la représentation conforme de l'extérieur de la cardioïde sur l'intérieur du cercle des unités (fig. 9, 10 et 11, pl. XIV).

### B. La cycloïde.

On se propose d'étudier la représentation transmise par la fonction

$$(1) \quad \zeta = 1 - Z + \log Z,$$

où le signe « log » désigne le logarithme népérien. En posant

$$Z = re^{i\omega}, \quad \zeta = \xi + \eta i$$

et en séparant les parties réelles des parties imaginaires, on trouve

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = 1 - r \cos \omega + \log r, \\ \eta = -r \sin \omega + \omega. \end{cases}$$

Pour toute valeur constante de  $r$  ces équations déterminent une cycloïde, savoir une cycloïde allongée ou raccourcie, suivant que  $r < 1$  et une cycloïde commune pour  $r = 1$ .

Chacune de ces courbes peut être engendrée par un cercle de rayon 1 qui roule sans glisser sur la droite  $\xi = \log r$ ; le point qui décrit la courbe pendant ce mouvement se trouve à la distance  $r$  du cercle mobile. Les points doubles des

cycloïdes raccourcies ( $r > 1$ ) sont situés sur les droites  $\eta = 0, \eta = \pm\pi, \dots \eta = \pm n\pi$ ; les points de rebroussement de la première espèce que possède la cycloïde ordinaire ( $r=1$ ) se trouvent sur l'axe des  $H$  aux distances  $0, \pm 2\pi, \dots \pm 2n\pi$  de l'origine. Les cycloïdes allongées ( $r < 1$ ) ne présentent pas de points multiples. Conformément à une propriété connue du logarithme, chaque courbe du système (2) se compose d'une infinité de branches identiques qui s'obtiennent en déplaçant l'une d'elles d'un multiple de  $2\pi$  dans la direction de l'axe des  $H$ . Aux cycloïdes du plan ( $\zeta$ ) correspondent les cercles concentriques  $r = \text{const.}$  dans le plan ( $Z$ ). Or, lorsque le point  $\zeta$  a parcouru une branche, par exemple, de la cycloïde commune, le point  $Z$  aura fait un tour complet sur la circonférence  $r=1$ . A chaque branche de cycloïde que décrit le point  $\zeta$  répond ainsi un tour complet du point  $Z$  sur la circonférence du cercle des unités. Il s'ensuit qu'un seul point de la circonférence  $r=1$  est l'image de toute une infinité de points homologues de la cycloïde.

Pour établir la correspondance point par point entre ces deux courbes, on peut se figurer que le plan ( $Z$ ) se compose d'une infinité de nappes superposées, et si on relie encore deux nappes consécutives par une ligne de passage appliquée, par exemple, le long de l'axe réel positif, on pourra aussi substituer à la circonférence considérée une hélice à pas infiniment petit. Alors à chaque point de l'hélice ne correspond qu'un seul point de la cycloïde. Il est inutile d'ajouter que ce qui vient d'être dit à l'égard du cercle des unités et de la cycloïde commune s'applique également à tout autre cercle du système  $r = \text{const.}$  et à la cycloïde correspondante.

Par suite de la disposition adoptée,  $\zeta$  peut être considéré comme une fonction uniforme de  $Z$ , et il s'agit maintenant inversement de transformer  $Z$  en une fonction uniforme de  $\zeta$ .

En d'autres termes, comme à un point double d'une des cycloïdes raccourcies correspondent deux points distincts du plan (Z), il faut trouver moyen de séparer les deux points qui constituent ce point double. A cet effet on peut admettre que le plan ( $\zeta$ ) se compose aussi d'une infinité de nappes reliées entre elles par des lignes de passage et correspondant toutes à une seule nappe du plan (Z). Evidemment les lignes de passage devront être appliquées le long des droites  $\eta = \pm n\pi$ . Afin de reconnaître d'une manière plus précise la connexion qui existe entre les différentes nappes de cette surface de Riemann, il est utile de voir quelles sont les courbes qui dans le plan (Z) correspondent aux droites  $\eta = \pm n\pi$  du plan ( $\zeta$ ).

D'après la seconde des équations (2) on a

$$\eta = \pm n\pi$$

(où  $n$  désigne tout nombre entier et positif, le zéro y compris), lorsque

$$1^\circ \quad \omega = \pm n\pi, \quad 2^\circ \quad r = \frac{\omega \mp n\pi}{\sin \omega}.$$

Or, comme l'équation  $r = \frac{\omega \mp n\pi}{\sin \omega}$ , quelle que soit d'ailleurs la valeur qu'on veut donner au nombre entier  $n$ , ne représente qu'une seule et même courbe, savoir *la quadratrice de Dinostrate*, il est clair qu'à chacune des droites  $\eta = \pm n\pi$  ne correspond pas seulement la moitié de l'axe réel, donnée par  $\omega = \pm n\pi$ , mais encore toute l'infinité des branches de cette quadratrice.

Lorsque le point Z décrit une circonférence d'un rayon  $r > 1$  par exemple dans la première des nappes qui lui sont assignées, le point  $\zeta$  parcourra une branche d'épicycloïde raccourcie qui entrera dans d'autant plus de nappes du plan ( $\zeta$ ) que  $r$  sera plus grand. Chaque rencontre de la cir-

conférence considérée, avec la quadratrice, amène le passage du point  $\zeta$  à la nappe suivante ou le retour à la nappe précédente. En suivant ainsi les deux points mobiles pendant plusieurs tours du point Z, on s'assurera aisément :

1° Que les branches consécutives de la quadratrice, comptées à partir de l'axe des X, soit dans la direction de l'axe positif des Y, soit dans la direction de l'axe négatif des Y, correspondent respectivement aux droites

$$\begin{aligned} \eta = 0, \quad \eta = -\pi, \quad \eta = -2\pi, \text{ etc.}, \\ \eta = 2\pi, \quad \eta = 3\pi, \quad \eta = 4\pi, \text{ etc.} \end{aligned}$$

si la quadratrice est considérée comme étant située dans la première nappe du plan (Z); aux droites

$$\begin{aligned} \eta = 2\pi, \quad \eta = \pi, \quad \eta = 0, \text{ etc.} \\ \eta = 4\pi, \quad \eta = 5\pi, \quad \eta = 6\pi, \text{ etc.}, \end{aligned}$$

si la quadratrice se trouve dans la seconde nappe du plan (Z); aux droites

$$\begin{aligned} \eta = 4\pi, \quad \eta = 3\pi, \quad \eta = 2\pi, \text{ etc.} \\ \eta = 6\pi, \quad \eta = 7\pi, \quad \eta = 8\pi, \text{ etc.}, \end{aligned}$$

si la quadratrice est placée dans la troisième nappe du plan (Z), et ainsi de suite;

2° Que le passage de la première nappe du plan ( $\zeta$ ) à la seconde peut se faire du côté des  $\Xi$  positifs le long des droites

$$\eta = 0, \quad \eta = \pm 2\pi, \quad . . . \quad \eta = \pm 2n\pi,$$

le passage de la 3<sup>me</sup> nappe à la 4<sup>me</sup>, de la 5<sup>me</sup> à la 6<sup>me</sup>, etc., le long des mêmes droites, prises dans toute leur étendue, et le passage de la 2<sup>me</sup> nappe à la 3<sup>me</sup>, de la 4<sup>me</sup> à la 5<sup>me</sup>, le long des droites entières

$$\eta = \pm \pi, \quad \eta = \pm 3\pi, \quad . . . \quad \eta = \pm (2n + 1)\pi.$$

Par cette disposition des deux surfaces de Riemann, chaque point double du plan ( $\zeta$ ) est en effet séparé en deux points simples; les points correspondants du plan ( $Z$ ) sont symétriques par rapport à l'axe réel.

Les figures 12 et 13, pl. XV, destinées à faciliter cette étude, ont été construites pour  $r = 12$ .

Si l'on se borne à considérer dans le plan ( $\zeta$ ) la bande limitée par la branche de cycloïde tracée entre les points  $\zeta = 0$  et  $\zeta = 2\pi i$ , et par les deux parallèles à l'axe réel qui joignent ces mêmes points au point  $\zeta = -\infty$ , il découle de ce qui précède que la fonction (1)

$$\zeta = 1 - Z + \log Z$$

résout le problème de représenter d'une manière conforme l'intérieur du cercle des unités sur l'intérieur de la bande en question. Toutefois, pour que la représentation soit partout semblable dans les parties infiniment petites, il est nécessaire de faire une coupure dans la surface du cercle le long de l'axe réel entre les points  $Z = 0$  et  $Z = +1$ .

En posant encore

$$w = \log Z,$$

l'intérieur du cercle (avec la coupure) est représenté conformément sur l'intérieur de la bande incomplète située du côté des  $\varphi$  négatifs et comprise entre les droites

$$\varphi = 0, \psi = 0, \psi = 2\pi.$$

Enfin la substitution de

$$Z = e^w$$

dans l'équation (1) donne

$$\zeta = 1 - e^w + w.$$

Cette fonction sert donc d'intermédiaire à la représentation conforme de l'intérieur de la bande incomplète, qui vient d'être décrite, sur l'intérieur de la bande limitée par une branche de cycloïde et les droites  $\eta = 0$  et  $\eta = 2\pi$ . A toute droite  $\varphi = \text{const.}$  répond une cycloïde allongée et à l'axe des  $\Psi$  en particulier correspond la cycloïde commune; les images des droites  $\psi = \text{const.}$  sont les trajectoires orthogonales des cycloïdes. (Voir les fig. 14, 15 et 16, pl. XV.)

## II

Une fonction  $\varphi$  de  $x, y, z$  et du temps  $t$ , définie par les équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w,$$

où  $u, v, w$  désignent les composantes de la vitesse d'une molécule liquide suivant trois directions perpendiculaires entre elles a été appelée par M. *Helmholtz* <sup>1</sup> le *potentiel de la vitesse*. Lorsque pour un certain régime permanent d'un liquide il existe un potentiel de la vitesse (ce qui exclut tout mouvement rotatoire des molécules de ce liquide) et que le liquide n'est pas sollicité par des forces extérieures, l'une des équations hydrodynamiques d'*Euler* prend la forme

$$(1) \quad p = C - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right].$$

<sup>1</sup> Voir son mémoire « Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. » (Journal für reine und angewandte Mathematik, vol. 55, p. 25-55.)

Dans cette équation  $p$  désigne la pression,  $C$  est une constante et la densité du liquide est supposée  $= 1$ . L'équation dite de *continuité* devient

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

La première de ces équations montre que la pression diminue au fur et à mesure que la vitesse augmente. Mais l'expérience prouve qu'elle ne peut descendre au-dessous d'une certaine valeur négative sans que la continuité du liquide soit interrompue. C'est par ce fait que s'explique par exemple la formation d'une veine lorsque l'eau s'écoule d'un vase, par un orifice, et pénètre dans de l'eau en repos. En admettant que le long de certaines surfaces la vitesse de l'eau puisse changer subitement, une telle surface se comportera absolument comme la surface qui sépare deux liquides différents. Par conséquent, des deux côtés de la surface la pression doit être égale, ou ce qui revient au même, la composante normale de la vitesse doit avoir la même valeur. Si, de plus, le liquide mobile confine à un liquide en repos, la composante de la vitesse prise suivant la normale à la surface de séparation doit être zéro. En d'autres termes : Dans ce cas la vitesse doit être constante le long d'une surface de séparation, et cette surface elle-même est formée par les trajectoires des molécules.

Dans l'hypothèse que  $\varphi$  dépend uniquement des coordonnées  $x$  et  $y$ , l'équation (2) prend la forme

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

On voit par là que le problème de l'hydrodynamique entre dans le domaine des fonctions d'une variable complexe. En effet, on sait que non-seulement toute fonction d'une variable

complexe  $(x + yi)$ , mais encore sa partie réelle et sa partie imaginaire, séparément, satisfont à l'équation différentielle (3).

Si donc

$$z = x + yi$$

est une variable complexe et

$$w = \varphi + \psi i$$

une fonction de  $z$ , il s'agit de déterminer  $w$  de sorte que les conditions données soient remplies. Alors

$$\varphi = \text{const}$$

représente les courbes le long desquelles le potentiel de la vitesse reste constant et

$$\psi = \text{const.}$$

est l'équation de l'une quelconque des trajectoires auxquelles M. Kirchhoff a donné le nom de *lignes de courant* (*Stromlinien*).

Des identités

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dz} + i \frac{d\psi}{dz} = \frac{dw}{dz}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{d\varphi}{dz} i - \frac{d\psi}{dz} = i \frac{dw}{dz}$$

on tire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

et par suite

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

puis

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

En posant

$$\frac{dz}{dw} = \zeta = \xi + \eta i = \varrho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta),$$

il vient

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}, \quad \cos \vartheta = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}, \\ \sin \vartheta &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Si dans les plans ( $\zeta$ ) et ( $z$ ) l'axe des  $\Xi$  est parallèle à l'axe des  $X$  et l'axe des  $H$  parallèle à l'axe des  $Y$ , on reconnaît que la vitesse du liquide au point  $z$  peut être représentée par la droite qui joint l'origine au point correspondant  $\zeta$ ; car, en vertu des équations précédentes, la valeur réciproque  $\frac{1}{\varrho}$  de la longueur de cette ligne est égale à l'intensité de cette vitesse, et la déviation  $\vartheta$  en indique la direction. La courbe que parcourt le point  $z$ , lorsque  $\zeta$  se meut sur une courbe donnée quelconque, est déterminée par l'équation

$$z = \int \zeta dw.$$

En résumé, si après avoir fait des hypothèses convenables sur les territoires des variables  $\zeta$  et  $w$ , on cherche la fonction par laquelle l'un des territoires est représenté conformément sur l'autre, il sera facile de déterminer le territoire correspondant de la variable  $z$ , c'est-à-dire celui du liquide. Par ce procédé on obtiendra en général des mouvements de l'espèce indiquée.

Les limites du territoire du liquide se composent, en général, de trois sortes différentes de lignes, savoir : 1° de courbes par lesquelles le liquide entre ou sort; 2° de parois fixes formées par des lignes de courant  $\psi = \text{const.}$ , et 3° de courbes qui ont été appelées des *limites libres*, le long desquelles non-seulement  $\psi$  est constant, mais encore la pression et partant la vitesse  $\frac{1}{\rho}$  sont aussi constantes<sup>1</sup>.

Si l'on veut appeler *section du liquide* la partie d'une courbe  $\varphi = \text{const.}$  comprise entre deux courbes  $\psi = \psi_1$  et  $\psi = \psi_2$ , on démontre sans difficulté que la quantité  $Q$  de liquide qui traverse une section quelconque dans l'unité de temps est constante.

En effet, soit  $V = \frac{1}{\rho}$  la vitesse du liquide en un point arbitraire d'une des sections et  $ds$  l'élément de cette section; on aura

$$Q = \int \frac{ds}{\rho},$$

où l'intégrale est prise entre les limites convenables. Or, le long de la section  $\varphi$  est constant; par conséquent

$$z = \int \zeta dw = i \int \zeta d\psi = i \int (\xi + \eta i) d\psi$$

<sup>1</sup> A l'égard de cette introduction, comparez l'ouvrage cité de M. Kirchhoff.

et par suite

$$dx + i dy = i(\xi + \eta i) d\psi,$$

$$dx = -\eta d\psi$$

$$dy = \xi d\psi$$

$$ds = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} d\psi = \varrho d\psi$$

et enfin

$$Q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\varrho d\psi}{\varrho} = \psi_2 - \psi_1.$$

### A. La cardioïde.

a) Soit

$$(1) \quad \zeta = 2e^w - e^{2w}$$

la relation entre les variables complexes  $\zeta$  et  $w$ . Si l'on choisit alors pour territoire de la variable  $w$ , par exemple, le rectangle limité par les droites

$$\varphi = 0, \varphi = -1, \psi = \frac{1}{4}\pi, \psi = \frac{1}{2}\pi,$$

le territoire correspondant de la variable  $\zeta$  sera compris entre les quatre courbes suivantes (comp. p. 256, sép. 8) :

1° La cardioïde ( $\varphi = 0$ )

$$\begin{cases} \xi = 2 \cos \omega - \cos 2\omega \\ \eta = 2 \sin \omega - \sin 2\omega, \end{cases}$$

2° L'épicycloïde ( $\varphi = -1$ )

$$\begin{cases} \xi = \frac{2}{e} \cos \omega - \frac{1}{e^2} \cos 2\omega \\ \eta = \frac{2}{e} \sin \omega - \frac{1}{e^2} \sin 2\omega \end{cases}$$

3° La parabole ( $\psi = \frac{1}{2}\pi$ )

$$\begin{cases} \xi = e^{2\varphi} \\ \eta = 2e^\varphi \end{cases} \quad \text{ou} \quad \eta^2 = 4\xi$$

et 4° La parabole ( $\psi = \frac{1}{4}\pi$ )

$$\begin{cases} \xi = e^\varphi \sqrt{2} \\ \eta = e^\varphi \sqrt{2} - e^{2\varphi} \end{cases} \quad \text{ou} \quad (\xi - 1)^2 = 2\left(\frac{1}{2} - \eta\right).$$

Afin d'obtenir le territoire occupé par le liquide, c'est-à-dire le territoire du plan ( $z$ ) qui correspond aux territoires adoptés pour  $w$  et  $\zeta$ , on forme

$$z = \int \zeta dw = \int (2e^w - e^{2w}) dw = 2e^w - \frac{1}{2}e^{2w},$$

où la constante d'intégration est égale à zéro. En séparant les parties réelles des parties imaginaires, il vient

$$\begin{cases} x = 2e^\varphi \cos \psi - \frac{1}{2}e^{2\varphi} \cos 2\psi \\ y = 2e^\varphi \sin \psi - \frac{1}{2}e^{2\varphi} \sin 2\psi. \end{cases}$$

Par ces deux équations, le mouvement du point  $z$  est complètement déterminé. Les courbes le long desquelles le potentiel de la vitesse  $\varphi$  est constant, sont encore des épicycloïdes, et les lignes de courant  $\psi = \text{const.}$  sont des paraboles. En particulier, les quatre courbes qui forment les limites du liquide considéré sont :

$$1^\circ \text{ Pour } \varphi = 0 : \begin{cases} x = 2 \cos \psi - \frac{1}{2} \cos 2\psi \\ y = 2 \sin \psi - \frac{1}{2} \sin 2\psi, \end{cases}$$

$$2^\circ \text{ Pour } \varphi = -1 : \begin{cases} x = \frac{2}{e} \cos \psi - \frac{1}{2e^2} \cos 2\psi \\ y = \frac{2}{e} \sin \psi - \frac{1}{2e^2} \sin 2\psi, \end{cases}$$

$$3^{\circ} \text{ Pour } \psi = \frac{1}{4}\pi : \begin{cases} x = e^{\varphi} \sqrt{2} \\ y = e^{\varphi} \sqrt{2} - \frac{1}{2}e^{2\varphi} \end{cases} \text{ ou } (x-2)^2 = 4(1-y)$$

$$\text{et } 4^{\circ} \text{ Pour } \psi = \frac{1}{2}\pi : \begin{cases} x = \frac{1}{2}e^{2\varphi} \\ y = 2e^{\varphi} \end{cases} \text{ ou } y^2 = 8x.$$

Le liquide entre par la courbe (2) et sort par la courbe (1). A la place des courbes (3) et (4) le long desquelles le liquide coule, on doit se figurer des parois fixes. La quantité de liquide qui traverse chaque section dans l'unité de temps est

$$Q = \frac{1}{4}\pi.$$

(Voir les fig. 17, 18 et 19, pl. XV.)

b) D'après l'étude faite à la page 258 (sép. 10), la fonction

$$\zeta = 2 \frac{1 - e^{\frac{1}{2}w}}{1 + e^{\frac{1}{2}w}} - \left( \frac{1 - e^{\frac{1}{2}w}}{1 + e^{\frac{1}{2}w}} \right)^2$$

opère la représentation conforme de l'intérieur de la bande complète comprise entre les droites

$$\psi = -\pi \text{ et } \psi = \pi$$

sur l'intérieur de la cardioïde.

Or, si comme territoire de la variable  $\zeta$  on admet la partie du plan ( $\zeta$ ) qui est limitée : 1° par la moitié de cardioïde qui correspond à  $\psi = \pi$  :

$$\begin{cases} \xi = 2 \frac{1 - e^{\varphi}}{1 + e^{\varphi}} - \frac{(1 - e^{\varphi})^2 - 4e^{\varphi}}{(1 + e^{\varphi})^2} \\ \eta = -\frac{4e^{\frac{1}{2}\varphi}}{1 + e^{\varphi}} + \frac{4(1 - e^{\varphi})e^{\frac{1}{2}\varphi}}{(1 + e^{\varphi})^2} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \xi = 2 \cos \lambda - \cos 2\lambda \\ \eta = -(2 \sin \lambda - \sin 2\lambda) \end{cases}$$

et 2° par la courbe pour laquelle  $\psi = \frac{1}{2}\pi$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= 2 \frac{1 - e^{\varphi}}{1 + e^{\frac{1}{2}\varphi} \sqrt{2} + e^{\varphi}} - \frac{1 - 4e^{\varphi} + e^{2\varphi}}{(1 + e^{\frac{1}{2}\varphi} \sqrt{2} + e^{\varphi})^2} \\ \eta &= -2\sqrt{2} e^{\frac{1}{2}\varphi} \left[ \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{2}\varphi} \sqrt{2} + e^{\varphi}} + \frac{e^{\varphi} - 1}{(1 + e^{\frac{1}{2}\varphi} \sqrt{2} + e^{\varphi})^2} \right], \end{aligned} \right.$$

le territoire de la variable  $w$  sera l'intérieur de la bande complète comprise entre les droites

$$\psi = \frac{1}{2}\pi \text{ et } \psi = \pi.$$

La valeur de  $z$  est donnée par la formule

$$\begin{aligned} z &= 2 \int \frac{1 - e^{\frac{1}{2}w}}{1 + e^{\frac{1}{2}w}} dw - \int \left( \frac{1 - e^{\frac{1}{2}w}}{1 + e^{\frac{1}{2}w}} \right)^2 dw = \\ &= w - 8 \log \frac{1 + e^{\frac{1}{2}w}}{2} - \frac{8}{1 + e^{\frac{1}{2}w}} + 4, \end{aligned}$$

où la constante d'intégration est déterminée de sorte que pour  $w = 0$  on ait aussi  $z = 0$ .

Pour trouver les courbes qui limitent le liquide, on séparera dans  $z$  la partie réelle de la partie imaginaire. A cet effet, soit d'abord

$$\log [1 + e^{\frac{1}{2}(\varphi + \psi i)}] = a + bi,$$

d'où l'on tire

$$e^{a+bi} = e^a (\cos b + i \sin b) = 1 + e^{\frac{1}{2}\varphi} (\cos \frac{1}{2}\psi + i \sin \frac{1}{2}\psi)$$

et par suite

$$\begin{cases} e^a \cos b = 1 + e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi \\ e^a \sin b = e^{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{2}\psi. \end{cases}$$

Ces deux équations, résolues par rapport à  $a$  et  $b$ , donnent

$$e^{2a} = 1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^{\varphi}$$

ou

$$a = \frac{1}{2} \log (1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^{\varphi})$$

et

$$b = \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{2}\psi}{1 + e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi},$$

où l'arctg doit être pris entre les limites  $-\frac{1}{2}\pi$  et  $+\frac{1}{2}\pi$ . En introduisant la valeur trouvée pour le logarithme dans  $z$ , il vient

$$z = x + yi = 4 + \varphi + \psi i - 4 \log (1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^{\varphi}) - \\ - 8i \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{2}\psi}{1 + e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi} + 8 \log 2 - 8 \frac{1 + e^{\frac{1}{2}\varphi} (\cos \frac{1}{2}\psi - i \sin \frac{1}{2}\psi)}{1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^{\varphi}},$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4 + \varphi - 4 \log \frac{1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^{\varphi}}{4} - 8 \frac{1 + e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi}{1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^{\varphi}} \\ y = \psi - 8 \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{2}\psi}{1 + e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi} + 8 \frac{e^{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{2}\psi}{1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^{\varphi}} \end{array} \right.$$

Lorsqu'on y donne à  $\psi$  les valeurs particulières  $\pi$  et  $\frac{1}{2}\pi$ , ces deux équations représentent les limites du liquide considéré. On obtient ainsi, pour  $\psi = \pi$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 4 + \varphi - 4 \log \frac{1 + e^{\varphi}}{4} - \frac{8}{1 + e^{\varphi}} \\ y = \pi - 8 \operatorname{arctg} (e^{\frac{1}{2}\varphi}) + 8 \frac{e^{\frac{1}{2}\varphi}}{1 + e^{\varphi}} \end{array} \right.$$

et pour  $\psi = \frac{1}{2}\pi$  :

$$\begin{cases} x = 4 + \varphi - 4 \log \frac{1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{4}\pi + e^\varphi}{4} - 8 \frac{1 + e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{4}\pi}{1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{4}\pi + e^\varphi} \\ y = \frac{1}{2}\pi - 8 \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{4}\pi}{1 + e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{4}\pi} + 8 \frac{e^{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{4}\pi}{1 + 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{4}\pi + e^\varphi}. \end{cases}$$

A ces courbes correspondent des parois fixes. Le mouvement commence à l'infini au-dessus de l'axe des X ( $x = -\infty$ ,  $y > 0$ ) et comme le point de départ répond au point  $\zeta = +1$  (donc  $\frac{1}{\varrho} = 1$ ,  $\vartheta = 0$ ) la vitesse initiale est égale à 1 et parallèle à l'axe des X. Après avoir fait un demi-tour, le liquide arrive de nouveau à l'infini, mais au-dessous de l'axe des X ( $x = -\infty$ ,  $y < 0$ ). A l'arrivée, la vitesse est égale à  $\frac{1}{3}$  et parallèle à l'axe des X, conformément au point  $\zeta = -3$ , pour lequel  $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{3}$  et  $\vartheta = 180^\circ$ . La valeur absolue  $\varrho$  de la dérivée

$$\frac{dz}{dw} = \zeta = \varrho e^{\vartheta i}$$

détermine le rapport entre les éléments linéaires correspondants dans les plans ( $w$ ) et ( $z$ ). Par conséquent, tandis qu'au commencement du mouvement ( $\varrho = 1$ ) la largeur du courant est  $= \frac{1}{2}\pi$ , à la fin ( $\varrho = 3$ ) elle est  $= \frac{3}{2}\pi$ . La quantité de liquide qui coule par chaque section dans l'unité de temps est

$$Q = \frac{1}{2}\pi.$$

(Fig. 20, 21 et 22, pl. XV.)

### B. La cycloïde.

A la page 266 (sép. 18), on a reconnu que la fonction

$$\zeta = 1 + w - e^w$$

représente d'une manière conforme l'intérieur de la bande incomplète limitée par les droites

$$\varphi = 0, \psi = 0 \text{ et } \psi = 2\pi$$

et située du côté de l'axe négatif des  $\Phi$  sur l'intérieur d'une bande comprise entre une branche de la cycloïde

$$\begin{cases} \xi = 1 - \cos \omega \\ \eta = \omega - \sin \omega \end{cases}$$

et les moitiés des droites  $\eta = 0$  et  $\eta = 2\pi$  pour lesquelles  $\xi \leq 0$ .

On choisira maintenant pour territoire de  $w$  et de  $\zeta$  les moitiés supérieures des territoires qui viennent d'être indiqués, c'est-à-dire celles qui sont comprises entre les droites

$$\eta = \pi \text{ et } \eta = 2\pi.$$

Alors on aura

$$z = \int \zeta dw = \int (1 + w - e^w) dw = w + \frac{1}{2}w^2 - e^w + 1,$$

où la constante est déterminée de manière que pour  $w = 0$  aussi  $z = 0$ . La séparation des parties réelles et imaginaires donne :

$$\begin{cases} x = 1 + \varphi + \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\psi^2 - e^\varphi \cos \psi \\ y = \psi(1 + \varphi) - e^\varphi \sin \psi \end{cases}$$

En introduisant dans ces équations les valeurs particulières  $\varphi = 0$ ,  $\psi = \pi$  et  $\psi = 2\pi$ , on obtient comme limites du liquide en question

$$1^\circ \text{ Pour } \varphi = 0 : \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}\psi^2 - \cos \psi \\ y = \psi - \sin \psi, \end{cases}$$

$$2^\circ \text{ Pour } \psi = \pi : \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}\pi^2 + \varphi + \frac{1}{2}\varphi^2 + e^\varphi \\ y = \pi (1 + \varphi) \end{cases}$$

$$\text{et } 3^\circ \text{ Pour } \psi = 2\pi : \begin{cases} x = 1 - 2\pi^2 + \varphi + \frac{1}{2}\varphi^2 - e^\varphi \\ y = 2\pi (1 + \varphi). \end{cases}$$

Les courbes (2) et (3) représentent les parois fixes qui limitent le liquide. Le courant arrive de l'infini ( $x = +\infty$ ,  $y = -\infty$ ), où sa largeur est infiniment grande et sa vitesse infiniment petite et parallèle à l'axe des X. Au point qui, dans la figure 25, pl. XVI, porte le numéro 1, la vitesse  $= \frac{1}{\sqrt{4 + \pi^2}}$  et sa direction fait avec l'axe positif des X un angle  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}$ ; au point 2 elle est parallèle à l'axe des Y et  $= \frac{1}{2\pi}$ . Le liquide quitte le territoire considéré par la courbe (1). Le débit du courant dans l'unité de temps est

$$Q = \pi.$$

(Voir les fig. 23, 24 et 25, pl. XVI.)

### C. La circonférence.

Les exemples traités jusqu'ici n'offraient pas de limites libres. On en voit facilement la raison. En effet, le long d'une

limite libre la pression et la vitesse du liquide sont constantes. Or, comme la vitesse en un point quelconque est  $= \frac{1}{\varrho}$ , cela revient à dire que, dans toute l'étendue de la limite libre  $\varrho$  possède la même valeur. Il s'ensuit qu'une courbe ne saurait être une limite libre que lorsque son image dans le plan ( $\zeta$ ) est un arc de cercle avec l'origine comme centre. L'exemple le plus simple qu'on puisse choisir est évidemment celui où le territoire de  $\zeta$  est limité par une circonférence entière.

a) *L'extérieur du cercle.*

Si comme territoires des variables  $\zeta$  et  $w$  on admet respectivement l'extérieur du cercle des unités et l'intérieur de la bande complète qui est limitée par les droites

$$\psi = -\pi \text{ et } \psi = \pi,$$

la relation entre  $\zeta$  et  $w$  sera donnée par l'équation

$$\zeta = \frac{1 + e^{\frac{1}{2}w}}{1 - e^{\frac{1}{2}w}}.$$

Il s'ensuit

$$z = \int \frac{1 + e^{\frac{1}{2}w}}{1 - e^{\frac{1}{2}w}} dw = w - 4 \log(1 - e^{\frac{1}{2}w}), \quad (\text{const.} = 0).$$

La séparation des parties réelles et imaginaires donne

$$\begin{cases} x = \varphi - 2 \log(1 - 2e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi + e^\varphi) \\ y = \psi + 4 \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{1}{2}\varphi} \sin \frac{1}{2}\psi}{1 - e^{\frac{1}{2}\varphi} \cos \frac{1}{2}\psi}, \end{cases}$$

où l'arctg. doit être pris entre les limites  $-\frac{1}{2}\pi$  et  $+\frac{1}{2}\pi$ .

En introduisant les valeurs particulières  $\psi = \pi$  et  $\psi = -\pi$  dans ces dernières équations, on obtient :

$$1^{\circ} \text{ Pour } \psi = \pi : \begin{cases} x = \varphi - 2 \log (1 + e^{\varphi}) \\ y = \pi + 4 \operatorname{arctg} e^{\frac{1}{2}\varphi} \end{cases}$$

$$\text{et } 2^{\circ} \text{ Pour } \psi = -\pi : \begin{cases} x = \varphi - 2 \log (1 + e^{\varphi}) \\ y = -\pi - 4 \operatorname{arctg} e^{\frac{1}{2}\varphi}. \end{cases}$$

Ces deux courbes, qui sont symétriques par rapport à l'axe des X, arrivent de l'infini ( $x = -\infty, y = \pm\pi$ ), vont jusqu'aux points  $x = -2 \log 2, y = \pm 2\pi$ , où l'abscisse  $x$  possède un maximum et retournent ensuite à l'infini ( $x = -\infty, y = \pm 3\pi$ ). Elles forment des limites libres du liquide le long desquelles la vitesse est constante et  $= 1$ . Cependant, en vue d'une expérience qu'on voudrait faire, rien n'empêcherait de les considérer, soit en entier, soit en partie, comme des parois fixes.

Le mouvement se fait d'une manière symétrique des deux côtés de l'axe des X. A l'infini ( $x = -\infty, y = \pm\pi$ ) le courant possède la largeur  $2\pi$  et il s'élargit ensuite au fur et à mesure qu'il avance. Une partie des molécules va de  $-\infty$  jusqu'à  $+\infty$  avec une vitesse décroissante de 1 à 0. Celles des molécules qui se trouvent sur l'axe des X ne le quittent jamais; toutes les autres retournent à  $-\infty$ , après avoir coupé perpendiculairement l'une des droites  $\eta = \pm 2\pi$ .

Les courbes  $\varphi = \text{const.}$  présentent la particularité suivante. Lorsque la valeur de  $\varphi$  est choisie entre  $-\infty$  et 0, la partie de la courbe qui est comprise entre les lignes de courant  $\psi = \pm\pi$ , forme un seul trait continu; pour  $\varphi = 0$  la courbe dégénère en deux parallèles  $y = \pm 2\pi$  et pour  $\varphi > 0$  elle se compose de deux branches symétriques qui ne se ferment pas (ou qui se ferment seulement à l'infini). Si dans les deux derniers cas on veut encore appeler section du courant l'ensemble des deux branches symétriques, on reconnaîtra que

dans l'unité de temps chaque section est traversée par une quantité de liquide

$$Q = 2\pi.$$

(Voir les figures 26-28, Pl. XVI.)

*Observation.* La dérivée de la fonction  $\zeta$  par rapport à  $w$ ,

$$\frac{d\zeta}{dw} = \frac{e^{\frac{1}{2}w}}{(1 - e^{\frac{1}{2}w})^2}$$

devient infinie pour  $w = 0$ . On pourrait en conclure que la similitude dans les parties infiniment petites est interrompue en un point de l'intérieur du territoire, ce qui ne doit pas être. En réalité il n'en est pas ainsi; car on peut évidemment se figurer que le plan ( $\zeta$ ) est limité par une circonférence d'un rayon infini. A cette circonférence correspond dans le plan ( $w$ ) une circonférence d'un rayon infiniment petit autour de l'origine. De cette manière le point singulier  $w = 0$  se trouve replacé sur le contour du territoire. D'ailleurs, comme à  $\zeta = \infty$  correspond  $z = \infty$ , le point est de nouveau transporté à l'infini.

b) *Le triangle formé par trois arcs de cercle.*

#### PREMIER CAS.

Soient données les trois circonférences :

$$(\alpha) \quad \xi^2 + \eta^2 = 1,$$

$$(\beta) \quad (\xi + \operatorname{tg} \alpha)^2 + \eta^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

$$(\gamma) \quad \xi^2 + (\eta + b)^2 = b^2 - 1,$$

où  $\alpha < \frac{1}{2}\pi$  désigne l'angle sous lequel les circonférences ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ) se rencontrent et  $b$  une constante positive plus grande que l'unité. Ces circonférences forment plusieurs triangles

dont on ne considérera que celui qui se trouve en entier dans le quatrième quadrant ( $\xi > 0, \eta < 0$ ). La circonférence ( $\gamma$ ) coupe les deux autres perpendiculairement; le triangle en question n'est donc qu'un cas particulier d'un triangle général<sup>1</sup>.

On vérifie facilement que la fonction

$$(1) \quad \zeta = i \frac{AZ^{\frac{\alpha}{2\pi}} - i}{AZ^{\frac{\alpha}{2\pi}} + i}, \text{ où } A = + \sqrt{\frac{b-1}{b+1}}$$

représente d'une manière conforme la surface du cercle  $X^2 + Y^2 = 1$  sur l'intérieur du triangle défini. Cependant, il est nécessaire de faire préalablement une coupure dans la surface du cercle le long de l'axe réel entre  $Z = 0$  et  $Z = 1$ .

En substituant

$$Z = e^w$$

dans l'équation (1), il vient :

$$(2) \quad \zeta = i \frac{Ae^{\frac{\alpha}{2\pi}w} - i}{Ae^{\frac{\alpha}{2\pi}w} + i}.$$

Cette substitution équivalant à une représentation conforme du cercle des unités (avec coupure) sur l'intérieur de la bande incomplète qui est limitée par les droites

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \psi = 2\pi$$

et située dans le second quadrant ( $\varphi \leq 0, \psi \geq 0$ ), la fonction

<sup>1</sup> A propos de la représentation conforme d'un demi-plan sur la surface d'un triangle général formé par trois arcs de cercle, comparez : *H.-A. Schwarz* : Ueber diejenigen Fälle, in welchen die *Gaussische* hypergeometrische Reihe eine *algebraische* Function ihres vierten Elementes darstellt. (Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 75, p. 292-335.)

(2) opère la représentation conforme de la dite bande sur l'intérieur du triangle curviligne. Les circonférences  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  et  $(\gamma)$  correspondent respectivement aux droites  $\psi = 0$ ,  $\psi = 2\pi$  et  $\varphi = 0$ .

Si l'on choisit le triangle curviligne pour territoire de  $\zeta$ , la bande incomplète pour territoire de  $w$ , on aura, en déterminant la constante arbitraire de sorte que pour  $w = 0$  aussi  $z = 0$ :

$$z = \int \zeta dw = i \int \frac{Ae^{\frac{\alpha}{2\pi}w} - i}{Ae^{\frac{\alpha}{2\pi}w} + i} dw = i \left[ -w + \frac{4\pi}{\alpha} \log \frac{Ae^{\frac{\alpha}{2\pi}w} + i}{A + i} \right].$$

De cette équation on tire

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \psi - \frac{4\pi}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{A^2 e^{\frac{\alpha}{2\pi}\varphi} \sin \frac{\alpha}{2\pi} \psi - Ae^{\frac{\alpha}{2\pi}\varphi} \cos \frac{\alpha}{2\pi} \psi + A}{A^2 e^{\frac{\alpha}{2\pi}\varphi} \cos \frac{\alpha}{2\pi} \psi + Ae^{\frac{\alpha}{2\pi}\varphi} \sin \frac{\alpha}{2\pi} \psi + 1} \\ y &= -\varphi + \frac{2\pi}{\alpha} \log \frac{A^2 e^{\frac{\alpha}{2\pi}\varphi} + 2Ae^{\frac{\alpha}{2\pi}\varphi} \sin \frac{\alpha}{2\pi} \psi + 1}{A^2 + 1}, \end{aligned} \right.$$

où l'arctg doit être pris entre les limites  $-\frac{1}{2}\pi$  et  $+\frac{1}{2}\pi$ .

Afin de fixer les idées, soit par exemple :

$$\alpha = \frac{1}{4}\pi, \quad b = \infty$$

et par suite  $A = 1$ . Dans ces hypothèses la circonférence  $(\gamma)$  devient l'axe des  $\Xi$  et les équations précédentes prennent la forme

$$\begin{aligned} x &= \psi - 16 \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{1}{8}\varphi} \sin \frac{1}{8}\psi - e^{\frac{1}{8}\varphi} \cos \frac{1}{8}\psi + 1}{e^{\frac{1}{8}\varphi} \cos \frac{1}{8}\psi + e^{\frac{1}{8}\varphi} \sin \frac{1}{8}\psi + 1} \\ y &= -\varphi + 8 \log \frac{e^{\frac{1}{4}\varphi} + 2e^{\frac{1}{8}\varphi} \sin \frac{1}{8}\psi + 1}{2} \end{aligned}$$

En donnant à  $\varphi$  et à  $\psi$  les valeurs convenables ces équations deviennent celles des limites du liquide. On obtient

1° Pour  $\varphi = 0$  :

$$\begin{cases} x = \psi - 16 \operatorname{arctg} \frac{\sin \frac{1}{8}\psi - \cos \frac{1}{8}\psi + 1}{\cos \frac{1}{8}\psi + \sin \frac{1}{8}\psi + 1} = \\ = \psi - 16 \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{1}{16} \psi \right) = 0 \\ y = 8 \log (1 + \sin \frac{1}{8} \psi), \end{cases}$$

2° Pour  $\psi = 0$  :

$$\begin{cases} x = -16 \operatorname{arctg} \frac{1 - e^{\frac{1}{8}\varphi}}{1 + e^{\frac{1}{8}\varphi}} \\ y = -\varphi + 8 \log \frac{1 + e^{\frac{1}{4}\varphi}}{2} \end{cases}$$

et 3° Pour  $\psi = 2\pi$  :

$$\begin{cases} x = 2\pi - 16 \operatorname{arccotg} (1 + \sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{8}\varphi}) \\ y = -\varphi + 8 \log \frac{1 + \sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{8}\varphi} + e^{\frac{1}{4}\varphi}}{2} . \end{cases}$$

Tandis que la seconde courbe est une limite libre, la troisième doit être considérée comme une paroi fixe et la première qui est formée par une partie de l'axe des Y, est la limite par laquelle le liquide quitte le territoire. Le courant arrive de l'infini où sa direction est parallèle à l'axe des Y et sa vitesse  $= 1$ . Le long de la limite libre, la vitesse reste constamment  $= 1$ ; le long de la paroi fixe elle augmente de 1 à  $(1 + \sqrt{2})$ . A la sortie les filets liquides sont parallèles à l'axe des X. Tandis que la largeur du courant  $= 2\pi$  à l'infini, à la sortie elle n'est plus que  $8 \log \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ . Le débit du courant dans l'unité de temps est

$$Q = 2\pi.$$

(Figures 29-33, Pl. XVI).

## SECOND CAS

La fonction

$$(1) \quad \zeta = i \frac{AZ^{\frac{\alpha}{\pi}} - i}{AZ^{\frac{\alpha}{\pi}} + i}, \quad \text{où } A = \sqrt{\frac{b-1}{b+1}}$$

représente la moitié du cercle  $X^2 + Y^2 = 1$  qui se trouve du côté des  $Y$  positifs conformément sur l'intérieur du triangle curviligne défini précédemment. Au moyen de la formule

$$Z = \frac{Z' + a}{aZ' + 1},$$

où  $a$  désigne un nombre réel positif plus petit que l'unité, on peut représenter ce demi-cercle encore une fois sur lui-même, de sorte qu'au point

$$\begin{array}{lll} Z' = 0 & \text{correspond le point } Z = a \\ \text{au point } Z' = -a & \text{»} & \text{le point } Z = 0 \\ \text{et au point } Z' = 1 & \text{»} & \text{le point } Z = 1. \end{array}$$

Enfin par la substitution

$$w = \log Z'$$

ce dernier demi-cercle sera représenté conformément sur la bande incomplète comprise entre les droites

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \psi = \pi$$

et située du côté des  $\Phi$  négatifs.

En fonction de  $w$  la variable  $\zeta$  a pour expression :

$$(2) \quad \zeta = i \frac{A \left( \frac{a + e^w}{ae^w + 1} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} - i}{A \left( \frac{a + e^w}{ae^w + 1} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} + i} = i \frac{A(a + e^w)^{\frac{\alpha}{\pi}} - i(ae^w + 1)^{\frac{\alpha}{\pi}}}{A(a + e^w)^{\frac{\alpha}{\pi}} + i(ae^w + 1)^{\frac{\alpha}{\pi}}}$$

et l'on reconnaît que par cette fonction la bande incomplète est représentée avec similitude des parties infiniment petites sur l'intérieur du triangle curviligne.

Or, si l'on admet pour territoires des variables  $w$  et  $\zeta$  respectivement la bande incomplète et le triangle indiqués, il vient :

$$\begin{aligned} z &= i \int \frac{A(e^w + a)^{\frac{\alpha}{\pi}} - i(ae^w + 1)^{\frac{\alpha}{\pi}}}{A(e^w + a)^{\frac{\alpha}{\pi}} + i(ae^w + 1)^{\frac{\alpha}{\pi}}} dw = \\ &= iw + 2 \int \frac{dw}{A\left(\frac{e^w + a}{ae^w + 1}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}} + i} . \end{aligned}$$

Substituant

$$\frac{e^w + a}{ae^w + 1} = t^{\frac{\pi}{\alpha}}, \text{ d'où } e^w = \frac{t^{\frac{\pi}{\alpha}} - a}{1 - at^{\frac{\pi}{\alpha}}},$$

$$dw = \frac{\pi}{\alpha} (1 - a^2) \frac{t^{\frac{\pi}{\alpha} - 1} dt}{(1 - at^{\frac{\pi}{\alpha}}) (t^{\frac{\pi}{\alpha}} - a)},$$

cette dernière intégrale prend la forme

$$\int \frac{dw}{A\left(\frac{e^w + a}{ae^w + 1}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}} + i} = \frac{\pi}{\alpha} (1 - a^2) \int \frac{t^{\frac{\pi}{\alpha} - 1} dt}{(At + i)(1 - at^{\frac{\pi}{\alpha}})(t^{\frac{\pi}{\alpha}} - a)} .$$

Dans les cas où  $\alpha$  est une fraction rationnelle de  $\pi$ , l'intégration peut toujours s'effectuer par une méthode connue. Mais le plus souvent le résultat ne se prêtera que difficile-

ment au calcul numérique, de sorte que pour trouver quelques points des courbes qui limitent le liquide, il est peut-être préférable d'appliquer une méthode d'approximation quelconque. C'est ainsi que pour construire la figure 38, Pl. XVI, plusieurs points des limites du liquide ont été calculés approximativement pour les hypothèses

$$a = \frac{1}{16}, \alpha = \frac{1}{4}\pi, b = \infty \text{ ou } A = 1,$$

ensuite desquelles

$$(3) \quad z = iw + 2 \int_0^w \frac{dw}{\left( \frac{1 + 16e^w}{16 + e^w} \right)^{\frac{1}{4}} + i}$$

où l'on a encore disposé de la constante d'intégration de manière à ce que pour  $w = 0$  on ait aussi  $z = 0$ .

D'ailleurs il est facile de trouver certaines propriétés de ces courbes en développant la fonction  $z$  pour le voisinage des points qu'on veut considérer. A cet effet il suffit en général de conserver des séries en question seulement les deux ou trois premiers termes. Dans le cas particulier  $a = \frac{1}{16}, \alpha = \frac{1}{4}\pi, A = 1$  les développements de  $z$  sont les suivants.

*Développement de  $z$  pour le voisinage de  $w = 0$ .* On a successivement :

$$e^w = 1 + w + \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{6}w^3 + \dots$$

$$1 + 16e^w = 17 + 16w + 8w^2 + \frac{8}{3}w^3 + \dots$$

$$16 + e^w = 17 + w + \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{6}w^3 + \dots$$

$$\frac{1 + 16e^w}{16 + e^w} = 1 + \frac{15}{17}w + \frac{1}{2}\left(\frac{15}{17}\right)^2 w^2 + \dots$$

$$\sqrt[4]{\frac{1 + 16e^w}{16 + e^w}} = \sqrt[4]{1 + \frac{15}{17}w + \frac{1}{2}\left(\frac{15}{17}\right)^2 w^2 + \dots} =$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{15}{17}\right)w + \frac{1}{32}\left(\frac{15}{17}\right)^2 w^2 + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1+16e^w}{16+e^w}} + i} = \frac{1-i}{2} + \frac{1}{8} \left( \frac{15}{17} \right) iw \dots$$

$$z = iw + 2 \int_0^w \frac{dw}{\left( \frac{1+16e^w}{16+e^w} \right)^{\frac{1}{4}} + i} = iw + 2 \int_0^w \left[ \frac{1-i}{2} + \frac{1}{8} \left( \frac{15}{17} \right) iw \dots \right] dw$$

$$= w + \frac{1}{8} \left( \frac{15}{17} \right) iw^2 \dots$$

Ce développement permet de reconnaître qu'au point 0 la fonction  $z$  ne possède aucune singularité. Si le point  $w$  se meut infiniment peu sur l'axe imaginaire, le point  $z$  fait de même. Du reste on démontre sans difficulté qu'à la partie de l'axe  $\varphi = 0$ , comprise entre  $\psi = 0$  et  $\psi = \pi$ , correspond comme limite du territoire de  $z$  une certaine partie de la droite  $x = 0$ . Lorsque le point  $w$  se meut sur l'axe négatif des  $\Phi$  le point  $z$  s'éloigne de l'axe des  $X$  en restant dans le second quadrant ( $x < 0, y > 0$ ). Au point considéré l'axe des  $X$  est tangente à la courbe qui répond à  $\psi = 0$ ; le rayon de courbure en ce point a la valeur  $4 \cdot \frac{17}{15}$ .

*Développement de  $z$  pour le voisinage de  $w = \pi i$ .* On trouve en désignant par  $z_2$  la valeur de  $z$  correspondant à  $w = \pi i$ :

$$z - z_2 = (\sqrt{2} - 1)(w - \pi i) + \frac{1}{8} \cdot \frac{17}{15} (2 - \sqrt{2}) i (w - \pi i)^2 \dots$$

Cette série donne lieu à des observations analogues à celles qui viennent d'être faites à l'égard du développement précédent. Au point  $z_2$  la tangente à la courbe qui correspond à  $\psi = \pi$  est parallèle à l'axe des  $X$  et le rayon de courbure  $y$  est  $= 2 \cdot \frac{15}{17} (2 - \sqrt{2})$ .

*Développement de  $z$  pour le voisinage de  $w = -\infty$ .* Dans ce cas on peut développer l'intégrale qui entre dans l'ex-

pression (3) suivant les puissances entières et positives de  $e^w$ . Il vient :

$$z - z_{\infty} = \frac{4-3i}{5}w + \frac{3}{5} \cdot \frac{17}{16}(3+4i)e^w \dots$$

D'abord il est facile de s'assurer que  $z$  devient infini pour  $w = -\infty$ . Puis ce développement montre que  $z$  arrive à l'infini sous un angle  $\alpha$  dont la tangente est  $= -\frac{3}{4}$ . Un coup d'œil sur la figure 34 dans le plan ( $\zeta$ ) suffit pour confirmer ce fait. En effet au point  $w = -\infty$  correspond le point  $\zeta = \frac{4-3i}{5}$ ; par conséquent, au point  $z_{\infty}$  la vitesse du liquide a bien la direction indiquée.

*Développement de  $z$  pour le voisinage de  $w = \pi i - \log 16$ .*  
Si, pour abrégé, on pose

$$w - \pi i + \log 16 = u, \quad q = \sqrt[4]{\frac{16}{15.17}}, \quad p = \sqrt[4]{\frac{-16}{15.17}} = qe^{\frac{1}{4}\pi i},$$

$$-u = u_1,$$

on obtient, suivant qu'on a en vue des valeurs réelles positives ou négatives de  $u$  :

$$(4) \quad \begin{cases} z - z_1 = -ui + \frac{8}{5}pu^{\frac{5}{4}} + \frac{4}{3}p^2iu^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{7}p^3u^{\frac{7}{4}} - p^4iu^2 \dots \\ \text{ou} \quad \begin{cases} z - z_1 = u_1i - \frac{8}{5}qu_1^{\frac{5}{4}} - \frac{4}{3}q^2iu_1^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{7}q^5u_1^{\frac{7}{4}} + q^4iu_1^2 \dots \end{cases} \end{cases}$$

Au point  $w = \pi i - \log 16$  correspond le point  $\zeta = -i$ . Il s'ensuit qu'en  $z_1$  la vitesse du liquide doit être parallèle à l'axe des  $Y$ . L'examen des deux séries confirme ce résultat. En effet, si l'on donne à  $u$  et  $u_1$  des accroissements infiniment petits, réels et positifs, et que l'on restreigne les séries à leurs premiers termes, l'accroissement correspondant de  $(z - z_1)$  sera purement imaginaire. Mais en tenant compte encore des seconds termes, on observe qu'un accroissement

réel et positif de  $u$  produit un accroissement de  $(z - z_1)$  dont la partie réelle est positive et la partie imaginaire négative, tandis qu'à un accroissement réel et positif de  $u_1$  répond un accroissement de  $(z - z_1)$  dont la partie réelle est négative et la partie imaginaire positive. On en conclut que le point  $z_1$  est un point d'inflexion de la courbe pour laquelle  $\psi = \pi$ . Afin de reconnaître la nature particulière de ce point singulier, on calculera le rayon de courbure de la courbe  $\psi = \pi$  en ce point. A cet effet il suffit de substituer à la courbe considérée les deux courbes osculatrices qui sont déterminées par les deux premiers termes de chacune des séries (4).

En posant

$$z - z_1 = Z = X + Yi, p = qe^{\frac{1}{4}\pi i} = q\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \varphi = -\log 16 + t,$$

où  $t$  représente une variable réelle susceptible seulement de valeurs infiniment petites et en introduisant dans  $u = \varphi + \psi i - \pi i + \log 16$  la valeur particulière  $\psi = \pi$ , la première des séries (4) donne dans le cas d'un  $t$  positif

$$Z = -ti + \frac{4}{5}q\sqrt{2}(1+i)t^{\frac{5}{4}},$$

d'où

$$\begin{cases} X = \frac{4}{5}q\sqrt{2}t^{\frac{5}{4}} \\ Y = -t + \frac{4}{5}q\sqrt{2}t^{\frac{5}{4}} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = q\sqrt{2}t^{\frac{1}{4}} & \frac{d^2X}{dt^2} = \frac{1}{4}q\sqrt{2}t^{-\frac{3}{4}} \\ \frac{dY}{dt} = -1 + q\sqrt{2}t^{\frac{1}{4}}, & \frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{1}{4}q\sqrt{2}t^{-\frac{3}{4}}. \end{cases}$$

Si, pour plus de brièveté, on désigne encore par  $(t)$  une fonction de  $t$  qui tend vers zéro en même temps que  $t$ , le rayon de courbure  $R$  a pour expression

$$R = \frac{[(dX)^2 + (dY)^2]^{\frac{3}{2}}}{dX d^2Y - dY d^2X} = \frac{[1 + (t)]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}q\sqrt{2}t^{-\frac{3}{4}}} = \frac{4t^{\frac{3}{4}}[1 + (t)]^{\frac{3}{2}}}{q\sqrt{2}}$$

Par conséquent il s'annule pour  $t = 0$ .

Lorsque, au contraire,  $t$  ne doit prendre que des valeurs négatives, l'on applique la seconde des séries (4), ce qui donne, en posant  $-t = t_1$ :

$$Z = t_1 i - \frac{8}{5} q t_1^{\frac{5}{4}},$$

$$\begin{cases} X = -\frac{8}{5} q t_1^{\frac{5}{4}} \\ Y = t_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt_1} = -2 q t_1^{\frac{1}{4}} \\ \frac{dY}{dt_1} = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d^2X}{dt_1^2} = -\frac{1}{2} q t_1^{-\frac{3}{4}} \\ \frac{d^2Y}{dt_1^2} = 0. \end{cases}$$

Le rayon de courbure  $R_1$  est donc

$$R_1 = \frac{[1 + (t_1)]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2} q t_1^{-\frac{3}{4}}} = \frac{2 t_1^{\frac{3}{4}} [1 + (t_1)]^{\frac{3}{2}}}{q}.$$

Pour  $t_1 = 0$  il s'annule aussi.

Tandis qu'ordinairement en un point d'inflexion le rayon de courbure est infini, on rencontre ici un point d'inflexion dans lequel le rayon de courbure est zéro. Les deux éléments de courbe consécutifs qui forment le point  $z_1$  et dont l'un appartient à une paroi fixe et l'autre à une limite libre participent ainsi tous les deux de la nature d'un point de rebroussement<sup>1</sup>.

En résumé, le courant considéré arrive de l'infini, où sa vitesse est  $= 1$  et fait avec l'axe positif des  $X$  un angle

<sup>1</sup> Comp. *Kirchhoff*: Vorlesungen über mathematische Physik, p. 294 et 295.

$\alpha = \operatorname{arctg} \left( -\frac{3}{4} \right)$ . Dans la figure 38, pl. XVI, les courbes  $az_2$  et  $az_1$  sont des limites libres, tandis que la courbe  $z_1z_3$  doit être envisagée comme une paroi fixe. Le long des limites libres la vitesse est toujours  $= 1$ ; le long de la paroi fixe elle augmente de 1 à  $(1 + \sqrt{2})$ . A l'infini le courant a la largeur  $\pi$ ; ensuite il se rétrécit au fur et à mesure qu'il avance. Le liquide quitte le territoire par la droite  $z_2z_3$  avec une vitesse parallèle à l'axe des X. Le débit du courant est

$$Q = \pi.$$

(Voir les figures 34-38, Pl. XVI).

### TROISIÈME CAS

Si, en dernier lieu, on choisit pour territoire de la variable  $w$  la bande complète limitée par les droites

$$\psi = -\pi \text{ et } \psi = +\pi$$

et pour territoire de la variable  $\zeta$  le même triangle curviligne qu'on a déjà considéré dans les deux cas précédents, il s'agit maintenant de trouver la fonction qui permet la représentation conforme de l'une de ces figures sur l'autre.

D'une part on a déjà reconnu (p. 286, sép. 38) que la fonction

$$(1) \quad \zeta = i \frac{AZ^{\frac{\alpha}{\pi}} - i}{AZ^{\frac{\alpha}{\pi}} + i}, \text{ où } A = \sqrt{\frac{b-1}{b+1}},$$

opère la représentation conforme du demi-cercle des unités qui se trouve dans les deux premiers quadrants du plan (Z) sur l'intérieur du triangle curviligne. D'autre part ce demi-cercle est représenté d'une manière conforme sur l'intérieur du cercle des unités entier au moyen de la fonction

$$(2) \quad \Xi = \frac{1}{i} \frac{1 + 2iZ + Z^2}{1 - 2iZ + Z^2} *$$

Enfin la substitution appliquée déjà plusieurs fois

$$(3) \quad \Xi = \frac{1 - e^{\frac{1}{2}w}}{1 + e^{\frac{1}{2}w}}$$

transforme le cercle des unités en la bande complète définie ci-dessus.

Des équations (1), (2) et (3) on peut tirer  $\zeta$  en fonction de  $w$ ; par là le problème de représentation conforme proposé est résolu en principe. Mais le résultat final serait assez compliqué. D'ailleurs, comme il s'agit au fond de trouver l'intégrale

$$z = \int \zeta dw,$$

il est préférable de choisir  $Z$  comme variable d'intégration.

De l'équation (3) il suit

$$w = 2 \log \frac{1 - \Xi}{1 + \Xi}, \quad dw = -4 \frac{d\Xi}{1 - \Xi^2}$$

et l'équation (2) donne

$$d\Xi = 4 \frac{1 - Z^2}{(1 - 2iZ + Z^2)^2} dZ.$$

En substituant dans l'équation précédente les valeurs de  $\Xi$  et de  $d\Xi$  en fonction de  $Z$ , on obtient :

$$dw = -16 \frac{(1 - Z^2) dZ}{(1 - 2iZ + Z^2)^2 + (1 + 2iZ + Z^2)^2}$$

\* Cette formule a été communiquée par M. H.-A. Schwarz dans un cours « Théorie des fonctions d'une variable complexe » donné à l'Ecole polytechnique fédérale à Zurich en 1869/70.

et enfin

$$z = -16i \int \frac{(AZ^{\frac{\alpha}{\pi}} - i)(1 - Z^2) dZ}{(AZ^{\frac{\alpha}{\pi}} + i)[(1 - 2iZ + Z^2)^2 + (1 + 2iZ + Z^2)^2]} =$$

$$= -8i \int \frac{(AZ^{\frac{\alpha}{\pi}} - i) dZ}{(AZ^{\frac{\alpha}{\pi}} + i)(1 - Z^2)}.$$

Cette dernière intégration peut s'effectuer dans tous les cas où  $\alpha$  est une fraction rationnelle de  $\pi$ . Soit par exemple

$$\alpha = \frac{1}{4}\pi, A = 1$$

et par suite

$$(4) \quad z = -8i \int \frac{(Z^{\frac{1}{4}} - i) dZ}{(Z^{\frac{1}{4}} + i)(1 - Z^2)}.$$

La substitution

$$Z = v^4, dZ = 4v^3 dv$$

donne

$$z = 32i \int \frac{v^4 - iv^5}{(v + i)(v^8 - 1)} dv.$$

Enfin si l'on pose encore

$$v = it, dv = idt,$$

il vient :

$$z = 32i \int \frac{t^4 - t^5}{(t + 1)(t^8 - 1)} dt = 32i \int \frac{t^5 dt}{(t + 1)^2(t^2 + 1)(t^4 + 1)} =$$

$$= 32i \int \left[ -\frac{1}{4} \frac{1}{(t + 1)^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4} \frac{1}{t^2 + 1} \right] dt =$$

$$\begin{aligned}
&= 8i \left[ \frac{1}{t+1} + (\sqrt{2}-1) \operatorname{arctg} (t\sqrt{2}-1) + \right. \\
&\quad \left. + (\sqrt{2}+1) \operatorname{arctg} (t\sqrt{2}+1) - \operatorname{arctg} t + C \right] = \\
&= 8i \left[ \frac{1}{t+1} + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{t^2} - \operatorname{arctg} t + C \right]
\end{aligned}$$

ou

$$(5) \quad z = 8i \left[ \frac{1}{t+1} + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} + \operatorname{arctg} \frac{1-t^5}{t+t^2} + C \right].$$

Au lieu de retourner à la variable  $Z$ ; il paraît plus simple de calculer les limites du liquide à l'aide de l'équation trouvée. Dans ce but on remarque qu'au demi-cercle du plan ( $Z$ ) correspond dans le plan ( $t$ ) l'octant du cercle des unités qui est limité par l'axe négatif des  $Y$  et la bissectrice du quatrième quadrant.

D'abord on reconnaît aisément que les deux points  $z_2$  et  $z_3$  qui répondent à  $\zeta_2$  et  $\zeta_3$  se trouvent à l'infini; car pour  $\zeta=1, t=-i$  on a  $\operatorname{arctg} t = \infty$  et pour  $\zeta=\sqrt{2}-1, t=e^{-\frac{1}{4}\pi i}$   $\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1) = \infty$ . De plus, on peut démontrer que la limite correspondant à la droite  $\zeta_2\zeta_3$  est aussi une droite parallèle à l'axe des  $X$ . En effet, si le point  $Z$  se meut sur la demi-circonférence  $Z_2Z_3$ , c'est-à-dire si l'on fait la substitution

$$Z = e^{\lambda i}, \quad dZ = ie^{\lambda i} d\lambda,$$

il vient

$$\begin{aligned}
z &= -8i \int_0^\pi \frac{(e^{\frac{1}{4}\lambda i} - i)ie^{\lambda i} d\lambda}{(e^{\frac{1}{4}\lambda i} + i)(1 - e^{2\lambda i})} = \\
&= 8 \int_0^\pi \frac{e^{\frac{1}{8}\lambda i} + \frac{1}{8}\lambda i - e^{\frac{1}{2}\pi i}}{e^{\frac{1}{8}\lambda i} + \frac{1}{8}\lambda i + e^{\frac{1}{2}\pi i}} \cdot \frac{d\lambda}{e^{-\lambda i} - e^{\lambda i}} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 8 \int_0^\pi \frac{e^{\frac{1}{8}\lambda i - \frac{1}{4}\pi i} - e^{-\frac{1}{8}\pi i + \frac{1}{4}\pi i}}{e^{\frac{1}{8}\lambda i - \frac{1}{4}\pi i} + e^{-\frac{1}{8}\pi i + \frac{1}{4}\pi i}} \cdot \frac{d\lambda}{e^{-\lambda i} - e^{\lambda i}} = \\
&= 8 \int_0^\pi \frac{e^{\frac{1}{8}(\lambda - 2\pi)i} - e^{-\frac{1}{8}(\lambda - 2\pi)i}}{e^{\frac{1}{8}(\lambda - 2\pi)i} + e^{-\frac{1}{8}(\lambda - 2\pi)i}} \cdot \frac{d\lambda}{e^{-\lambda i} - e^{\lambda i}} = \\
&= 8 \int_0^\pi \frac{2i \sin \frac{1}{8}(\lambda - 2\pi)}{2 \cos \frac{1}{8}(\lambda - 2\pi)} \cdot \frac{d\lambda}{-2i \sin \lambda} = \\
&= -4 \int_0^\pi \operatorname{tg} \frac{1}{8}(\lambda - 2\pi) \cdot \frac{d\lambda}{\sin \lambda}.
\end{aligned}$$

Tous les éléments de cette intégrale étant réels et positifs, le point  $z$  se meut bien de  $-\infty$  à  $+\infty$  sur une droite parallèle à l'axe des  $X$ . De la même manière que dans le cas précédent, on prouverait que le point  $z_1$  est un point d'inflexion dans lequel la tangente est parallèle à l'axe des  $Y$  et le rayon de courbure  $= 0$ .

Maintenant on est en état de tracer les limites et d'étudier le mouvement du liquide (fig. 39-44, Pl. XVII). Le courant arrive de  $-\infty$  avec la vitesse 1 parallèle à l'axe des  $X$ . La courbe  $z_1 z_3$  et la droite  $z_2 z_4 z_5$  forment des parois fixes, tandis que la courbe  $z_1 z_2$  est une limite libre. Le long de la limite rectiligne  $z_2 z_4 z_5$  la vitesse augmente continuellement; en  $+\infty$  elle atteint son maximum  $= (1 + \sqrt{2})$ . Conformément à cette variation de la vitesse, la largeur du courant décroît sans cesse; en  $-\infty$  elle est  $= 2\pi$ , en  $+\infty$  elle n'est plus que  $(\sqrt{2} - 1) 2\pi$ . Chaque section du courant est traversée dans l'unité de temps par une quantité de liquide

$$Q = 2\pi.$$

Rien n'empêche de se figurer la limite libre comme fixe. On obtient ainsi la forme d'un vase dans l'intérieur duquel on connaît parfaitement bien le mouvement du liquide.

La constante arbitraire  $C$  dans l'équation (5) peut être déterminée de sorte qu'à la droite  $\zeta_2\zeta_3$  corresponde l'axe réel du plan ( $z$ ). Dans l'intérieur du territoire considéré, c'est-à-dire pour tous les points de l'intérieur du triangle curviligne dans le plan ( $\zeta$ )

$$z = f(\zeta)$$

est une fonction qui possède le caractère d'une fonction entière. En d'autres termes : Pour l'intérieur de ce territoire  $f(\zeta)$  est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de  $\zeta$  :

$$z = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \dots$$

Or, comme à des valeurs réelles de  $\zeta$  correspondent des valeurs réelles de  $z$ , nécessairement les coefficients  $a$  sont des nombres réels. Par suite de la loi de symétrie, il est donc permis de continuer symétriquement les territoires de  $\zeta$  et de  $z$ . (Ce qui donne les figures 45 et 46, Pl. XVII). En même temps, il est évident qu'on peut enlever la paroi fixe du milieu sans rien changer au mouvement. Mais avec cela on est arrivé à un cas particulier de la représentation conforme d'une lunule circulaire dont M. Kirchhoff a tiré parti dans ses recherches intéressantes sur les veines liquides. (Comparez l'ouvrage cité de M. K.).

Il est presque inutile d'ajouter qu'il serait possible d'arranger aussi la représentation conforme qui vient d'être traitée de manière à ce qu'on obtienne des veines liquides avec des directions asymptotiques données arbitrairement. A cet effet, il suffirait de faire du cercle des unités, image du territoire de  $\zeta$ , une nouvelle représentation sur lui-même, de sorte qu'à trois points donnés du contour de  $\zeta$  correspondent trois points donnés de la circonférence du cercle. On sait que cette dernière représentation est toujours possible et qu'elle revient

Fig. 1

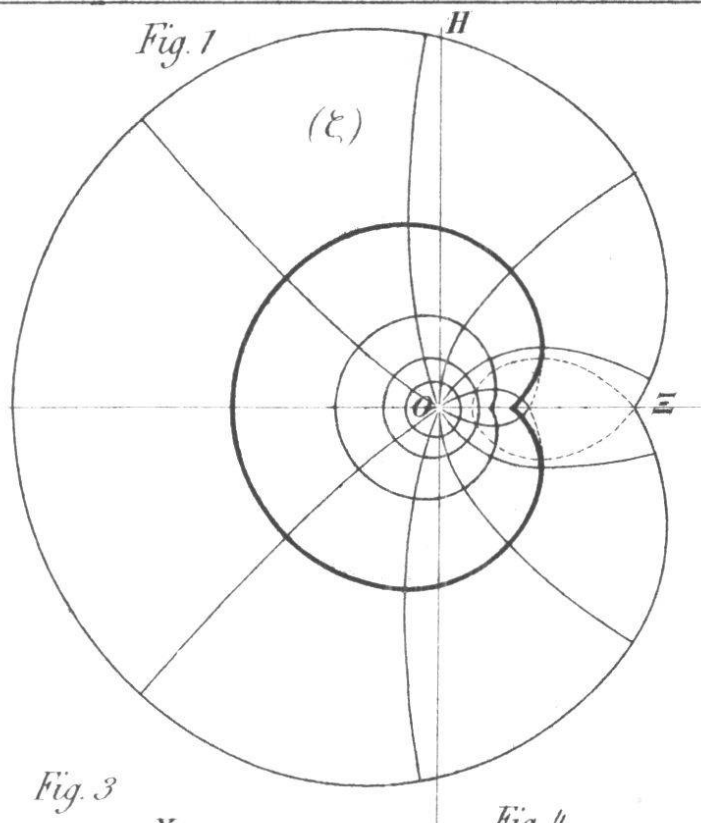


Fig. 2

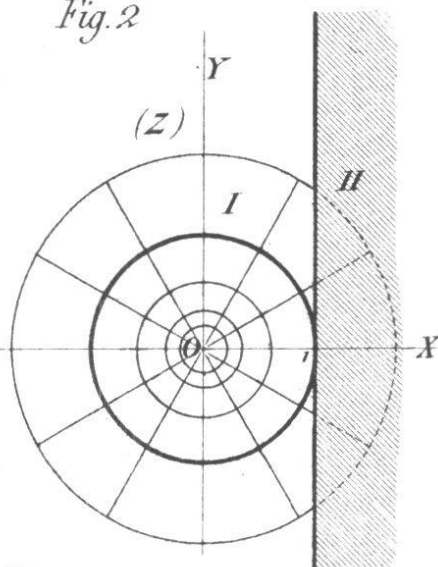


Fig. 3

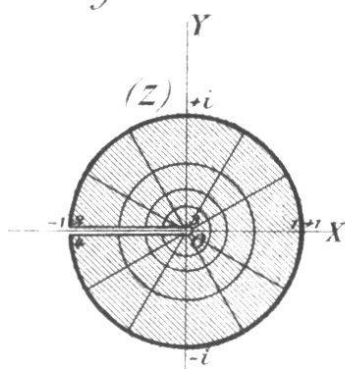


Fig. 4

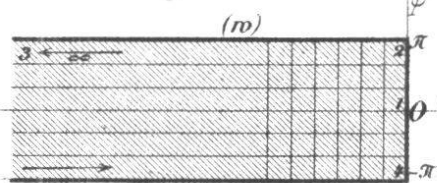


Fig. 5

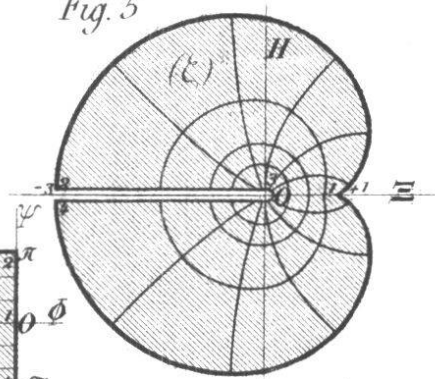


Fig. 6

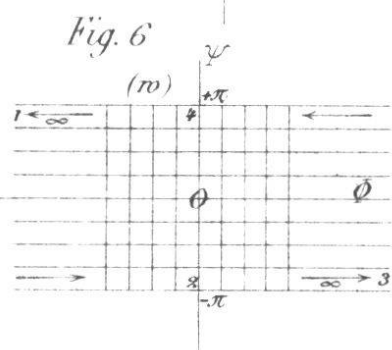


Fig. 7

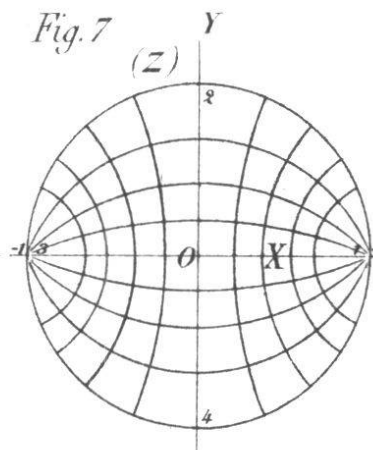


Fig. 8

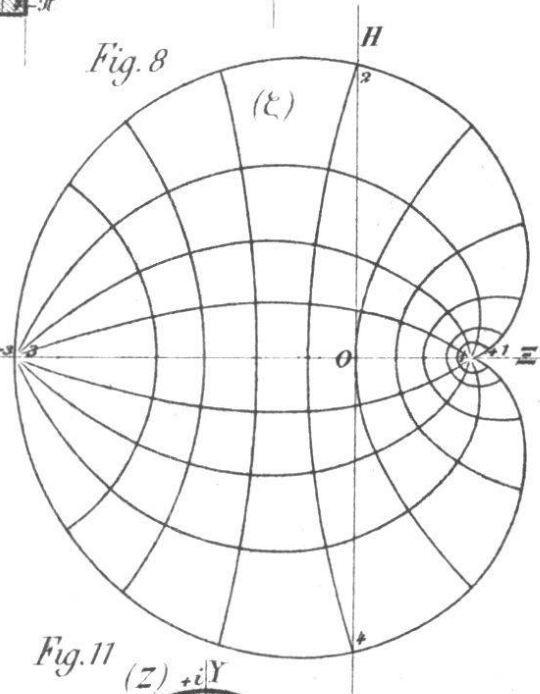


Fig. 9

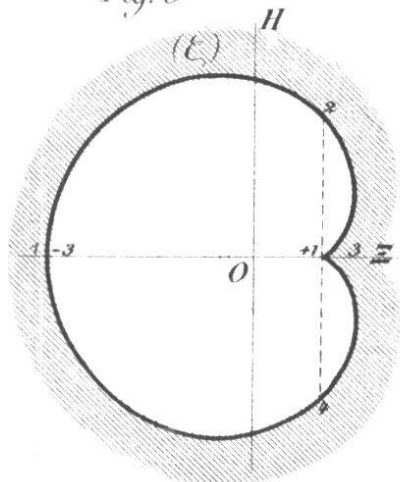


Fig. 10

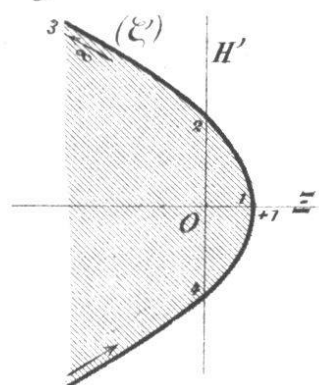


Fig. 11

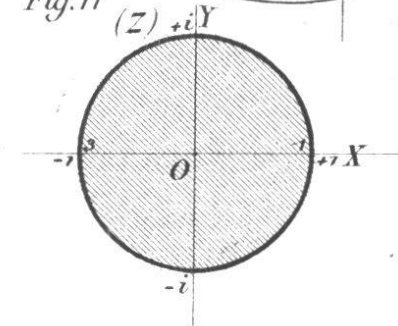


Fig. 12

(z)

Y

X

O

Fig. 13

H

(ξ)

O

H

Fig. 14

(z)

Y

i

-i

O

X

Fig. 15

(w)

ψ

φ

Fig. 16

(ξ)

H

O

Ξ

Fig. 17

(w)

ψ

π

$\frac{1}{2}\pi$

$\frac{1}{4}\pi$

-1

O

φ

Fig. 18

H

O

Ξ

Fig. 19

(z)

Y

O

X

Fig. 21

H

Ξ

O

(ξ)

Fig. 22

(x)

Y

O

X

Fig. 20

(w)

ψ

$\frac{1}{2}\pi$

O

φ

Fig. 23

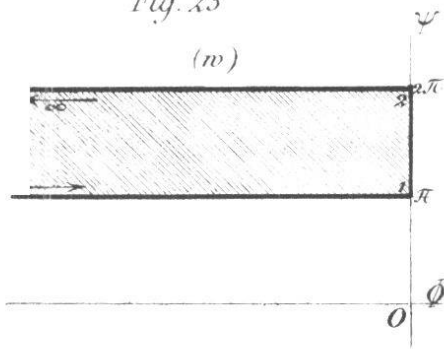


Fig. 24

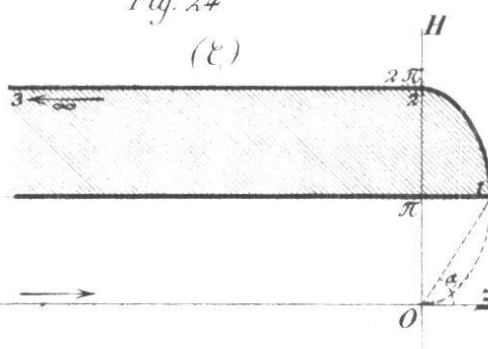


Fig. 25

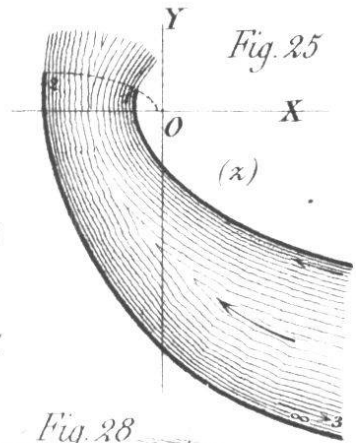


Fig. 26

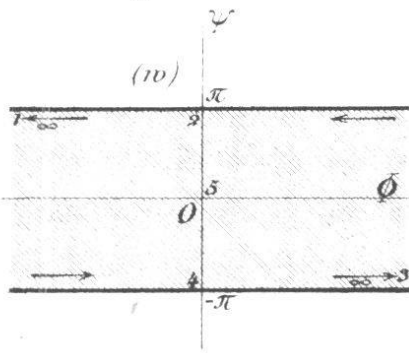


Fig. 27

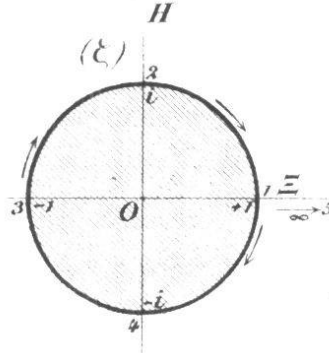


Fig. 28

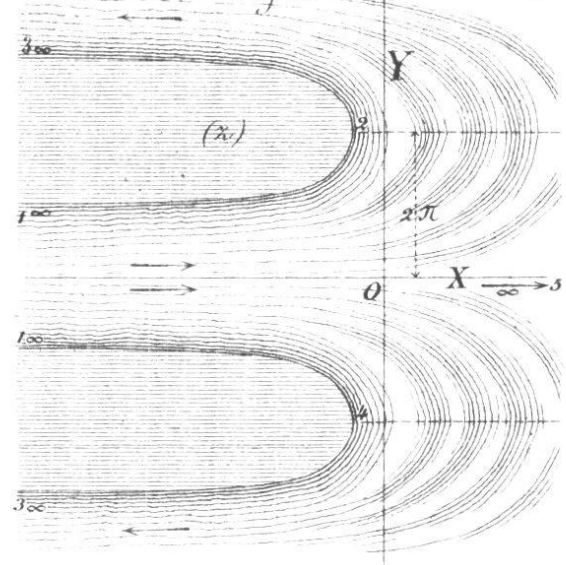


Fig. 29

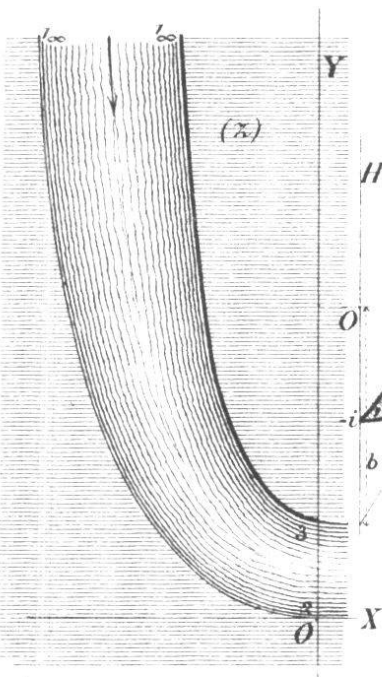


Fig. 30

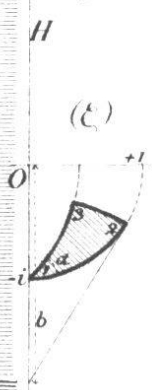


Fig. 31

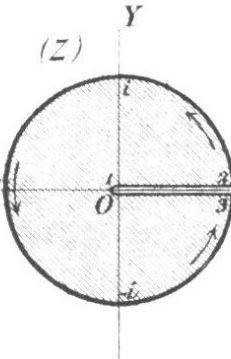


Fig. 32

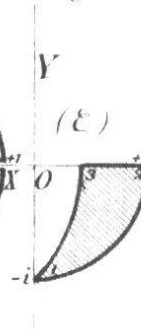


Fig. 33

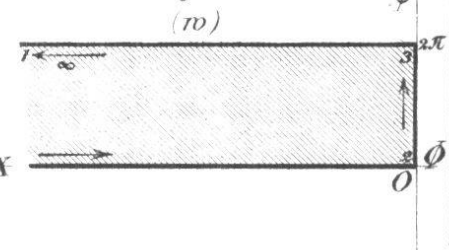


Fig. 38

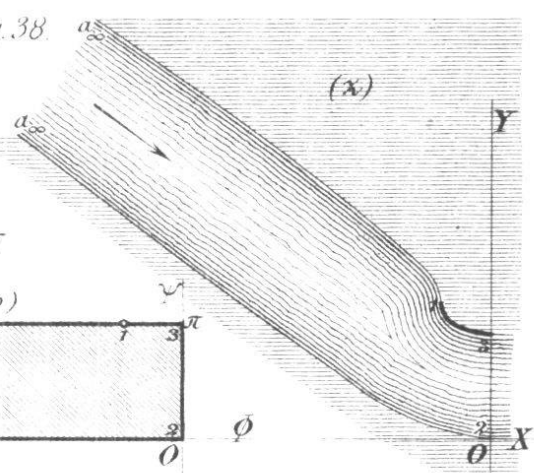


Fig. 34

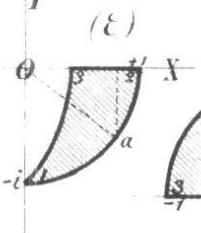


Fig. 35

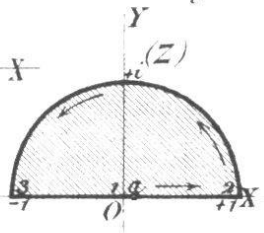


Fig. 36

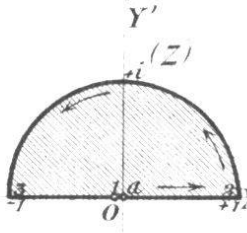


Fig. 37

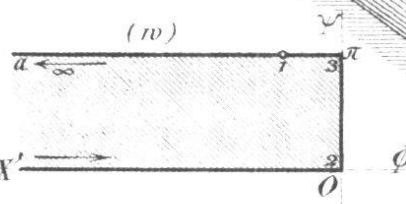


Fig. 39

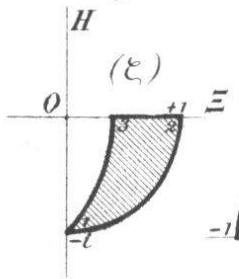


Fig. 40

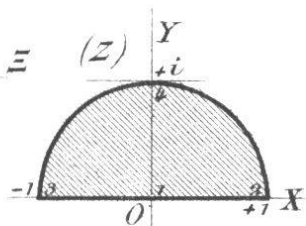


Fig. 41

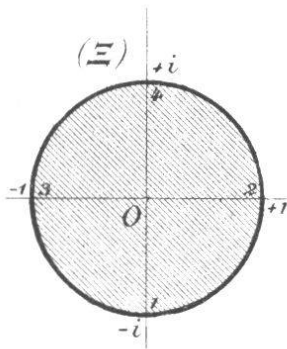


Fig. 42

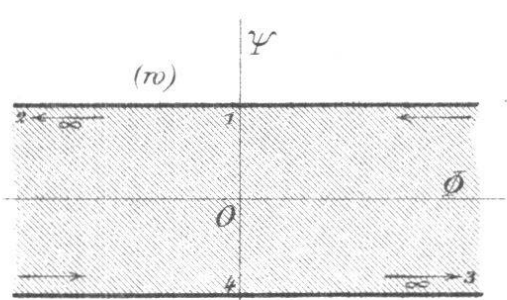


Fig. 43

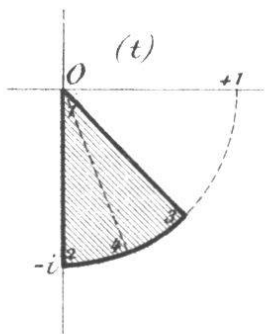


Fig. 44

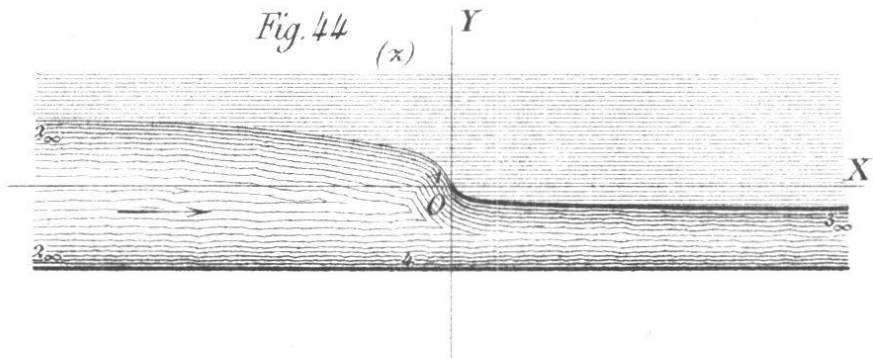


Fig. 45

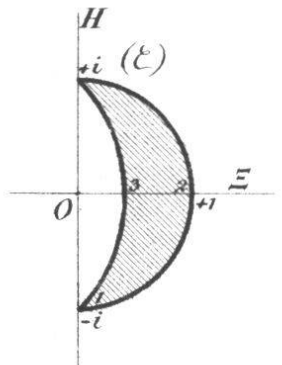


Fig. 46

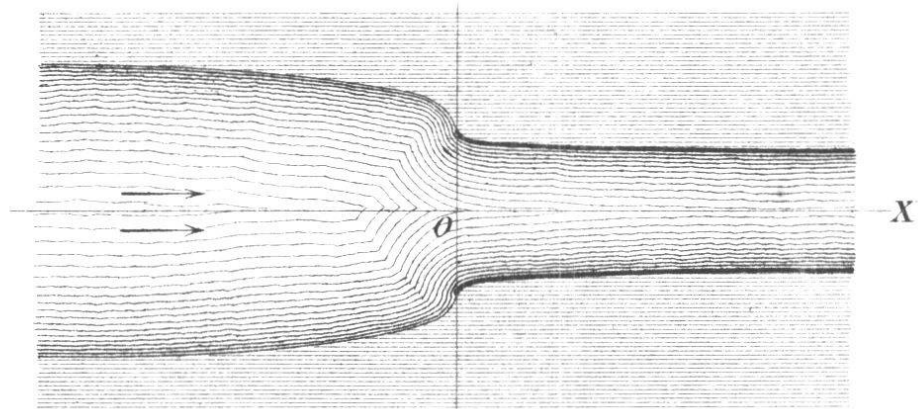


Fig. 47

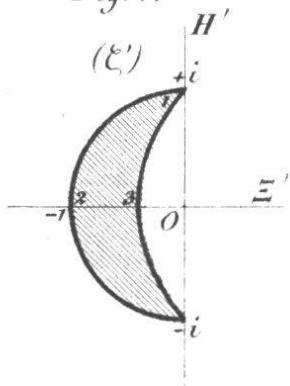
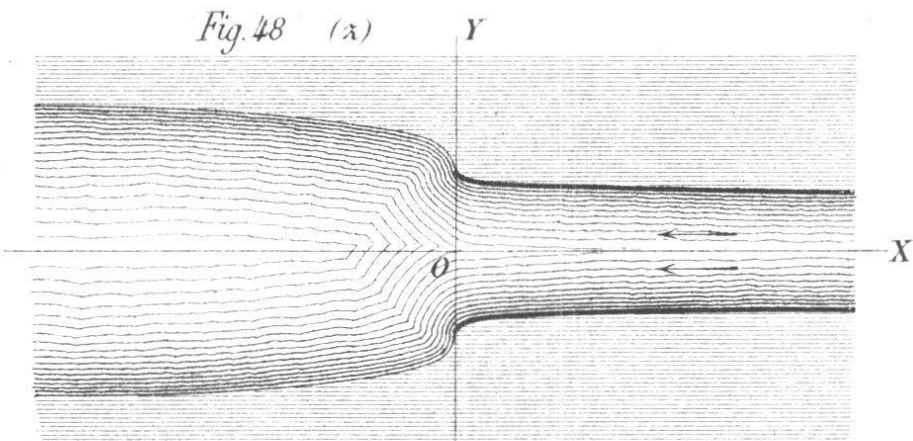


Fig. 48



à une transformation au moyen des rayons vecteurs réciproques.

Pour arriver à un cas qui rend peut-être mieux le phénomène tel qu'on l'observe dans la nature, on peut à l'aide de la fonction

$$\zeta^* = -\zeta$$

représenter encore une fois la lunule circulaire sur la figure symétrique par rapport à l'origine, et si l'on soumet le territoire de  $w$  à la même transformation en substituant

$$w^* = -w,$$

évidemment l'intégrale

$$z = \int \zeta dw = \int \zeta^* dw^*$$

ne sera pas changée. Mais par ce procédé on a en quelque sorte renversé le mouvement du liquide (figures 47 et 48, Pl. XVII).

*NB.* Le lecteur est averti que, dans le but de ménager l'espace occupé par les figures, on n'a pas adopté la même échelle, non-seulement dans les différentes planches, mais encore dans les figures relatives à un même cas.

