Anwendung der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers bei der Ermittlung der Stahl- und Betonspannungen in doppelt bewehrten Stahlbetonquerschnitten

Autor(en): **Krüger, Wolfgang**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **IABSE reports of the working commissions = Rapports des commissions de travail AIPC = IVBH Berichte der Arbeitskommissionen**

Band (Jahr): **5 (1970)**

PDF erstellt am: **01.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6937

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Anwendung der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers bei der Ermittlung der Stahl- und Betonspannungen in doppelt bewehrten Stahlbetonquerschnitten

Elastic-Creeping Body Theory Application for the Calculation of Steel and Concrete Stresses in Concrete Cross Sections with Double Reinforcement

Application de la théorie des corps sujets au fluage élastique pour déterminer les tensions de l'acier et du béton dans des sections de béton doublement armées

WOLFGANG KRÜGER
Dipl.-Ing.
Institut für Stahlbeton Dresden
DDR

1. Einleitung

Das durch Langzeitbelastungen hervorgerufene Kriechen des Betons führt nicht nur bei vorgespannten, sondern auch bei gewöhnlichen Stahlbetonkonstruktionen zu einer Vergrößerung der anfänglichen Verformungen und zu Spannungsumverteilungen zwischen dem Beton und der Bewehrung. Diese Tatsache sollte zur Erlangung richtiger Ergebnisse in einer Reihe von Fällen (z.B. bei Stabilitätsuntersuchungen, bei der Ermittlung der Durchbiegungen und der Rißsicherheit einzelner Konstruktionsteile oder der Gesamtkonstruktion) berücksichtigt werden.

Der Einfluß des Betonkriechens auf die Veränderung des Spannungszustandes von doppelt bewehrten Stahlbetonelementen soll nachfolgend unter Anwendung der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers näher untersucht werden.

Den Untersuchungen wird ein Rechteckquerschnitt zugrunde gelegt. Die Belastung besteht aus einer außermittigen Druckkraft mit großem Ausschlag.

Das Wesen des gewählten Berechnungsverfahrens besteht darin, durch Anwendung des erweiterten Mittelwertsatzes der Integralrechnung die bei der mathematischen Erfassung des obengenannten Problems auftretenden Integralgleichungen zurückzuführen auf eine algebraische Gleichung 3. Grades, deren Lösung keine Schwierigkeiten bereitet. Die Berechnung wird also mit Hilfe eines Näherungsverfahrens, dessen Genauigkeit durch geeignete Wahl der entsprechenden Zeitintervalle beliebig festgelegt werden kann, durchgeführt, wobei die Teilansätze der genauen Theorie des elastisch-kriechenden Körpers entsprechen.

Die Grundlage der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers, bei der im Gegensatz zu anderen Kriechtheorien in Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen die Verformungen nach Wegnahme der Dauerlast teilweise reversibel sind, bilden folgende Annahme:

a) der Beton wird als isotropes und homogenes Material angesehen, in dem bei Fehlen einer äußeren Belastung und ohne Änderung der Temperatur und Feuchtigkeit keine Anfangsspannungen vorhanden sind;
b) zwischen den elastischen Verformungen und den Spannungen des Betons besteht eine lineare Abhängigkeit;
c) zwischen den Kriechverformungen und den Spannungen des Betons besteht ein linearer Zusammenhang (lineares Kriechen);
d) die absoluten Verformungsgrößen (sowohl die elastischen als auch die Kriechverformungen) sind unabhängig vom Vorzeichen der Spannungen;
e) für die Kriechverformungen gilt das Überlagerungsprinzip, d.h. die vollständige Kriechverformung bei veränderlicher Spannung kann gefunden werden als Summe der Kriechverformungen, die durch den entsprechenden Spannungszuwachs entstehen, wobei vorausgesetzt wird, daß die Größe der Kriechverformung, die durch den Spannungszuwachs hervorgerufen wird, nur von der Größe und Wirkungsdauer dieses Zuwachses abhängt und von vorangegangenen und nachfolgenden Spannungsänderungen nicht beeinflußt wird.

2. Ansätze der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers

Beim einachsigen Spannungszustand eines unter Dauerlast stehenden Betonkörpers läßt sich die relative Gesamtverformung $\varepsilon_b(t)$ einer Betonfaser zum Zeitpunkt t bei Anwendung der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers aus der nachfolgenden Beziehung ermitteln [1]

$$\varepsilon_b(t) = \sigma_b(t_0)\left[\frac{1}{E_b(t_0)} + C(t,t_0)\right] + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{d\sigma_b(\tau)}{d\tau}\left[\frac{1}{E_b(\tau)} + C(t,\tau)\right] d\tau \qquad (1)$$

Hierin bedeuten:

t_0 = Zeitpunkt der Lastaufbringung
t = betrachteter Zeitpunkt (Untersuchungszeitpunkt)

$\sigma_b(t)$ = Betonspannung zum Zeitpunkt t

$E_b(to)$ = Elastizitätsmodul des Betons zum Zeitpunkt der Lasteintragung

$C(t,to)$ = Kriechmaß des Betons zur Zeit t bei einer Lasteintragung zum Zeitpunkt t_o.

Diese Kriechgleichung läßt sich durch partielle Integration umformen in

$$\varepsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_b(t)} - \int_{\tau=t_o}^{\tau=t} \sigma_b(\tau) \cdot \frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{E_b(\tau)} + C(t,\tau)\right] d\tau \tag{2}$$

Führt man den Elastizitätsmodul des Betons als konstante Größe ein und berücksichtigt, daß zwischen dem Kriechmaß $C(t,t_o)$ und der Kriechzahl $\varphi(t,t_o)$ die Beziehung

$$\varphi(t,t_o) = C(t,t_o).E_b \tag{3}$$

besteht, so läßt sich Gleichung (2) wie folgt weiter vereinfachen

$$\varepsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_b} - \frac{1}{E_b} \int_{\tau=t_o}^{\tau=t} \sigma_b(\tau) \cdot \frac{d}{d\tau}\left[1 + \varphi(t,\tau)\right] d\tau \tag{4}$$

In den Formeln (1), (2) und (4) wird bei der Ermittlung der Gesamtverformungen der Kriechanteil jeweils durch das Kriechmaß $C(t,\tau)$ bzw. die Kriechzahl $\varphi(t,\tau)$ dargestellt. Das Kriechmaß und die Kriechzahl sind Funktionen der Zeit. Größe und zeitlicher Verlauf dieser Funktionen sind u.a. abhängig von den Betoneigenschaften, der Temperatur und Feuchtigkeit der das Konstruktionselement umgebenden Luft, dem Belastungsalter und den Querschnittsabmessungen des Elementes. Die Kriechzahl kann in allgemeiner Form folgendermaßen dargestellt werden [1]:

$$\varphi(t,\tau) = \lambda(\tau) \,.\, f(t,\tau) \,. \tag{5}$$

In Formel (5) werden durch $\lambda(\tau)$ der Alterungsprozeß des Betons und durch $f(t,\tau)$ der zeitliche Verlauf der Kriechfunktion wiedergegeben. Beide Funktionen können nur auf experimentellem Wege ermittelt werden. Eine gute Übereinstimmung mit den versuchsmäßig bestimmten Kriechzahlen läßt sich erzielen, wenn man bei der theoretischen Ermittlung folgende Ausdrücke verwendet [2] [3]:

$$\lambda(\tau) = \varphi_\infty^m \cdot k_1 \,.\, k_2 \,.\, k_3(\tau) = \varphi_\infty \tag{6}$$

$$f(t,\tau) = \frac{(t-\tau)}{k_o + (t-\tau)} \,. \tag{7}$$

Hierin bedeuten:

φ_∞^m – Endkriechzahl des Betons für Normalbedingungen (relat. Luftfeuchtigkeit 5o bis 6o %; kleinste Querschnittsabmessung 2o cm; Belastungsalter 28 Tage)

k_1 – Korrekturfaktor, der den Einfluß der tatsächlichen Luftfeuchtigkeit berücksichtigt

k_2 – Korrekturfaktor, der den Einfluß der tatsächlichen Querschnittsabmessungen des Elementes berücksichtigt

$k_3(\tau)$ – Korrekturfaktor, der vom Belastungsalter τ des Betons abhängt

k_o – experimentell zu ermittelnde Konstante.

Für den Korrekturfaktor $k_3(\tau)$ kann man folgenden Ausdruck angeben [2]

$$k_3(\tau) = \varkappa_o + \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2 + \tau} \tag{8}$$

wobei $\varkappa_o$, $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ auf dem Versuchswege zu bestimmende Konstanten sind.

Als Ergebnis der Auswertung einer Vielzahl von Versuchen [2] [4] wurden für die zur Festlegung der Kriechzahl benötigten Größen die in den Tabellen 1 bis 4 angegebenen Zahlenwerte gefunden, wobei in Tabelle 4 nur mittlere Werte wiedergegeben werden (weitere Angaben sind in [2] enthalten).

Tabelle 1: Werte φ_∞^m

Betonart	φ_∞^m
Gewöhnlicher Schwerbeton mit natürlicher Erhärtung	2,o
Gewöhnlicher Schwerbeton mit Dampfbehandlung	1,8
Feinkörniger (Sand-) Schwerbeton mit natürlicher Erhärtung	2,5
Feinkörniger erwärmter Schwerbeton für Rüttelwalzkonstruktionen	2,o
Leichtbeton mit natürlicher Erhärtung	2,5
Feinkörniger Leichtbeton mit natürlicher Erhärtung	2,5
Feinkörniger Leichtbeton mit Dampfbehandlung	2,o
Feinkörniger Zementbeton mit Autoklavbehandlung	1,8
Gewöhnlicher (dichter) Silikatbeton, Silikalzit	1,5
Schaumsilikat, Schaumsilikalzit, Gassilikatbeton	2,5

Tabelle 2: k_1-Werte

Relative Luftfeuchtigkeit [%]	k_1
<2o	1,4o
2o bis 49	1,3o
5o bis 6o	1,oo
61 bis 75	o,85
>75	o,7o

Bei der Anwendung der Zahlenwerte nach Tabelle 2 und 3 ist folgendes zu beachten: Für Massivbauten, deren kleinste Querschnittsabmessung >1oo cm ist, und Betonkonstruktionen, die allseitig isoliert sind, kann unabhängig von den Abmessungen k_1 = 1,o gesetzt werden. Bei der Berechnung von Dach- oder Deckenplatten, bei denen eine der Oberflächen durch die Dachhaut bzw. Fußbodenbeläge bedeckt ist, wird k_2 für den doppelten Wert der kleinsten Querschnittsabmessung bestimmt. Bei allseitig wasserisolierten Elementen aus natürlich erhärteten Betonen ist unabhängig vom kleinsten Querschnittsmaß k_2= o,4o zu setzen. Für Silikatmaterialien kann ohne Rücksicht auf das Belastungsalter der Wert k_3 = 1,o angenommen werden. Die Zeit ist in Tagen einzusetzen.

Tabelle 3: k_2-Werte

Kleinste Querschnittsabmessung cm	k_2	kleinste Querschnittsabmessung cm	k_2
<5	1,6o	3o	o,9o
5	1,5o	4o	o,8o
7	1,3o	5o	o,75
1o	1,15	6o	o,7o
15	1,o5	8o	o,55
2o	1,oo	1oo	o,5o
25	o,95	>1oo	o,4o

Tabelle 4: Mittlere Werte der Konstanten $\varkappa_o$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und k_o

Erhärtungsregime	$\varkappa_o$	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	k_o
Betone mit natürlicher Erhärtung	o,37	25	13	22
Betone mit Dampfbehandlung	o,36	37	3o	3o

Die Angabe des Korrekturfaktors k_3 erfolgt nicht, wie bisher üblich, in Abhängigkeit von dem Verhältnis der bei Lasteintragung vorhandenen Würfelfestigkeit R_{vorh} zur Endfestigkeit R_∞, sondern unmittelbar als Funktion des Belastungsalters. Dies ge-

schieht auf Grund von Versuchsergebnissen [4], die bei der gewählten Bezugsbasis eine bessere Gesetzmäßigkeit erkennen lassen als bei Darstellung des Faktors k_3 in Abhängigkeit von R_{vorh}/R_{∞}. Ist bei der durchzuführenden Berechnung nur die Betonfestigkeit, nicht aber das Belastungsalter vorgegeben, so kann ohne Schwierigkeiten mit Hilfe hierfür geeigneter Kurven oder Tabellen das zu einer bestimmten Betonfestigkeit gehörende Alter des Betons ermittelt werden (z.B. nach [5]).

3. Ermittlung der Stahl- und Betonspannungen bei Wirkung exzentrischer Druckkräfte mit großem Ausschlag

3.1 Annahmen zur Spannungs- und Dehnungsverteilung

Die nachfolgenden Formeln werden für den Fall des linearen Kriechens abgeleitet. Die Abhängigkeit zwischen den Kriechverformungen und den Spannungen kann bei $\sigma_b \leqq 0{,}5 \cdot R_{28}$ als linear angesehen werden [4] . Für diesen Bereich kann die Verteilung der Spannungen in der Betondruckzone als dreieckförmig angenommen werden. Somit erhält man die in Bild 1 dargestellten Verteilungen der Spannungen und Dehnungen über die Querschnittshöhe, die die Grundlage der weiteren Berechnungen bilden.

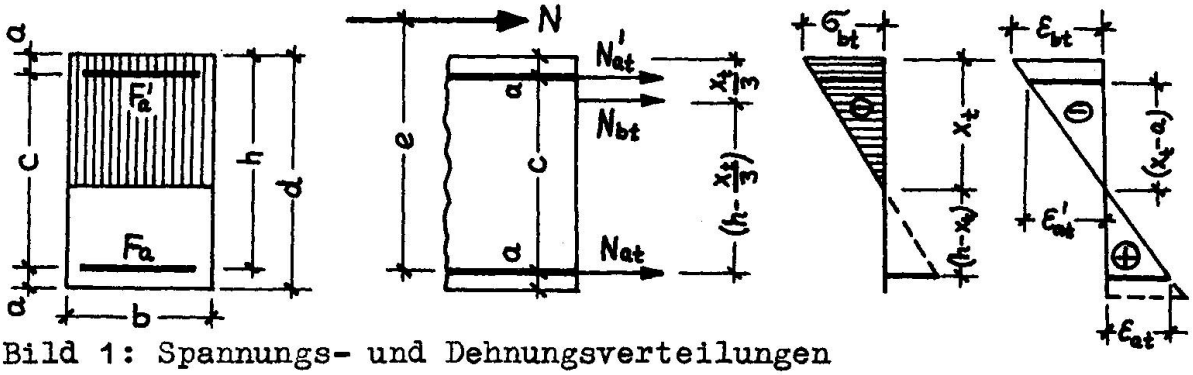

Bild 1: Spannungs- und Dehnungsverteilungen

Der Querschnitt wird als gerissen angenommen, d.h. er befindet sich im Zustand II. Die Spannungen in der Zugzone zwischen den Rissen werden nicht berücksichtigt.

Die im folgenden benötigten Bezeichnungen gehen aus Bild 1 hervor. Der Index "t" an den Symbolen für die Spannungen, Dehnungen und die Druckzonenhöhe deutet darauf hin, daß diese Größen zeitlich veränderliche Größen sind.

Für die weiteren Erörterungen ist es zweckmäßig, die Querschnittswerte in der nachfolgenden Form als bezogene Größen darzustellen.

$$\alpha = \frac{a}{h}\ ; \quad \gamma = \frac{c}{h}\ ; \quad \eta = \frac{e}{h} \tag{9}$$

$$\varphi_t = \frac{X_t}{h}\ ; \qquad \varphi_o = \frac{X_o}{h} \tag{10}$$

Des weiteren werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\sigma_{ON} = \frac{N}{b.h}\ ; \qquad \beta_{ON} = \frac{N}{\sigma_{bo}.b.h} = \frac{\sigma_{ON}}{\sigma_{bo}} \tag{11}$$

$$\mu = \frac{F_a}{b.h}\ ; \quad \mu' = \frac{F_a'}{b.h}\ ; \qquad n = \frac{E_a}{E_b} \tag{12}$$

Die Darstellung der zeitlich veränderlichen Spannungen erfolgt in Abhängigkeit von der anfänglichen Spannung am Betondruckrand

$$\sigma_{bt} = \beta_{bt}.\sigma_{bo}\ ; \quad \sigma_{at} = \beta_{at}.\sigma_{bo}\ ; \quad \sigma_{at}' = \beta_{at}'\sigma_{bo}. \tag{13}$$

3.2 Spannungsermittlungen für t > to

Unter der Voraussetzung, daß die Querschnitte auch nach der Verformung des Elementes eben bleiben (Gültigkeit der Hypothese von Bernoulli),und unter der Annahme des Verbundes zwischen der Bewehrung und dem Beton bestehen zwischen den Stahl- und Betondehnungen folgende Zusammenhänge (s. Bild 1):

$$\varepsilon_{at} = -\frac{h - x_t}{x_t} \cdot \varepsilon_{bt} = -\frac{1 - \varphi_t}{\varphi_t} \cdot \varepsilon_{bt} \tag{14}$$

$$\varepsilon_{at}' = \frac{x_t - a}{x_t} \cdot \varepsilon_{bt} = \frac{\varphi_t - \alpha}{\varphi_t} \cdot \varepsilon_{bt} \tag{15}$$

$$\frac{\varepsilon_{at}'}{\varepsilon_{at}} = -\frac{x_t - a}{h - x_t} = -\frac{\varphi_t - \alpha}{1 - \varphi_t} \tag{16}$$

Für die in Bild 1 dargestellten Resultierenden N_{bt}, N_{at} und N_{at}' gilt

$$N_{bt} = \frac{1}{2}\sigma_{bt}.X_t.b\ ; \quad N_{at} = \sigma_{at}.F_a\ ; \quad N_{at}' = \sigma_{at}'.F_a'\ . \tag{17}$$

Aus der Bedingung $\Sigma M_a = 0$ erhält man die Gleichung

$$N.e = -\sigma_{at}'.F_a'.c - \frac{1}{2}\sigma_{bt}.X_t.b(h - \frac{X_t}{3}),$$

die sich unter Beachtung der Formeln (9) bis (13) umformen läßt zu

$$6\beta_{ON}\cdot\eta + 6\mu'\cdot\gamma\cdot\beta_{at}' + \varphi_t(3 - \varphi_t)\cdot\beta_{bt} = 0 \tag{18}$$

Entsprechend ergeben sich aus $\Sigma Ma' = 0$ die Gleichungen

$$N(e - c) = \sigma_a.F_a.c + \frac{1}{2}\sigma_{bt}.X_t.b\,(\frac{X_t}{3} - a)$$

$$6\beta_{ON}(\eta - \gamma) - 6\mu\cdot\gamma\cdot\beta_{at} - \varphi_t(\varphi_t - 3\alpha)\beta_{bt} = 0 \tag{19}$$

Die Stahldehnungen und -spannungen sind miteinander verknüpft durch die Beziehungen

$$\sigma_{at} = E_a \cdot \varepsilon_{at} \; ; \quad \sigma'_{at} = E_a \cdot \varepsilon'_{at} \tag{2o}$$

Nach einigen Umformungen erhält man unter Berücksichtigung der Ausdrücke (16) und (2o) aus den Gleichungen (18) und (19) die gesuchten Formeln zur Ermittlung der Stahl- und Betonspannungen für einen beliebigen Zeitpunkt t

$$\beta_{at} = \frac{\sigma_{at}}{\sigma_{bo}} = \frac{[3(\eta-1)+\varphi_t]\cdot(1-\varphi_t)\beta_{ON}}{\mu(1-\varphi_t)(3-\varphi_t)+\mu'(\varphi_t-\alpha)(\varphi_t-3\alpha)} \tag{21}$$

$$\beta'_{at} = \frac{\sigma'_{at}}{\sigma_{bo}} = -\frac{[3(\eta-1)+\varphi_t]\cdot(\varphi_t-\alpha)\beta_{ON}}{\mu(1-\varphi_t)(3-\varphi_t)+\mu'(\varphi_t-\alpha)(\varphi_t-3\alpha)} \tag{22}$$

$$\beta_{bt} = \frac{\sigma_{bt}}{\sigma_{bo}} = -\frac{[\eta\cdot\mu(1-\varphi_t)-(\eta-\gamma)\cdot\mu'\cdot(\varphi_t-\alpha)]\,6\beta_{ON}}{\varphi_t[\mu(1-\varphi_t)(3-\varphi_t)+\mu'(\varphi_t-\alpha)(\varphi_t-3\alpha)]} \tag{23}$$

3.3 Spannungsformeln für t = to

Die Formeln zur Ermittlung der Spannungen bei $t = t_o$ (anfänglicher Spannungszustand) erhält man auf einfache Weise aus den Gleichungen (21) bis (23) dadurch, daß man φ_t durch φ_o ersetzt. Unter Beachtung der Beziehung (11) ergibt sich dann

$$\sigma_{ao} = \frac{[3(\eta-1)+\varphi_o]\cdot(1-\varphi_o)\cdot\sigma_{ON}}{\mu(1-\varphi_o)(3-\varphi_o)+\mu'(\varphi_o-\alpha)(\varphi_o-3\alpha)} \tag{21a}$$

$$\sigma'_{ao} = -\frac{[3(\eta-1)+\varphi_o]\cdot(\varphi_o-\alpha)\cdot\sigma_{ON}}{\mu(1-\varphi_o)(3-\varphi_o)+\mu'(\varphi_o-\alpha)(\varphi_o-3\alpha)} \tag{22a}$$

$$\sigma_{bo} = -\frac{[\eta\cdot\mu(1-\varphi_o)-(\eta-\gamma)\cdot\mu'\cdot(\varphi_o-\alpha)]\,6\sigma_{ON}}{\varphi_o[\mu(1-\varphi_o)(3-\varphi_o)+\mu'(\varphi_o-\alpha)(\varphi_o-3\alpha)]} \tag{23a}$$

3.4 Druckzonenhöhe für $t > t_o$

Die Kenntnis der Druckzonenhöhe X_t bzw. der relativen Druckzonenhöhe φ_t ist erforderlich für die Berechnung der Spannungen. Die Bedingung zur Ermittlung von φ_t ist mit Gleichung (14) gegeben, die sich mit Gleichung (2o) umschreiben läßt in

$$\frac{\sigma_{at}}{E_a}\cdot\frac{\varphi_t}{(1-\varphi_t)} = -\varepsilon_{bt} \tag{24}$$

Hierin ist ε_{bt} identisch mit $\varepsilon_b(t)$ und kann durch Gleichung (4) ausgedrückt werden. Zur Erleichterung der Rechnung wird Gleichung (4) jedoch umgeformt, d.h. die Zeit wird in einzelne Intervalle von t_o bis t_k unterteilt und damit der Integralausdruck der

Gleichung (4) in einzelne Teilintegrale zerlegt. Zur Zeit $t = t_k$ gilt dann

$$\varepsilon_{bk} = \frac{\sigma_{bk}}{E_b} - \frac{1}{E_b}\left\{\int_{t_0}^{t_1}\sigma_b(\tau)\cdot\frac{d}{d\tau}\left[1+\varphi(t_k,\tau)\right]d\tau + \cdots + \int_{t_{k-1}}^{t_k}\sigma_b(\tau)\cdot\frac{d}{d\tau}\left[1+\varphi(t_k,\tau)\right]d\tau\right\} \tag{25}$$

Wendet man auf diesen Ausdruck den Mittelwertsatz der Integralrechnung an, läßt sich dafür schreiben

$$\varepsilon_{bk} = \frac{\sigma_{bk}}{E_b} - \frac{1}{E_b}\left\{\sigma_b(\xi_{01})\cdot\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{d\tau}\left[1+\varphi(t_k,\tau)\right]d\tau + \cdots + \sigma_b(\xi_{k-1,k})\cdot\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{d}{d\tau}\left[1+\varphi(t_k,\tau)\right]d\tau\right\} \tag{26}$$

wobei $\xi_{k-1,k} = t_{k-1} + \vartheta(t_k - t_{k-1})$ ist.
Bei Wahl genügend kleiner Zeitintervalle kann mit ausreichender Genauigkeit $\vartheta = \frac{1}{2}$ gesetzt werden und man erhält

$$\xi_{k-1,k} = \frac{t_{k-1} + t_k}{2}$$

bzw.

$$\sigma_b(\xi_{k-1,k}) = \sigma_b\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) \approx \frac{\sigma_{b,k-1} + \sigma_{bk}}{2} \tag{27}$$

Damit geht Gleichung (26) über in

$$\varepsilon_{bk} = \frac{\sigma_{b0}}{E_b}\cdot\frac{(\varphi_{k0}-\varphi_{k1})}{2} + \sum_{i=1}^{(k-1)}\frac{\sigma_{bi}}{E_b}\cdot\frac{(\varphi_{k,i-1}-\varphi_{k,i+1})}{2} + \frac{\sigma_{bk}}{E_b}\cdot\frac{(2+\varphi_{k,k-1})}{2} \tag{28}$$

$\varphi_{k,k-1}$ ist hierin identisch mit $\varphi(t_k, t_{k-1})$.

Nach Einsetzen der Gleichungen (21) und (28) in (24) lautet unter Beachtung der Ausdrücke (12) und (13) die Bestimmungsgleichung für die relative Druckzonenhöhe

$$\xi_k^3 + a_{2k}\cdot\xi_k^2 + a_{1k}\cdot\xi_k + a_{0k} = 0 \tag{29}$$

Mit Einführung der abkürzenden Bezeichnung

$$K_k = \frac{n}{2\beta_{0N}}\left[(\varphi_{k0}-\varphi_{k1}) + \sum_{i=1}^{(k-1)}\beta_{bi}(\varphi_{k,i-1}-\varphi_{k,i+1})\right] \tag{30}$$

bedeuten hierin

$$\left.\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{3(\eta-1) - 4(\mu+\alpha\cdot\mu')\cdot K_k}{1+(\mu+\mu')\cdot K_k}\\
a_{1k} &= \frac{3n\left[\eta\cdot\mu+(\eta-\gamma)\mu'\right](2+\varphi_{k,k-1}) + 3(\mu+\alpha^2\mu')\cdot K_k}{1+(\mu+\mu')\cdot K_k}\\
a_{0k} &= -\frac{3n\left[\eta\cdot\mu+\alpha(\eta-\gamma)\mu'\right]\cdot(2+\varphi_{k,k-1})}{1+(\mu+\mu')\cdot K_k}
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

3.5 Druckzonenhöhe für $t = t_o$

Für den Zeitpunkt $t = t_o$ werden $K_k = 0$ und $\varphi_{k,k-1} = 0$. Damit erhält man aus den Ausdrücken (29) und (31) die bekannte Bestimmungsgleichung der relativen Druckzonenhöhe des elastischen Spannungszustandes

$$\xi_o^3 + a_2 \cdot \xi_o^2 + a_1 \cdot \xi_o + a_o = 0 \qquad (29a)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= 3\,(\eta - 1) \\ a_1 &= 6n\,[\eta \cdot \mu + (\eta - \gamma) \cdot \mu'] \\ a_o &= -6n\,[\eta \cdot \mu + \alpha(\eta - \gamma)\mu'] \end{aligned}\right\} \qquad (31a)$$

4. Berechnungsbeispiel

Zur Erläuterung der unter Abschnitt 2 und 3 gemachten Ausführungen soll das folgende Berechnungsbeispiel dienen. Es werden als Beton gewöhnlicher Schwerbeton der Güte B 300 mit natürlicher Erhärtung und als Stahl StA I (naturharter Stahl mit $\sigma_s = 2400$ kp/cm^2) gewählt. Die Querschnitts-, Material- und Belastungskennwerte sind in Tabelle 5 zusammengestellt.

Tabelle 5: Rechenwerte

b = 20,0 cm	d = 35,0 cm	h = 31,7 cm
a = 3,3 cm α = 0,104	c = 28,4 cm γ = 0,896	e = 60,0 cm η = 1,893
F_a=6,16 cm^2(4Ø14) μ= 0,00972	F'_a= 4,62 cm^2(3Ø14) μ'= 0,00729	
N = 7000 kp	σ_{ON}= 11,04 kp/cm^2	
$E_a = 21 \cdot 10^5$ kp/cm^2 $E_b = 3 \cdot 10^5$ kp/cm^2 n = 7,0		
β_{ON} = – 0,102		

Für die Bestimmung der Kriechzahl werden folgende Annahmen getroffen: Die relative Feuchtigkeit der Luft, in der sich das untersuchte Element befindet, beträgt durchschnittlich 50 bis 60 %. Als kleinste Querschnittabmessung gilt nach Tabelle 5 b = 20,0 cm. Die Aufbringung der Last erfolgt 10 Tage nach der Herstellung, d.h. das Belastungsalter ist t_o = 10 Tage.

Mit diesen Angaben kann man den Tabellen 1 bis 4 folgende zur Bestimmung der Kriechzahl erforderlichen Werte entnehmen:

$\varphi_\infty^m = 2{,}0$; $k_1 = 1{,}00$; $k_2 = 1{,}00$;

$\varkappa_o = 0{,}37$; $\varkappa_1 = 25$; $\varkappa_2 = 13$; $k_o = 22$

Mit Hilfe der Formeln (5) bis (8) erhält man für die Kriechzahl den Ausdruck

$$\varphi(t_k,t_i) = (0{,}74 + \frac{50}{13+t_i}) \cdot \frac{(t_k-t_i)}{22+(t_k-t_i)} ,$$

worin t_k und t_i in Tagen einzusetzen sind.

Tabelle 6: Rechenergebnisse

	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5	k = 6	k = 7
t_k [Tage]	10	12	17	24	40	100	370	1090
(t_k-t_0) [Tage]	0	2	7	14	30	90	360	1080
$\varphi(t_k,t_0)$	0	0,24	0,70	1,13	1,68	2,34	2,75	2,86
$f(t_k,t_0)$	0	0,083	0,241	0,389	0,577	0,804	0,942	0,980
$\xi(t_k)$	0,366	0,394	0,437	0,467	0,502	0,533	0,549	0,553
$\sigma_b(t_k)$ [kp/cm²]	-108,3	-97,9	-84,0	-75,2	-65,5	-57,2	-53,1	-52,1
$\sigma_a(t_k)$ [kp/cm²]	1306	1324	1352	1368	1384	1393	1397	1398
$\sigma_a'(t_k)$ [kp/cm²]	-540	-634	-799	-932	-1107	-1280	-1378	-1403
$\varepsilon_b(t_k)$ [‰]	-0,360	-0,410	-0,500	-0,572	-0,664	-0,756	-0,809	-0,823
$\varepsilon_a(t_k)$ [‰]	0,622	0,631	0,644	0,652	0,659	0,663	0,665	0,666
$\varepsilon_a'(t_k)$ [‰]	-0,257	-0,302	-0,381	-0,444	-0,527	-0,609	-0,656	-0,668

Die mit den Formeln des Abschnittes 3 errechneten Werte sind in Tabelle 6 zusammengestellt. Die Berechnung wurde für eine Belastungszeit von 3 Jahren durchgeführt. Der Fehler, der durch die Aufteilung der Gesamtzeit in die in Tabelle 6 angeführten Zeitintervalle bei Anwendung des Wertes $\vartheta = 0{,}5$ (s. Abschnitt 3.4) entsteht, ist kleiner als 3 %.

Wie aus Tabelle 6 ersichtlich, ändern sich im Laufe von 3 Jahren die Stahlzugspannungen nur unwesentlich (Zunahme um 7 %), wogegen die Änderung der Druckspannungen im Stahl (Zunahme um 160 %) und im Beton (Abnahme um 52 %) ganz erheblich ist.

Literatur

[1] Arutjunjan, N.Ch.
Einige Fragen der Kriechtheorie
Gostechisdat - Moskau, Leningrad - 1952

[2] Krüger, W.
Zur Frage der Kriechverformungen
Sammelband "Ingenieurkonstruktionen" des Leningrader Bauingenieurinstituts - Leningrad - 197o

[3] Krüger, W.
Zum zeitlichen Verlauf der Kriechkurven von unbedampften und bedampften Betonen
Beton, Düsseldorf 19 (1969), H. 4

[4] Ulizki, J.J.
Theorie und Berechnung von stabförmigen Stahlbetonkonstruktionen unter Berücksichtigung von Langzeitprozessen
Kiew - 1967

[5] Reinsdorf, S.
Betontaschenbuch, Bd. I (Betontechnologie)
VEB Verlag für Bauwesen Berlin - 1965, S. 29

Zusammenfassung

Unter Anwendung der Theorie des elastisch-kriechenden Körpers auf einen doppelt bewehrten Stahlbetonquerschnitt werden mit Hilfe eines Näherungsverfahrens gebrauchsfertige Formeln zur Ermittlung der Stahl- und Betonspannungen für den Fall einer exzentrischen Druckkraft mit großem Ausschlag hergeleitet. Die theoretischen Abhandlungen werden durch ein praktisches Zahlenbeispiel ergänzt.

Summary

The application of elastic-creeping body theory for concrete cross sections with double reinforcement is described. By using an approximative method formulae are derived for calculation of steel and concrete stresses in concrete cross sections charged by compressive forces with high eccentricity.

A numerical example completes the theoretical considerations.

Résumé

L'application de la théorie des corps sujets au fluage élastique pour une section de béton doublement armée permet d'établir, à l'aide d'une méthode d'approximations successives, des formules pratiques pour la détermination des tensions dans l'acier et dans le béton dans le cas d'une compression excentrique à grande amplitude. La théorie traitée est complétée à l'aide d'un exemple pratique.