

# Sur un théorème d'Euler et ses principales conséquences

Autor(en): **Droz, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Actes de la Société jurassienne d'émulation**

Band (Jahr): **1 (1885-1888)**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-684383>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Sur un théorème d'Euler et ses principales conséquences

---

*Note.* — Léonard Euler, célèbre mathématicien suisse est né à Bâle, le 15 avril 1707. Il étudia les mathématiques sous la direction de son grand compatriote, Jean Bernouilli. Agé de 19 ans, il obtenait déjà un accessit de l'Académie des sciences de Paris, pour un travail sur la mâture des vaisseaux. En 1733, il remplaçait dans la chaire de mathématiques, David Bernouilli à l'Académie de St-Pétersbourg. En 1741, il se rendait à Berlin. C'est là, qu'il publia ses fameuses lettres à une princesse d'Allemagne, sur quelques sujets de physique et de philosophie (princesse d'Anhalt-Dessau) qui eurent un grand retentissement.

Appelé par l'impératrice Catherine II, il retourna à St-Pétersbourg en 1766. Il y mourut en septembre 1783.

---

Le remarquable théorème qui fait l'objet de cette note peut être exprimé comme suit :

Dans tout polyèdre convexe, le nombre des arêtes augmenté de 2 est égal au nombre des faces augmenté de celui des sommets.

La formule d'Euler n'est pas applicable à tous les polyèdres d'espèces supérieures. Elle ne subsiste que pour ceux, dont la projection faite sur une sphère ayant son centre dans l'intérieur du polyèdre, recouvre exactement cette sphère, sans aucune duplication.

De nombreuses démonstrations de cette formule ont été publiées dans divers journaux scientifiques.

Citons :

Legendre, qui s'est basé sur la formule de la surface d'un polygone sphérique ; deux belles démonstrations de Cauchy, dans le 16<sup>e</sup> cahier du journal de l'Ecole polytechnique ; Gergonne, dans ses annales de mathématiques et surtout une magnifique démonstration, d'une simplicité étonnante publiée par Gauss dans le premier volume du journal de Crelle.

Poinsot, dans le journal de l'Ecole polytechnique, tome IV ; Cauchy, dans le tome IX, du même ouvrage, et Bertrand dans les comptes-rendus de l'Académie des sciences, tome IX ont étendu ce théorème aux polyèdres d'ordres supérieurs.

On trouvera une foule de conséquences curieuses de cette belle formule dans les travaux d'Euler lui-même, dans les *Eléments* de Legendre, dans les différents volumes des annales de Gergonne et dans tous les principaux traités de géométrie de l'espace.

Qu'il me soit permis d'en citer les plus importantes dont les dernières sont de date récente :

1<sup>o</sup> Il ne peut exister que 5 polyèdres convexes réguliers de première espèce.

La démonstration de ce théorème est si simple qu'elle peut facilement prendre place dans tout cours élémentaire de mathématiques.

On peut consulter à cet effet : Rouché et Comberousse, *Traité de géométrie*, deuxième volume : un article du jeune et savant géomètre italien, Ernest Cesaro dans la *Nouvelle correspondance mathématique* de Catalan, tome VI, page 118, et un article récent de Francesco Panizza : *Nota sui poliedri regolari et semi-regolari convessi*, dans le tome III du *Periodico di Matematica* de David Besso.

2<sup>o</sup> Dans tout polyèdre convexe, le nombre des angles trièdres augmenté du nombre des faces triangulaires est au moins égal à 8.

Exemples :

Le cube n'a pas de faces triangulaires mais possède 8 angles trièdres et de même l'octaèdre n'a pas d'angles trièdres, mais par contre 8 faces triangulaires.

Comme corollaire immédiat de cette proposition on déduit : Il n'existe aucun polyèdre convexe qui ne possède ni angle trièdre, ni face triangulaire.

3° Il n'existe aucun polyèdre convexe dont toutes les faces aient plus de 5 côtés, ni aucun polyèdre convexe dans lequel tous les angles polyèdres auraient plus de 5 arêtes.

4° Dans un polyèdre convexe, la somme des angles droits de toutes les faces est égale à 4 fois la différence entre le nombre des arêtes et des faces.

Dans le cube par exemple, la somme totale des angles droits est de 24 ; le nombre des arêtes est de 12 et celui des faces de 6 et l'on a bien :

$$24 = 4 [12 - 6]$$

En transformant cette relation par la formule d'Euler on obtient le curieux théorème :

Dans un polyèdre convexe, la somme des angles droits de toutes les faces est égale à 4 fois le nombre des sommets moins 8.

En établissant les relations qui permettent de démontrer ces différents théorèmes on rencontre incidemment les curieuses propositions suivantes :

1° Dans tout polyèdre convexe, le nombre des faces dont le nombre des côtés est impair est toujours au nombre pair.

*Par exemple :* Dans un tétraèdre, il y a 4 faces triangulaires ; dans un dodécaèdre, 12 faces pentagonales ; dans une pyramide à base pentagonale, il y a 1 pentagone et 5 triangles, donc 6 faces à nombre impair de côtés.

2° Dans tout polyèdre convexe, le nombre des angles

polyèdres dont le nombre des arêtes est impair est toujours un nombre pair.

Voici pour finir un théorème récent, dû à Ernest Cesaro. La démonstration est celle que j'ai publiée dans le tome VIII de la *Mathésis* de P. Mansion et J. Neuberg :

1° Il y a une infinité de polyèdres à faces triangulaires ne différant que par le nombre de leurs angles hexaèdres, mais il n'y en a pas deux qui diffèrent seulement par le nombre de leurs angles solides d'un autre ordre.

2° Il y a une infinité de polyèdres à faces quadrangulaires ne différant que par le nombre de leurs angles tétraèdres, mais il n'y en a pas deux qui diffèrent seulement par le nombre de leurs angles solides d'un autre ordre.

3° Il n'y a pas deux polyèdres à faces pentagonales, qui ne diffèrent que par le nombre de leurs angles solides d'un certain ordre.

### *Démonstration.*

Soient F le nombre des faces, A celui des arêtes et S celui des sommets d'un polyèdre ; on aura la relation d'Euler :

$$1) \quad F + S = A + 2$$

Représentons aussi par T, Q, P, H, J, L, etc.... les nombres des angles trièdres, tétraèdres, pentaèdres, hexaèdres, etc.

### *Première partie.*

Si le polyèdre n'a que des faces triangulaires, on a évidemment les relations :

$$F = \frac{1}{3} \left[ 3 T + 4 Q + 5 P + \dots \right]$$

$$A = \frac{1}{2} \left[ 3 T + 4 Q + 5 P + \dots \right]$$

$$S = T + Q + P + \dots$$

Substituant ces valeurs de F, A et S dans la formule d'Euler on trouve :

$$3 T + 2 Q + P - J - 2 L \dots = 12$$

Cette égalité est indépendante du nombre H des angles hexaèdres, et elle détermine une valeur unique de l'un des nombres T, Q, P, J ... quand les valeurs des autres sont connues.

Le premier théorème de Monsieur Cesaro est donc démontré.

*Deuxième partie.*

Si toutes les faces du polyèdre sont quadrangulaires, la première formule est à remplacer par celle-ci :

$$F = \frac{1}{4} ( 3 T + 4 Q + 5 P + 6 H + \dots )$$

les deux autres restant les mêmes.

Après la substitution dans la relation eulérienne on obtient l'égalité.

$$T - P - 2 H \dots = 8$$

d'où l'on conclut le deuxième théorème de Cesaro.

*Troisième partie.*

Supposons toutes les faces pentagonales. Alors

$$F = \frac{1}{5} ( 3 T + 4 Q + 5 P + 6 H + \dots )$$

et 
$$T - 2 Q - 5 P - 8 H \dots = 20$$

relation qui contient toutes les quantités

T, Q, P, H etc...

Le théorème de Cesaro est ainsi complètement démontré.

J'ai en outre prouvé dans le même journal par une analyse très simple, qu'il ne peut exister d'autres théorèmes analogues aux théorèmes 1 et 2 de Cesaro. En étudiant cette proposition j'ai été conduit à plusieurs relations nouvelles que j'espère pouvoir publier prochainement dans un journal spécial.

Porrentruy 1889.

A. DROZ, *professeur.*