3. Surfaces cubiques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

générale fut développée par E. Lutz (1937) et A. Weil (1936), qui étudièrent la structure du groupe topologique $E(k)$ lorsque k est un corps p-adique (ce qu'on peut transcrire aujourd'hui au moyen des groupes formels et des modèles de Néron). Châtelet attira l'attention sur le fait que la méthode d'E. Lutz permet la détermination effective des points exceptionnels lorsque le corps de base k est un corps de nombres quelconque. Dans une note de 1940, Châtelet observe que les résultats de Lutz permettent de borner uniformément la torsion des courbes elliptiques définies sur un corps de nombres k et d'invariant j fixé (il suffit de se placer sur une complétion p-adique de k; à k-isomorphisme près, il n'y a alors qu'un nombre fini de courbes elliptiques d'invariant j donné, et pour chacune d'elles le groupe de torsion est fini). C'est un problème ouvert de savoir si la condition sur j peut être omise (dans le cas $k = \mathbf{Q}$, c'est un théorème de Mazur que l'ordre du groupe de torsion est au plus 16).

3. Surfaces cubiques

C'est la partie de l'œuvre de Châtelet qui a joué un grand rôle dans mes recherches personnelles.

Sauf mention du contraire, les surfaces cubiques ici considérées sont supposées absolument irréductibles et non coniques. Le corps de base k est pris de caractéristique zéro.

3.1. Avant Châtelet.

De 1940 à 1944, Mordell et B. Segre s'intéressent aux surfaces cubiques. Ils montrent que si une telle surface X définie sur k possède un point rationnel non singulier, alors il existe une application rationnelle dominante définie sur k d'un plan projectif sur X. En particulier les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski. B. Segre montre en 1944 qu'une surface cubique singulière X qui possède un point rationnel non singulier est k-rationnelle (k-birationnelle au plan projectif) sauf si X possède exactement deux points singuliers conjugués. En 1951, ce même Segre étudie les surfaces cubiques non singulières. On dit qu'une telle surface contient un S_n si elle contient un ensemble globalement défini sur k de n droites gauches deux à deux. Segre montre que si X est k-rationnelle, alors X contient nécessairement un S_1, un S_2, un S_3 ou un S_6 (comme le montrèrent indépendamment en 1970 Swinnerton-Dyer et Iskovskih, X contient en fait un S_2, un S_3 ou un S_6). En 1951, Segre donne aussi les premiers exemples de surfaces cubiques X qui possèdent un point rationnel non-singulier mais qui ne sont pas k-rationnelles. En 1953, Selmer établit le principe de Hasse pour les surfaces cubiques diagonales

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0, \quad ab/cd \in k^{*3}.$$

En 1955, Skolem établit le principe de Hasse pour les surfaces cubiques singulières.

3.2. La contribution de Châtelet [1953] [1954*a*] [1954*b*] [1958] [1959*b*] [1966].

Tout d'abord, Châtelet montra qu'une surface cubique non singulière qui contient un S_3 ou un S_6 satisfait le principe de Hasse. Ce résultat généralise le résultat de Selmer mentionné ci-dessus. La clé de la démonstration est que si X contient un S_6, alors X est k-birationnelle à une surface de Severi-Brauer. Les notes de 1953 et 1954 contiennent des équations concrètes pour des surfaces satisfaisant les dites conditions.

Dans [1954*b*], Châtelet se demande comment décrire l'ensemble $X(k)$ des points rationnels d'une surface cubique X lorsque k est un corps de nombres et que X n'est pas k-rationnelle, ce qui exclut une représentation paramétrique essentiellement biunivoque. On pourrait a priori chercher un nombre fini de paramétrisations multivoques $\varphi_i : X_i \to X$ avec $X(k) = \bigcup_i \varphi_i(X_i(k))$ et chaque X_i k-birationnel au plan projectif $\mathbf{P}^2_k$. Châtelet remarque que cela semble très difficile (en 1967, Manin montrera que c'est en général impossible). Aussi Châtelet fait-il la suggestion très originale suivante: chercher de telles paramétrisations, mais avec X_i k-birationnel à $\mathbf{P}^n_k$ pour un entier $n > 2$. Il prend alors comme exemple la surface X d'équation

$$N_{K/k}(x + \omega y + \omega^2 z) = 1$$

avec $K = k(\omega)$ extension cubique non cyclique du corps de nombres k. Ici $X(k) = K^{*1}$ est le groupe des éléments de K^* de norme 1. Si L/k est la clôture galoisienne de K/k, $G = \mathrm{Gal}(L/k) = \langle s, t \rangle$ avec $s^3 = t^2 = 1$, Châtelet montre que l'application

$$\varphi : L^* \to K^{*1}$$
$$x \mapsto \big(s(x)/x\big) \cdot \big(t\big(s(x)\big)/x\big)$$

a un conoyau fini. La démonstration utilise des factorisations fort réminiscentes de la démonstration du théorème de Mordell-Weil faible. En fait, l'application φ est, pour des raisons algébriques, surjective quel que soit le corps k. Mais la méthode inspira des travaux ultérieurs (voir 3.3).

En 1958, Châtelet s'intéressa à des surfaces cubiques avec deux points singuliers conjugués:

$$y^2 - az^2 = (x-e_1)(x-e_2)(x-e_3) \qquad (X).$$

Les résultats qu'il obtint et que je vais maintenant décrire eurent une grande influence sur les recherches ultérieures.

Pour ces surfaces, appelées depuis surfaces de Châtelet, il établit ([1959*b*], [1966]), lorsque k est un corps de nombres, l'existence d'un nombre fini de paramétrisations pour les points rationnels, du type suggéré plus haut (les X_i sont ici k-birationnels à $\mathbf{P}_k^4$). Ici, une seule paramétrisation ne suffit en général pas à couvrir les points rationnels d'une telle surface.

La méthode est directement inspirée de la démonstration de Weil du théorème de Mordell-Weil faible. Si K est l'extension quadratique $k(\sqrt{a})$ de k et N désigne la norme de K à k, Châtelet considère l'application:

$$f : X(k) \to (k^*/NK^*)^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (x-e_1, x-e_2)$$

et montre qu'elle a une image finie. Par ailleurs, il montre que le noyau de f est constitué des points de $X(k)$ qui sont obtenus à partir de $X(K)$ par l'application p qui à un point $P \in X(K)$ associe le troisième point d'intersection avec X de la droite passant par P et par le conjugué de P (composition de P et de son conjugué). Cette application peut être vue comme l'application $\varphi_1 : X_1(k) \to X(k)$ induite par une application rationnelle définie sur k de la k-variété algébrique $X_1 = R_{K/k}(X_K)$ vers X. Ici $R_{K/k}$ est le foncteur de descente « à la Weil » qui transforme une variété définie sur K en variété définie sur k, en multipliant la dimension par le degré de K sur k. Soit S le k-tore algébrique défini par $u_1^2 - av_1^2 = 1$, $u_2^2 - av_2^2 = 1$, et soit $\mathcal{T}$ l'espace principal homogène sur X sous S défini par les équations

$$x - e_1 = u_1^2 - av_1^2, \quad x - e_2 = u_2^2 - av_2^2.$$

Ce que Châtelet établit plus précisément, c'est d'une part que l'application rationnelle $R_{K/k}(X_K) \to X$ définie par la « composition » se factorise par une application $i: R_{K/k}(X_K) \to \mathcal{T}$, d'autre part, par un calcul explicite et qui à ce jour n'a pas encore perdu tout son mystère, que l'application i est k-birationnelle. Ce calcul est analogue à la présentation de la multiplication par 2 sur une courbe de Weierstrass E comme espace principal homogène sur E sous le groupe $\mu_2 \times \mu_2$ donné par les équations $x - e_1 = u_1^2$, $x - e_2 = u_2^2$.

Comme X_K est évidemment une surface K-rationnelle, la k-variété $X_1 = R_{K/k}(X_K)$ est k-rationnelle, si bien que l'on a paramétré les points du noyau de f. Pour paramétrer les points de $X(k)$ d'image non triviale par f, Châtelet observe par un calcul fort instructif que pour tout $\alpha = f(P_0)$, les points M de $f^{-1}(\alpha) \subset X(k)$ sont obtenus à partir des points de $\varphi_1(X_1(k))$ en appliquant la « symétrie » par rapport au point P_0.

3.3. Après Châtelet.

Les travaux consécutifs à ceux de Châtelet se sont en général placés dans la perspective plus large de l'étude des surfaces rationnelles et aussi de certaines variétés rationnelles de dimension plus grande. Comme ces travaux ont fait récemment l'objet d'exposés généraux (Manin/Tsfasman 1986, l'auteur 1986), on se contentera ici de décrire les développements ayant trait directement aux recherches de Châtelet.

Manin et Iskovskih, généralisant des résultats d'Enriques (1897) ont établi une classification k-birationnelle des surfaces rationnelles. Dans cette classification, les surfaces de Châtelet généralisées :

$$y^2 - az^2 = P(x), \quad \deg P \leqslant 4$$

apparaissent comme les surfaces arithmétiquement non-triviales les plus simples. Elles ont servi de banc d'essai pour toutes les conjectures concernant les variétés rationnelles, conjectures dont on a quelques raisons d'espérer qu'elles s'insèrent dans un ensemble bien plus vaste, sortant du cadre des variétés rationnelles.

Pour la commodité de l'exposé, disons que l'on s'est intéressé aux trois thèmes suivants :

k-rationalité. Si X est une surface (variété) rationnelle avec un k-point non singulier, qu'est-ce qui empêche X d'être k-rationnelle, ou du moins k-stablement rationnelle ($X \times \mathbf{P}^r_k$ k-birationnel à $\mathbf{P}^s_k$), et y a-t-il une différence entre ces deux notions (problème de Zariski, mentionné par B. Segre en 1950) ?

Principe de Hasse. Si k est un corps de nombres, décrire l'obstruction à la validité du principe de Hasse.

Description des points rationnels. Si k est un corps de nombres, et $X(k) \neq \emptyset$, obtenir des paramétrisations finies du type de Châtelet pour d'autres classes de variétés. A défaut, décrire des relations d'équivalence sur $X(k)$ approchant la décomposition en classes de paramétrisation.

Manin et Voskresenskii dégagèrent le rôle important du module galoisien $\operatorname{Pic}(\bar{X})$ (X variété rationnelle projective et lisse) dans l'étude de la k-rationalité (stable). Ainsi, au moins en caractéristique zéro, le groupe $H^1(G, \operatorname{Pic}(\bar{X}))$ est un invariant k-birationnel qui est essentiellement équivalent à un autre invariant, le groupe de Brauer-Grothendieck de X. Ces invariants permettent souvent de reconnaître qu'une k-variété rationnelle n'est pas k-rationnelle, ce bien qu'elle possède un point rationnel.

Swinnerton-Dyer donna dès 1962 des contre-exemples au principe de Hasse pour les surfaces cubiques lisses, et d'autres suivirent pour d'autres types de surfaces rationnelles. Manin (1970) mit de l'ordre dans ces contre-exemples, en les interprétant au moyen du groupe de Brauer-Grothendieck.

Dans son livre sur les formes cubiques (1970), Manin donne aussi son point de vue sur la paramétrisation des points rationnels des surfaces de Châtelet. Il introduit d'une part la notion de R-équivalence sur les points (être liés par une chaîne de courbes de genre zéro), d'autre part l'équivalence de Brauer, via l'accouplement naturel $X(k) \times \operatorname{Br} X \to \operatorname{Br} k$. Il se trouve que pour les surfaces de Châtelet ces deux notions coïncident, mais il n'en est plus ainsi pour les surfaces de Châtelet généralisées.

En 1970, je passai une année à Cambridge (Angleterre) et P. Swinnerton-Dyer me suggéra de comprendre en profondeur les calculs assez mystérieux de Châtelet, ce afin de généraliser les résultats à d'autres variétés. En 1974, je pus ainsi interpréter une partie des calculs de Châtelet grâce à l'utilisation de torseurs sous des tores particuliers (ainsi le calcul fort instructif mentionné à la fin de 3.2 peut être interprété au moyen d'une généralisation de la loi de réciprocité d'A. Weil).

En 1976, Sansuc et moi-même, inspirés par les articles de Châtelet de 1954 et 1959 d'une part et par les travaux de Manin et Voskresenskii d'autre part, établîmes pour les points rationnels des tores algébriques l'analogue du résultat de paramétrisation finie de Châtelet. Ce résultat peut s'interpréter dans la perspective de la « descente » sur les points rationnels d'une variété rationnelle X. Comme Châtelet, on utilise des torseurs sur X sous des tores, plutôt que le groupe de Brauer-Grothendieck (de tels torseurs donnent une meilleure approximation de la R-équivalence sur $X(k)$). En 1984, Sansuc, Swinnerton-Dyer et moi-même pûmes compléter le programme de la descente pour toutes les surfaces de Châtelet généralisées. Ainsi, si une telle surface X possède un k-point et si l'invariant $\operatorname{Pic}(\bar{X})$ est « trivial », alors X est stablement k-rationnelle. Comme d'autres invariants, non stables, permettent parfois de montrer que X n'est pas k-rationnelle, ceci mena à une réponse négative au problème de Zariski, tant pour les surfaces sur $\mathbf{Q}$

(exemple: $y^2+3z^2=x^3-2$) que pour les variétés de dimension 3 sur **C** (résultat obtenu en collaboration avec Beauville). Par ailleurs, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (donnée par le groupe de Brauer-Grothendieck) est ici la seule, et ceci permet de déterminer effectivement si une telle surface a un point rationnel. Enfin, les points rationnels d'une telle surface peuvent être décrits au moyen d'un nombre fini de paramétrisations par des variétés k-rationnelles.

Dans ses recherches, François Châtelet ne s'est jamais enlisé dans un formalisme gratuit. Les idées qu'il a lancées sont encore fécondes aujourd'hui, et j'aimerais en conclusion redire combien elles m'ont marqué.

ARTICLES DE FRANÇOIS CHÂTELET

[1938] Points rationnels et classification des courbes de genre un. *C. R. Acad. Sc. Paris 206* (1938), 1532.

[1939] Classification des courbes de genre un, dans le corps des restes, module *p*. *C. R. Acad. Sc. Paris 208* (1939), 487-489.

[1940*a*] Points exceptionnels d'une cubique de Weierstrass. *C. R. Acad. Sc. Paris 210* (1940), 90-92.

[1940*b*] Groupe exceptionnel d'une classe de cubiques. *C. R. Acad. Sc. Paris 210* (1940), 200-202.

[1941] Courbes réduites dans les classes de courbes de genre 1. *C. R. Acad. Sc. Paris 212* (1941), 320-322.

[1943*a*] Sur la notion d'équivalence due à Poincaré. *C. R. Acad. Sc. Paris 216* (1943), 142-144.

[1943*b*] Equivalence de certaines variétés unicursales. *C. R. Acad. Sc. Paris 216* (1943), 189-191.

[1944] Variations sur un thème de Poincaré. *Annales E.N.S., 3^e^ série, 61* (1944), 249-300.

[1945] Les êtres géométriques d'un corps abstrait. *Annales de l'Université de Lyon, 3e série, Section A, VIII* (1945), 5-28.

[1946*a*] Méthode galoisienne et courbes de genre un. *Annales de l'Université de Lyon, 3e série, Section A, IX* (1946), 40-49.

[1946*b*] Introduction géométrique à l'étude arithmétique des cubiques. *Revue Scientifique 84* (1946), 3-6.

[1946*c*] Eléments de géométrie galoisienne. *Bulletin de la S.M.F. 74* (1946), 69-86.

[1946*d*] Les correspondances birationnelles à coefficients rationnels sur une courbe. *C. R. Acad. Sc. Paris 222* (1946), 351-353.

[1947*a*] Sur l'arithmétique des courbes de genre un. *Annales de l'Université de Grenoble (nouvelle série), XXII, Année 1946* (1947), 153-165.

[1947*b*] Utilisation des congruences en analyse indéterminée. *Annales de l'Université de Lyon, 3e série, Section A, X* (1947), 5-22.