Synopsis grundlegender Ansätze

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen des Statistischen Bureaus des Kantons Bern**

Band (Jahr): **- (1968)**

Heft 54

PDF erstellt am: **25.09.2024**

3 Synopsis grundlegender Ansätze

Ansatz	Nr.
Einfache lineare Regression und Korrelation	
(1) **Das Modell**	
$y = \alpha + \beta x + \varepsilon$, bzw.	(2)
$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$.	(3)
(2) **Schätzverfahren**	
Niveaukonstante a:	
$a = \bar{y} - b_{yx}\bar{x}$	(7)
Regressionskoeffizient b:	
$b_{yx} = \frac{S(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{S(x_i-\bar{x})^2} = \frac{Sx_iy_i - \frac{1}{N}(Sx_i)(Sy_i)}{Sx_i^2 - \frac{1}{N}(Sx_i)^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$	(8), (10)
Regressionsgleichung:	
$Y_i = \bar{y} + b_{yx}(x_i-\bar{x})$, bzw.	(11)
$Y_i = a + b_{yx}x_i$	
Streuung der Einzelwerte:	
$s_{yx}^2 = \frac{1}{N-2}\left\{S_{yy} - \frac{S_{yx}^2}{S_{xx}}\right\} = \frac{1}{N-2}\left\{S_{yy} - b_{yx}S_{yx}\right\}$	(16)
Bestimmtheitsmass; Korrelationskoeffizient:	
$B = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}S_{yy}} = b_{yx}b_{xy}$	(17), (18)
$r = \sqrt{B}$	

Ansatz	Nr.

(3) **Prüfen von Hypothesen**

Varianzanalyse:

Streuung	SQ	FG	DQ
Auf Regression	$b_{yx} S_{xy}$	1	$s_1^2 = b_{yx} S_{xy}$
Um Regression	$S_{yy} - b_{yx} S_{xy}$	$N - 2$	$s_2^2 = s_{yx}^2$
Insgesamt	S_{yy}	$N - 1$	.

(21)

Niveaukonstante a:

$$t = \frac{a - \alpha}{s_{yx}} \sqrt{N}\,, \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{a}{s_{yx}} \sqrt{N}$$ (24)

Regressionskoeffizient b:

$$t = \frac{b_{yx} - \beta}{s_{yx}} \sqrt{S_{xx}}\,, \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{b_{yx}}{s_{yx}} \sqrt{S_{xx}}$$ (25), (26)

Bestimmtheitsmass:

$$F = \frac{B\, S_{yy} (N - 2)}{S_{yy} (1 - B)} = \frac{B (N - 2)}{(1 - B)}$$ (27)

mit: $n_1^* = 1$ und $n_2^* = (N - 2)\,FG$

(4) **Vertrauensgrenzen der Schätzung**

Regressionsparameter:

$$a \pm t_P\, s_{yx} / \sqrt{N}$$ (32)

$$b \pm t_P\, s_{yx} / \sqrt{S_{xx}}$$ (31)

Regressionswerte Y_i:

$$s_Y^2 \sim s_{yx}^2 \left\{ \frac{1}{N} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right\}, \quad \text{bzw.}$$ (33)

$$Y_i \pm t_P\, s_Y$$ (34.2)

Ansatz	Nr.
Einfache nichtlineare Regression	
(1) **Transformation auf den linearen Fall**	
$Y = a b^x$, bzw. $\log Y = \log a + x (\log b)$	(39)
$Y = a x^b$, bzw. $\log Y = \log a + b (\log x)$	(40)
(2) **Mehrfache lineare Regression**	
$Y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$, mit: $x_1 = x$; $x_2 = x^2$	
(3) **Orthogonale Polynome**	
$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p$, bzw.	(41)
$Y = A_0 + A_1 \varphi_1 + \ldots + a_p \varphi_p$	(42)
Mehrfache lineare Regression	
(1) **Das Modell**	
$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_p x_p + \varepsilon$	(45)
(2) **Schätzverfahren**	
Niveaukonstante a (3 Variable):	
$a = \dfrac{S y_i - b_1 S x_{1i} - b_2 S x_{2i}}{N}$	(50)
Regressionskoeffizienten:	
$b_1 = \dfrac{1}{\triangle} \begin{vmatrix} S_{x_1 y} & S_{x_1 x_2} \\ S_{x_2 y} & S_{x_2 x_2} \end{vmatrix}$; bzw. $b_2 = \dfrac{1}{\triangle} \begin{vmatrix} S_{x_1 x_1} & S_{x_1 y} \\ S_{x_1 x_2} & S_{x_2 y} \end{vmatrix}$	(51)
mit: $\triangle = \begin{vmatrix} S_{x_1 x_1} & S_{x_1 x_2} \\ S_{x_1 x_2} & S_{x_2 x_2} \end{vmatrix}$	

Ansatz	Nr.
Bestimmtheitsmass (totales):	
$B_T = \frac{1}{S_{yy}} \left\{ b_1 S_{x_1y} + b_2 S_{x_2y} \right\}$	(54)
(3) Prüfen von Hypothesen	
Varianzanalyse:	
$F = \frac{\text{DQ (auf Regression)}}{\text{DQ (um Regression)}} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	(57)
Partielle Regressionskoeffizienten:	
$t = \frac{b_j - \beta_j}{s\sqrt{c_{jj}}} = \frac{b_j - \beta_j}{s_{b_j}}$	
$n^* = (N - p - 1)$ FG	
Totale Bestimmtheit:	
$F = \frac{B(N - p - 1)}{(1 - B)\,p}$	(58)
mit: $n_1^* = p$ und $n_2^* = (N - p - 1)$ FG	
Partielle Bestimmtheit:	
$F = \frac{B(N - 2p)}{(1 - B)\,p}$	(59)
mit: $n_1^* = p$ und $n_2^* = (N - 2p)$ FG	
(4) Vertrauensgrenzen der Schätzung	
Partielle Regressionskoeffizienten:	
$b_j \pm t_P s \sqrt{c_{jj}}$, bzw. $b_j \pm t_P s_b$	(75)
Regressionswerte:	
$Y \pm t_P s_Y$; s_Y^2 nach (60).	