

Sektion für Mathematik

Autor(en): [s.n.]

Objekttyp: **AssociationNews**

Zeitschrift: **Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Wissenschaftlicher und administrativer Teil = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles. Partie scientifique et administrative = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali**

Band (Jahr): **153 (1973)**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

12. Sektion für Mathematik

Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Société Mathématique Suisse
Società Svizzera di Matematica

Präsident: Prof. Dr. E. Specker, ETH, 8006 Zürich
Sekretär: Prof. Dr. H. Kleisli, Université, 1700 Fribourg

Wissenschaftliche Sitzung / Séance scientifique

Samstag, 20. Oktober / Samedi 20 octobre

1. Y. Biollay (ETHZ): Problème de Sturm-Liouville: bornes pour les zéros des fonctions propres
2. S.L. Chan (ETHZ): Eine nichtklassische Anwendung der Gruppentheorie auf ein Randwertproblem
3. A. Good (ETHZ): Ein Mittelwertsatz für Dirichletreihen, die Modulformen assoziiert sind
4. P. de la Harpe (Lausanne): Groupes de Lie de grande dimension agissant sur des sphères.
5. U. Schweizer (Basel): Fortsetzung von Spezialisierungen, ein idealtheoretischer Beweis
6. H. Walser (ETHZ): Liouvillesche Parameternetze mit Singularitäten
7. A. Wohlhauser (EPFL): Q-Nullmengen
8. W. Bäni (Zürich): Ringe, die dicht sind in ihrer Modulkategorie
9. H.U. Baumann (ETHZ): Quantitative Erfassung des Unterrichtsverhaltens
10. S. Maumary (Lausanne): Catégorie de Quillen en L-théorie

11. Sophie Piccard (Séminaire de Géométrie, Université de Neuchâtel):

I. Les sous-groupes invariants du groupe G_{s_2}

Soit G_{s_2} le groupe de toutes les transformations périodiques de période 2 de l'ensemble Z des entiers rationnels, muni de la loi usuelle de composition des transformations. Les éléments de G_{s_2} se répartissent en deux classes d'équivalence: celle des transformations paires de la forme où

$$t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 1+2j \end{pmatrix}_2,$$

i et $j \in Z$, $t_1(0) = 2i$, $t_1(1) = 1 + 2j$, $t_1(2k) = 2(i+k)$, $t_1(1+2k) = 1 + 2(j+k)$, quel que soit $k \in Z$, et celle des transformations impaires de la forme

$$t_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+2i' & 2j' \end{pmatrix}_2,$$

$i', j' \in Z$, $t_2(0) = 1 + 2i'$, $t_2(1) = 2j'$, $t_2(2k) = 1 + 2(i'+k)$, $t_2(1+2k) = 2(j+k)$, quel que soit $k \in Z$. Le groupe G_{s_2} possède trois sous-groupes invariants maximaux d'index 2: le sous-groupe A formé de tous les éléments pairs de G_{s_2} qui est un groupe abélien libre de rang 2; le sous-groupe A^* formé de tous les éléments pairs de la forme t_1 où i et j sont de même parité et de tous les éléments impairs de la forme t_2 où i' et j' sont également de même parité, groupe qui n'est ni abélien, ni libre, mais qui est fondamental de rang 3 (il possède des systèmes irréductibles de trois générateurs, mais il ne saurait être engendré par un couple d'éléments); enfin le sous-groupe A^{**} formé des mêmes éléments pairs que A^* et de tous les éléments impairs de la forme t_2 où i' et j' sont des entiers de parité différente. A^{**} n'est également ni abélien ni libre, il est fondamental de rang 2 (c.-à-d. qu'il n'est pas cyclique, mais qu'il possède des couples d'éléments générateurs). Quel que soit le nombre premier p impair ≥ 3 , le groupe G_{s_2} possède un sous-groupe invariant maximal d'index p^1 . Tout sous-groupe d'un groupe abélien libre de rang 2 est de rang non supérieur à 2. Donc tout sous-groupe abélien de G_{s_2} est un groupe fondamental de rang ≤ 2 . D'autre part, tout sous-groupe non abélien G de G_{s_2} contient au moins un élément impair, le sous-groupe G_1 de G formé de tous les éléments pairs de G est maximal, invariant, d'index 2 et par suite tout sous-groupe de G_{s_2} est fondamental de rang ≤ 3 . Il s'ensuit que le treillis des sous-groupes invariants de G_{s_2} , comme aussi le treillis de tous les sous-groupes de G_{s_2} , est dénombrable. Le centre de G_{s_2} est le sous-groupe cyclique invariant non maximal C engendré par l'élément

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_2.$$

¹ On trouvera la démonstration de cette proposition dans les Publications du Séminaire de Géométrie de l'Université de Neuchâtel, Série III, Vol. I.

Le sous-groupe commutateur G'_{s_2} de G_{s_2} est le groupe cyclique engendré par l'élément

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1-2 \end{pmatrix}_2.$$

C'est aussi un sous-groupe invariant mais non maximal de G_{s_2} . Les deux groupes C et G'_{s_2} sont des sous-groupes de A . Tout sous-groupe de C ou de G'_{s_2} est un sous-groupe cyclique invariant de G_{s_2} et inversement tout sous-groupe cyclique invariant de G_{s_2} est un sous-groupe de C ou de G'_{s_2} . D'après ce qui précède, tout sous-groupe invariant non cyclique de G_{s_2} est un groupe fondamental de rang 2 ou de rang 3. A^* est le seul sous-groupe invariant maximal connu de rang 3 de G_{s_2} . Les sous-groupes invariants fondamentaux de rang 2 de G_{s_2} forment un ensemble dénombrable. Les critères suivants permettent de juger dans quel cas deux éléments donnés de G_{s_2} engendrent un sous-groupe invariant non cyclique de G_{s_2} .

1° Pour que les deux transformations paires

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 1+2j \end{pmatrix}_2, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2i' & 1+2j' \end{pmatrix}_2 \quad \text{telles que} \quad \Delta = \begin{vmatrix} i & i' \\ j & j' \end{vmatrix} \neq 0$$

engendrent un sous-groupe invariant de G_{s_2} , il faut et il suffit que chacun des trois nombres $i^2 - j^2$, $i'^2 - j'^2$ et $jj' - ii'$ soit un multiple entier de Δ .

2° Pour qu'un élément pair

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 1+2j \end{pmatrix}_2$$

et un élément impair d'ordre infini

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+2i' & 2j' \end{pmatrix}_2$$

$i, j, i', j' \in \mathbb{Z}$, $i' + j' \neq 0$, engendrent un sous-groupe invariant de G_{s_2} , il faut et il suffit soit que $i - j = \pm 1$ soit que $i - j = \pm 2$ et alors que $(i+j)/d$ soit pair et $(i' + j')/d$ soit impair, d désignant le p.g.c.d. de $i+j$ et de $i' + j'$.

3° Pour que les deux transformations

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2i & 1+2j \end{pmatrix}_2, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+2i' & -2i' \end{pmatrix}_2$$

dont la première est paire et la seconde impaire du second ordre, engendrent un sous-groupe invariant de G_{s_2} , il faut et il suffit que soit $i+j=0$, $i = \pm 1$, $j = \mp 1$ ou bien $i+j \neq 0$ et alors $i-j = \mp 1$.

4° Pour que deux transformations impaires d'ordre infini chacune

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+2i & 2j \end{pmatrix}_2, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+2i' & 2j' \end{pmatrix}_2$$

$i, j, i', j' \in \mathbb{Z}$, $i+j \neq 0$, $i'+j' \neq 0$, engendrent un sous-groupe invariant de G_{s_2} il faut et il suffit que $j-i = j'-i' \pm \varepsilon$ où ε prend l'une des valeurs 1 ou 2, et que $(i+j)/d$ et $(i'+j')/d$ soient tous deux impairs, si $\varepsilon = 2$, d désignant le p.g.c.d. des deux nombres $i+j$ et $i'+j'$.

5° Pour que deux éléments impairs

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+2i & 2j \end{pmatrix}_2, \quad i+j \neq 0, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+2i' & -2i' \end{pmatrix}_2$$

dont le premier est d'ordre infini et le deuxième, du second ordre, engendrent un sous-groupe invariant de G_{s_2} , il faut et il suffit que $j = i - 2i' \pm 1$ alors que i et i' sont des entiers rationnels quelconques.

6° Pour que deux éléments impairs du second ordre chacun:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+2i & -2i \end{pmatrix}_2, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+2i' & -2i' \end{pmatrix}_2$$

engendrent un sous-groupe invariant de G_{s_2} , il faut et il suffit que $i = i' \pm 1$.

Pour qu'un sous-groupe G de G_{s_2} qui contient au moins un élément impair soit invariant, il faut et il suffit que l'élément

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1-2 \end{pmatrix}_2$$

générateur du groupe G'_{s_2} , fasse partie de G .

Tout élément du centre de G_{s_2} engendre, avec tout élément du groupe commutateur G'_{s_2} , un sous-groupe invariant de G_{s_2} .

Sophie Piccard (Séminaire de Géométrie, Université de Neuchâtel):

II. La P-symétrie

Un groupe multiplicatif G est dit P-symétrique s'il possède un ensemble – dit P-symétrique – $A = \{a_i\}$, $i \in I$, de générateurs, tels que quelle que soit la relation $f(a_1, a_2, \dots, a_k) = g(a_1, a_2, \dots, a_k)$ reliant entre eux un nombre fini $k \geq 1$ d'éléments de A et quels que soient k éléments distincts $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ de A , on a également la relation $f(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}) = g(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$. Une composition finie $h(a_1, a_2, \dots, a_k)$ d'éléments de A est dite

P-symétrique si, quels que soient k éléments distincts $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ de A , on a l'égalité $h(a_1, a_2, \dots, a_k) = h(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$. Une composition P-symétrique d'éléments de A représente un élément de G dit P-symétrique relativement à A . L'ensemble des éléments P-symétriques de G forme un sous-groupe de G . Ce sous-groupe peut être invariant, mais il ne l'est pas nécessairement. Quel que soit l'entier $n \geq 2$, le groupe symétrique \mathfrak{S}_n de degré n est P-symétrique. L'ensemble $A = \{(1,2), (1,3), \dots, (1,n)\}$ est un ensemble P-symétrique de générateurs de \mathfrak{S}_n . Quel que soit l'entier $n \geq 3$, le groupe \mathfrak{S}_n possède, comme on sait, des couples de générateurs appelés bases de \mathfrak{S}_n . Le couple $(1,2), (1,3)$ est une base P-symétrique de \mathfrak{S}_3 . 1 et $(2,3)$ sont les deux éléments P-symétriques de \mathfrak{S}_3 dans cette base. Les deux éléments $a = (1,2,3,4)$, $b = (1,3,2,4)$ constituent une base P-symétrique de \mathfrak{S}_4 . Il y a quatre éléments P-symétriques: 1 , $(1,4)$, $(2,3)$ et $(1,4)(2,3)$ dans la base considérée. La base $(1,2,3,4), (1,3,4,2)$ de \mathfrak{S}_4 est également P-symétrique et dans cette base les éléments P-symétriques de \mathfrak{S}_4 sont 1 , $(1,2)$, $(3,4)$ et $(1,2)(3,4)$, ce qui montre que le sous-groupe des éléments P-symétriques varie d'une base P-symétrique à l'autre. Le couple $(1,2,3,4), (2,3,4,5)$ constitue une base P-symétrique du groupe \mathfrak{S}_5 et le sous-groupe des éléments P-symétriques de \mathfrak{S}_5 relatif à cette base est d'ordre 12, il est engendré par les deux éléments $(1,5)(2,3,4)$ et $(2,3)$. Parmi les bases P-symétriques du groupe \mathfrak{S}_6 signalons les suivantes: $(1,2,3,4,5,6)$, $(1,4,3,2,6,5)$; $(1,2,3,4,5,6)$, $(1,2,6,5,4,3)$; $(1,2,3,4,5,6)$, $(1,3,2,6,5,4)$; $(1,2,3)(4,5)$, $(1,6)(2,4,3)$; $(1,2,3,4)$, $(1,3,5,6)$. Quel que soit l'entier $n \geq 3$, le groupe \mathfrak{S}_n possède des bases P-symétriques. Le groupe d'ordre 36 engendré par les deux substitutions $(1,2)(4,5,6)$ et $(1,2,3)(4,5)$ est P-symétrique et il possède six P-éléments relatifs à cette base, savoir 1 , $(1,2)(4,5)$, $(1,3)(4,6)$, $(2,3)(5,6)$, $(1,2,3)(4,5,6)$ et $(1,3,2)(4,6,5)$. Le sous-groupe formé par ces éléments est engendré par les deux éléments $(1,2,3)(4,5,6)$, $(1,2)(4,5)$ et il n'est pas invariant. Tout groupe abélien fini ou dénombrable de transformations de l'ensemble Z des entiers rationnels engendré par un ensemble de cycles du même ordre, disjoints deux à deux, est P-symétrique et les cycles qui l'engendrent forment un ensemble P-symétrique de générateurs du groupe abélien en question. Tout groupe libre est P-symétrique et tout ensemble de générateurs libres d'un groupe libre constitue un ensemble P-symétrique de générateurs de ce groupe. Les éléments d'un ensemble P-symétrique de générateurs d'un groupe P-symétrique sont nécessairement tous du même ordre. Si deux éléments d'un tel ensemble de générateurs sont commutables, tout couple d'éléments de cet ensemble de générateurs est commutable et le groupe est abélien. Quel que soit l'entier $n \geq 3$, il existe un groupe P-symétrique de substitutions de degré $2n$ et d'ordre $(n!)^2$ engendré par un ensemble P-symétrique A de deux éléments, dont le sous-groupe des éléments P-symétriques par rapport à A est d'ordre $n!$ et qui n'est pas invariant. Tel est, par exemple, le groupe G engendré par les deux éléments $(1,2, \dots, n)(n+1, \dots, 2n-1)$ et $(1,2, \dots, n-1)(n+1, \dots, 2n)$. G est le produit direct du groupe symétrique d'ordre $n!$ engendré par les deux éléments $(1,2, \dots, n)$ et $(1,2, \dots, n-1)$ et du groupe symétrique d'ordre $n!$

engendré par les deux éléments $(n+1, \dots, 2n)$, $(n+1, n+2, \dots, 2n-1)$. Le sous-groupe des P-éléments relatifs à cette base de G est engendré par les deux éléments $(1, 2, \dots, n)(n+1, n+2, \dots, 2n)$ et $(1, 2, \dots, n-1)(n+1, n+2, \dots, 2n-1)$. Ce sous-groupe n'est pas invariant.

On dit qu'un groupe multiplicatif G est un P-groupe lorsqu'il possède au moins un ensemble de générateurs – dits P-générateurs – liés par un ensemble de relations possédant toutes une propriété commune, appelée P-propriété. On connaît à ce jour une trentaine de P-propriétés non triviales intéressantes à chacune desquelles correspond une vaste classe de P-groupes. A chaque P-propriété correspond un P-caractère dont jouissent certains éléments du P-groupe appelés P-éléments. Pour toutes les P-propriétés connues à ce jour, l'ensemble des P-éléments constitue un sous-groupe du P-groupe. On connaît nombre de P-groupes dont le sous-groupe de tous les P-éléments est invariant. La découverte des groupes P-symétriques a permis de prouver qu'il existe des P-groupes dont le sous-groupe formé de tous les P-éléments n'est pas invariant.

Lorsqu'un groupe multiplicatif G est engendré par un ensemble fini $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ d'éléments, on peut définir la P-symétrie de la façon suivante: G est un groupe P-symétrique et A est un ensemble P-symétrique de générateurs de G si quelle que soit la permutation $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ des éléments a_1, a_2, \dots, a_k de A et quelle que soit la relation (triviale ou non triviale) $f(a_1, a_2, \dots, a_k) = g(a_1, a_2, \dots, a_k)$ entre ces éléments, on a également la relation $f(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}) = g(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ qui s'obtient de la précédente en remplaçant l'élément a_j par a_{i_j} , quel que soit $j = 1, \dots, k$.

12. U. Schneider (Zürich): Quadratische Räume mit kleiner orthogonaler Gruppe

13. F. Sigrist (Neuchâtel): Une curiosité arithmétique dans la topologie des variétés de Stiefel

Die hier nicht publizierten Beiträge erscheinen in den Helvetica Physica Acta oder in der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik.