Sektion für Mathematik

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Samstag, 4. Oktober 1969

Präsident: Prof. Dr. W. NEF, Sidlerstrasse 5, 3000 Bern
Sekretär: Prof. Dr. E. SPECKER, Sekretariat 46d, ETH, 8032 Zürich

1. C. PORTENIER (Neuchâtel) – *Espaces de Riesz et espaces de fonctions*

2. Frl. C. BANDLE (Zürich) – *Über eine isoperimetrische Ungleichung von Nehari*

3. Mlle S. PICCARD (Neuchâtel) – *Quelques résultats de la théorie des groupes*

1. *Les groupes quasi libres modulis N.* Soit $N=\{n_i\}$, $i\in I$, un ensemble donné d'entiers rationnels, pas nécessairement distincts, dont un et un seul correspond à tout élément i d'un ensemble donné I d'indices et dont chacun est ≥ 2. Soit d'autre part, G un groupe multiplicatif engendré par un ensemble $A=\{a_i\}$, $i\in I$, de générateurs liés par des relations dont chacune est de degré $\equiv 0(\mathrm{mod}\, n_i)$ par rapport à a_i, $\forall i\in I$. Cette propriété, dont jouissent *toutes* les relations entre éléments de A, porte le nom de quasi trivialité modulis N. Un groupe multiplicatif G est dit quasi libre modulis N s'il possède au moins un ensemble de générateurs – dits générateurs quasi libres modulis N – liés uniquement par des relations quasi triviales modulis N. Les groupes quasi libres modulis N forment une vaste classe de P-groupes qui se prête à une élégante théorie générale et qui conduit à d'intéressantes généralisations des notions fondamentales de la théorie générale des groupes. Relevons les propriétés suivantes de ces groupes: Tout ensemble de générateurs quasi libres modulis N d'un groupe quasi libre modulis N est irréductible au sens large (aucun de ses éléments ne peut être obtenu par composition finie des autres); pour tout élément a d'un groupe quasi libre modulis N il existe un entier fixe v_i de la suite $0, 1,\ldots, n_i-1$, tel que toute composition finie d'éléments d'un ensemble donné $A=\{a_i\}$, $i\in I$, de générateurs quasi libres modulis N de G est de degré $\equiv v_i(\mathrm{mod}\, n_i)$ par rapport à a_i, $\forall i\in I$. v_i est appelé le degré modulo n_i de a par rapport à a_i. A tout groupe quasi libre modulis N est associé un groupe abélien dont les éléments sont des classes d'équivalence d'éléments de G et qui jouit de cette propriété que $\forall$ le sous-groupe γ de Γ la réunion de toutes les classes qui sont des éléments de γ est un sous-groupe de G. Tout groupe quasi libre modulis N possède deux treillis de sous-groupes spéciaux appelés les uns symétriques modulis N, les autres invariants modulis N et dont nous donnons la

définition ailleurs (voir *Journal de Crelle* 1969). Tout groupe libre G dont $A=\{a_i\}$, $i\in I$, est un ensemble de générateurs libres est aussi quasi libre modulis $N=\{n_i\}$, $i\in I$, $\forall$ les entiers rationnels n_i dont chacun est $\geqq 2$.

2. *Un théorème d'existence.* Il existe un groupe dénombrable de transformations des entiers rationnels dont tout ensemble de générateurs est dénombrable et réductible au sens strict (on peut remplacer dans tout ensemble de générateurs de ce groupe certains éléments, en nombre fini >1, par un nombre inférieur d'éléments de G et obtenir ainsi à nouveau un ensemble de générateurs du groupe G). L'idée de la démonstration de ce théorème d'existence est la suivante. On sait que le groupe additif G_0 des rationnels ne possède que des ensembles dénombrables réductibles au sens strict de générateurs. Or ce groupe est dénombrable. Il est donc possible de former une suite $\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots$ de l'ensemble de ses éléments. Faisons correspondre à tout élément a_j de G_0 la transformation t_j de l'ensemble des éléments de G_0 qui fait passer de tout élément a_i de G_0 à l'élément $a_j a_i$. Cette transformation est régulière du même ordre que l'élément a_i de G_0. Soit T le groupe dénombrable dont les éléments sont les transformations t_j, $j\in\{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$, muni d'une structure de groupe par la loi usuelle de composition des transformations. On voit sans peine que les groupes G et T sont isomorphes. $\forall$ l'élément fixe a_j de G_0 et $\forall$ l'élément a_i de G_0, $a_j a_i = a_{i_j}$ est un élément bien défini de G et l'ensemble $\{i_j\}$ des indices i_j coïncide avec l'ensemble Z des entiers rationnels. Faisons correspondre à toute transformation t_j de T la transformation $\mathfrak{t}_j$ de Z qui fait passer de tout entier i à l'entier i_j. L'ensemble $\mathfrak{T}$ des transformations $\mathfrak{t}_j$ muni d'une structure de groupe par la loi usuelle de composition des transformations est un groupe isomorphe à T, donc aussi à G_0, puisque la relation d'isomorphisme est transtitive. Donc à tout ensemble de générateurs de G_0 correspond un ensemble de générateurs de $\mathfrak{T}$ et vice versa et comme tout ensemble de générateurs de G_0 est réductible au sens strict il en est de même de tout ensemble de générateurs de $\mathfrak{T}$, d'où découle le théorème d'existence énoncé.

3. *Les groupes périodiques de transformation des entiers.* On sait que tout groupe d'ordre fini peut être représenté par un groupe régulier de substitutions des entiers $1, 2, \ldots n$. De façon analogue, tout groupe infini dénombrable peut être représenté par un groupe régulier de transformations des entiers rationnels. On peut donc traduire tout problème de la théorie générale des groupes dénombrables en termes de la théorie des groupes dénombrables de transformations des entiers rationnels. Parmi ces derniers groupes, une place à part tiennent les groupes périodiques de transformations des entiers rationnels. Soit n un entier rationnel ≥ 2 fixe, donné, et soit t une transformation de l'ensemble Z des entiers rationnels qui fait passer de tout entier i de Z à son image $t(i)$. On dit que t est périodique, de période n, si $\forall$ les entiers i et j de Z, on a $t(i+jn)=t(i)$

$+jn$. Toute transformation des entiers peut être représentée par l'ensemble de ses cycles qui peuvent être d'ordre fini ou infini (dénombrable), ensemble qui est fini ou dénombrable. Soit t une transformation périodique des entiers, de période n. Un cycle d'ordre fini de t est alors d'ordre au plus égal à n et tous les éléments d'un tel cycle ont des restes différents modulo n. Si t contient un cycle d'ordre fini $(c_1, \ldots, c_k)$, elle en contient une infinité, notamment elle contient alors aussi les cycles $(c_1+jn, \ldots, c_k+jn)$, $\forall j \in Z$. Soit à présent $C=(\ldots, c_{-1}, c_0, c_1, \ldots)$ un cycle d'ordre infini de t. Soit c_i un élément quelconque de ce cycle et soit j le plus petit entier $>i$, tel que $c_i \equiv c_j \pmod{n}$. Il existe un entier $l \in Z$, tel que $c_j = c_i + ln$. Alors $c_{j+1} = c_{i+1} + ln$, $c_{j+2} = c_{i+2} + ln, \ldots$. Le nombre ln est appelé la période du cycle envisagé. Si $|l| > 1$, t contient aussi les cycles $(\ldots, c_{-1}+mn, c_0+mn, c_i+mn, \ldots)$, $m=1, 2, \ldots, |l|-1$. Une transformation périodique t des entiers rationnels est entièrement définie par la donnée de la période n et des transformés par t de n entiers consécutifs quelconques, par exemple des nombres $a_i = t(i)$, $i=1, 2, \ldots n$. On désigne cette transformation par le symbole $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}_n$. On dit qu'un groupe T de transformations des entiers rationnels est périodique, de période n, si toutes les transformations qui le composent sont périodiques, de même période n. On dit que T est saturé s'il comprend toutes les transformations périodiques des entiers rationnels de période n. Un tel groupe est fondamental. Il possède des couples d'éléments générateurs, si $n=2$, et des triplets d'éléments générateurs, si $n>2$. Les méthodes d'investigation établies dans la théorie des substitutions sont applicables à la résolution de nombreux problèmes relatifs aux groupes périodiques de transformations des entiers rationnels.

4. M. GUT (Zürich) – *Erweiterungskörper von Primzahlgrad mit durch diese Primzahl teilbarer Klassenzahl* (wird in den Acta Arithmetica erscheinen)