Der Begriff der Wahrscheinlichkeit und seine Rolle in den Naturwissenschaften

Symposium vom 23. August 1952, organisiert durch die Schweizerische Gesellschaft zur Pflege der Logik und Philosophie der Wissenschaften.

Vorsitz: B. Eckmann,
Einführungsreferate: B. L. van der Waerden, W. Pauli, S. Rosin.

Der Vorsitzende umschreibt einleitend den Charakter der Symposien, wie sie seit einigen Jahren im Rahmen der Jahresversammlung der SNG stattfinden und in welchen Vertreter verschiedener Fachgebiete sich zu gemeinsamer Aussprache treffen. In den zur Verfügung stehenden zwei Stunden kann es sich natürlich nur darum handeln, sich gegenseitig über die Stellungnahme zum Thema zu orientieren, zu welcher man auf Grund seiner Facherfahrungen gelangt ist, und Anregungen zu empfangen, die im begrenzten Forschungsbereich kaum vorhanden wären. Aber welches auch der Erfolg eines solchen Gesprächs sei, so ist es doch sicher für die wissenschaftliche Forschung und ihre Auswirkungen unerläßlich, die Gesichtspunkte anderer Gebiete und die Grenzen ihrer Erkenntnisse kennen zu lernen, um sowohl einseitige Anschauungen wie falsche Verallgemeinerungen zu vermeiden.

Im vorliegenden Thema wird ein Problemkreis berührt, welcher die Frage der Anwendung mathematischer Begriffsbildungen auf Naturwissenschaften und andere Gebiete mit allen ihren methodischen und erkenntnistheoretischen Hintergründen in ganz besonderer Weise in sich schließt. Es mutet erstaunlich an, daß trotz der ungeheuren Entwicklung der Wahrscheinlichkeitslehre über deren Grundlegung – oberflächlich gesagt: über die Definition der Wahrscheinlichkeit – keine Einigkeit herrscht; hier dürfte wohl nur eine axiomatische Klärung zugleich mit einer Berücksichtigung des bei den Anwendungen einzuschlagenden methodischen Vorgehens weiterführen. Das erkenntnistheoretische Problem «Wahrscheinlichkeit» wird dadurch noch nicht gelöst; es kann vielmehr erst dann in angemessener Weise gestellt werden.

Referat von B. L. van der Waerden:

Die Tendenz in der neueren Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der mathematischen Statistik geht dahin, alle unnötigen Voraussetzungen zu vermeiden und sich auf die Voraussetzungen zu beschränken, ohne die man überhaupt nicht auskommt.

1. Grundlagenfragen

Zunächst ist diese Tendenz klar in der *Grundlagendiskussion.* Früher hat man immer nach Definitionen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes gesucht (Laplace, Mises). Jetzt macht man sich klar, daß eine solche Definition nicht nötig ist, weder für die mathematische Theorie noch für die Anwendung. Für die mathematische Theorie kommt man mit wenigen Axiomen aus, wie sie Reichenbach und Kolmogoroff aufgestellt haben. Für die Anwendung genügen Anwendungspostulate, von denen das wichtigste lautet: *Wenn ein Ereignis eine äußerst kleine Wahrscheinlichkeit hat, so rechnen wir nicht damit, daß es eintritt.*

Für nähere Ausführung siehe van der Waerden, Der Begriff Wahrscheinlichkeit, Studium Generale 4 (1951), S. 65–68.

2. Vertrauensgrenzen

Dasselbe beobachtet man in der Diskussion über die Regel von Bayes. Wenn eine Häufigkeit eines Ereignisses

$$h = \frac{x}{n}$$

beobachtet worden ist (n = Anzahl der beobachteten Fälle, x = Anzahl der Fälle, in denen das Ereignis eingetreten ist), und man will daraus einen Schluß ziehen über die unbekannte Wahrscheinlichkeit p, so hat man früher p als eine vom Zufall abhängige Größe betrachtet, die eine Apriori-Verteilung besitzt. Daraus hat man nach der Regel von Bayes eine Aposteriori-Verteilung hergeleitet. Um diese anwenden zu können, muß man die Apriori-Verteilung kennen. Meistens kennt man sie nicht und nimmt sie willkürlich an, z. B. gleichverteilt. Nichts berechtigt zu dieser Annahme; sie ist bei den Anwendungen sehr häufig nicht erfüllt.

Statt dessen stellt man heute, nach Neyman, E. S. Pearson und Clopper, *Vertrauensgrenzen* für p auf, die von jeglicher Annahme über Apriori-Verteilungen unabhängig sind. Für große n kann man etwa so schließen. Nicht p, sondern h hängt vom Zufall ab. Die Streuung von h ist

$$\sigma = \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}$$

Die Differenz $h - p$ hat nach Wahrscheinlichkeit nur die Größenordnung σ, d. h. Werte größer als $3\,\sigma$ oder $4\,\sigma$ sind äußerst unwahrscheinlich. Nehmen wir etwa 2σ als Grenze an, so ist die Irrtumswahrscheinlichkeit 1%. Wir können also mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% erwarten, daß

$$(h-p)^2 \leqq \frac{4\,p\,(1-p)}{n}$$

ausfällt. Ist h beobachtet, so kann man daraus zwei Grenzen für p herleiten, die rechts und links von h liegen. Nehmen wir die h-Werte, so wie sie der Zufall uns ergibt, und wenden immer diese Regel an, so werden wir uns in 100 Fällen durchschnittlich nur einmal irren.

In der Biologie, z. B. bei der Aufstellung von Wirkungskurven für Wirkstoffe, kann man die Vertrauensgrenzen sehr gut gebrauchen. Ebenso in der Physik bei der Messung von Höhenstrahlen. Die Regel von Bayes ist ganz unnötig geworden.

3. Anordnungstests

Bis vor kurzem machte man bei den meisten Stichprobentests die Annahme, daß die gemessenen, vom Zufall abhängigen Größen (Blutdruck z. B.) normal verteilt sind. Auf dieser Annahme beruht die Gausssche Methode der kleinsten Quadrate, ebenso die Theorie der Regression und Korrelation, Student's Test usw. Diese Annahme trifft aber in sehr vielen Fällen nicht annähernd zu. In anderen Fällen weiß man nicht, ob sie mit genügender Annäherung zutrifft.

Daher hat man neuerdings Tests entwickelt, die nur von der Rangordnung der Beobachtungen abhängen. Solche Tests sind invariant gegenüber stetigen eineindeutigen Transformationen der x-Achse und setzen nichts über die Verteilungsfunktion voraus. Sehr alt ist die Rangkorrelation, die von Spearman in die Psychologie eingeführt wurde. In neuerer Zeit hat man für das Zweistichprobenproblem Ranking Tests aufgestellt, die anstelle von Student's Test benutzt werden können. Wilcoxon[1] hat vorgeschlagen, die Anzahl der Inversionen zu zählen, die in der Rangordnung der gemessenen $x_1, \ldots, x_g$ und $y_1, \ldots, y_h$ auftreten. Eine Inversion tritt jedesmal dann ein, wenn ein x größer ist als ein y. Verschiedene andere Rangtests sind in neuester Zeit vorgeschlagen worden[2].

Referat von W. Pauli:

Der mathematische Wahrscheinlichkeitsbegriff ist entstanden durch das Bestreben, die einmalige subjektive Erwartung möglichst zu objektivieren. Um dies zu erreichen, muß diese ersetzt werden durch die objektive durchschnittliche Häufigkeit eines Ereignisses bei Wiederholung unter gleichen Bedingungen. Man nimmt an, daß die Wahrscheinlichkeit

---

[1] F. Wilcoxon, Biometrics Bull. 1 (1945), S. 80–83. Siehe auch Mann und Whitney, Ann. Math. Stat. 18 (1947), S. 50–60, sowie D. van Dantzig, Proc. Akad. Amsterdam, Sciences A 54 (1951), S. 1–8.

[2] J. Hemelryk, Proc. Akad. Amsterdam, Sciences 53 (1950), S. 945 und 1186.

eines Ereignisses A sich bei großer Zahl der Wiederholungen nur wenig vom Quotienten m/n unterscheidet, worin n die Zahl der Wiederholungen, m die Zahl der Eintritte von A ist. Wir begegnen hier also dem Motiv der *einen* zu objektivierenden Erwartung und der *vielen* Ereignisse.

Eine nähere Analyse dieses Sachverhaltes ist nicht einfach, insbesondere gibt der Sprung von der logisch-mathematischen Formulierung zur Empirie zu tiefliegenden erkenntnistheoretischen Problemen Anlaß. Ich glaube, jeder Physiker ist froh, über eine einwandfreie mathematische Axiomatik verfügen zu können, da sie ihm eine saubere Trennung von mathematisch logischen Problemen einerseits, von physikalisch-naturphilosophischen Problemen andererseits erlaubt. Mit meinem Kollegen VAN DER WAERDEN bin ich darüber einig, daß die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung keine Zurückführung des Begriffes Wahrscheinlichkeit auf andere Begriffe, d. h. keine Definition des Begriffes Wahrscheinlichkeit enthalten. Der Begriff «Wahrscheinlichkeit» ist aus dem Axiomensystem, den Grundregeln zu dessen richtiger Handhabung, nicht eliminierbar, d. h. er bleibt undefiniert.

Die Zeit gestattet mir nicht, ein Axiomensystem hier explizite anzugeben. Die englische Schule (KEYNES, JEFFREYS, BROAD) bevorzugt die *bedingte* Wahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeit von p bei gegebenem k)[1]. Der Mathematiker KOLMOGOROFF[2] formuliert die Axiome mengentheoretisch, was dem Physiker vielleicht ferner liegt.

Die wichtigsten Axiome sind das konjunktive und das disjunktive von der Addition und Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten. Häufigkeiten der Elemente von endlichen Klassen erfüllen jedenfalls von selber die Axiome[3].

Die wichtigste logische Konsequenz aus den Axiomen ist das Theorem von BERNOULLI, auch Gesetz der großen Zahlen genannt. Seine Voraussetzung ist: Bei jeder einer Anzahl von Gelegenheiten sei die Chance für das Eintreten eines gewissen Ereignisses p. Die Aussage des Theorems in der Sprache der Mathematik ist diese: Zu «allen» Pärchen positiver Zahlen (ε, δ) «gibt es stets» eine große ganze Zahl N mit folgender Eigenschaft: «Die Chance, daß der Bruchteil der Anzahl der Gelegenheiten, bei denen das Ereignis eintritt, von N Gelegenheiten aufwärts, jemals um mehr als ε von p abweichen wird, ist kleiner als δ.»

Es ist zu beachten, daß diese Aussage keine Limesaussage ist. Das wäre sie nur dann, wenn δ durch 0 ersetzt würde, was aber unerlaubt ist. Ausdrücklich fordert die Wahrscheinlichkeitsrechnung das Vorhandensein einer wenn auch sehr kleinen, doch nicht verschwindenden Wahrscheinlichkeit für ein späteres Auftreten einer Abweichung größer als ε der empirischen Häufigkeit von der mathematischen Chance p.

---

[1] Vgl. HAROLD JEFFREYS, Theory of Probability, 2nd edition, Oxford 1948.

[2] A. KOLMOGOROFF, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Erg. d. Math. *2*, Heft 3 (1933).

[3] Sei B eine gegebene endliche Klasse und A eine andere Klasse, bilde den Quotienten aus der Zahl derjenigen B's, die A's sind, dividiert durch die Gesamtzahl der B's.

So wie es rein mathematisch vorliegt, ist das BERNOULLIsche Theorem daher noch nicht einer empirischen Prüfung zugänglich. Hierzu muß an irgendeiner Stelle eine Regel für die praktische Verhaltungsweise des Menschen oder spezieller des Naturforschers hinzugenommen werden, die auch dem subjektiven Faktor Rechnung trägt, nämlich: Auch die einmalige Realisierung eines sehr unwahrscheinlichen Ereignisses wird von einem gewissen Punkt an als praktisch unmöglich angesehen. Theoretisch mag zugestanden werden, daß hierbei eine von Null verschiedene Chance eines Irrtums weiterbesteht, aber praktisch werden auf diese Weise Entscheidungen getroffen, insbesondere auch die Entscheidungen über die empirische Richtigkeit der statistischen Aussagen physikalischer oder naturwissenschaftlicher Theorien. Auch darin bin ich mit Herrn VAN DER WAERDEN einig, daß man bis zu dieser prinzipiellen Grenze und nicht weiter mit der Durchführung des ursprünglichen Programmes – der rationalen Objektivierung der einmaligen subjektiven Erwartung – gelangen kann.

Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Physik ist logisch vereinbar mit einer deterministischen Form aller Naturgesetze. Dies ist z. B. besonders deutlich geworden bei der thermodynamischen Wahrscheinlichkeit der statistischen Wärmetheorie, die auf der ungenauen Kenntnis des mikroskopischen Anfangszustandes unter den Bedingungen der Anwendbarkeit des Temperaturbegriffes beruht. Hierauf will ich nicht weiter eintreten, sondern sogleich hervorheben, daß die Wellen- oder Quantenmechanik die Existenz *primärer Wahrscheinlichkeiten* in den Naturgesetzen annimmt, die sich sonach nicht wie z. B. die thermodynamischen Wahrscheinlichkeiten durch Hilfsannahmen auf deterministische Naturgesetze zurückführen lassen. Diese umwälzende Folgerung hält die überwiegende Mehrheit der modernen theoretischen Physiker – allen voran HEISENBERG und BOHR, denen auch ich mich angeschlossen habe – für unwiderruflich. An Opposition dagegen, die allerdings unfruchtbar geblieben ist, hat es nie ganz gefehlt – ich nenne hier die Namen EINSTEIN und SCHRÖDINGER.

Mathematisch löst die neue Form der quantenmechanischen Naturgesetze auf sehr elegante Weise die Frage nach dem Maß für die Wahrscheinlichkeit: Diese ist das Absolutquadrat einer komplexen Zahl, der Wahrscheinlichkeitsamplitude, die einfacheren Gesetzen genügt als die Wahrscheinlichkeiten selbst. Diese einfacheren Gesetze für die Amplituden geben diesen die Bedeutung von linear superponierbaren Vektoren in einem HILBERTschen Raum, der definitionsgemäß eine positiv definite quadratische Form als Maßbestimmung in sich trägt.

Erkenntnistheoretisch beruht der von der Quantenmechanik postulierte indeterministische Charakter der Naturgesetze auf der freien Wahl des Experimentators zwischen einander ausschließenden Versuchsanordnungen. Jede dieser Anordnungen enthält eine für sie charakteristische unbestimmbare Wechselwirkung zwischen Meßinstrument und beobachtetem System und hat neben dem Gewinn gewisser Kenntnisse über dieses System unvermeidbar und unwiderruflich den Verlust anderer Kenntnisse zur Folge. Diese Situation wurde von Bohr als Komplementarität bezeichnet.

Es ist nicht meine Aufgabe, heute näher auf diese grundsätzlichen Einsichten einzugehen. Ich möchte vielmehr mit dem Hinweis darauf schließen, wie bedeutungsvoll es ist, daß der mathematische Wahrscheinlichkeitsbegriff sich auch dieser neuen Situation gegenüber bewährt hat: Es scheint diesem eine Wirklichkeit in der Natur zutiefst zu entsprechen, indem eben seine Anwendung in der neueren Physik zu einer rationalen Verallgemeinerung der klassisch-deterministischen Naturerklärung geführt hat.

Referat von S. Rosin:

Begriff

Wenn man in der modernen Mathematik ohne eine Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffes auskommt und dem Praktiker lediglich einige Anwendungsregeln gibt, nach denen er sich richten soll, so kann das für uns Biologen nicht bedeuten, daß wir uns unter Wahrscheinlichkeit nichts vorzustellen haben. Wir brauchen eine Begriffsumschreibung; wir müssen wissen, was mit Wahrscheinlichkeit gemeint ist, sonst sind wir in vielen Fällen nicht imstande, die richtigen Schlüsse zu ziehen.

Was verstehen wir Biologen unter Wahrscheinlichkeit? Der Wahrscheinlichkeitsbegriff wird auf Einzelereignisse angewandt. Wir sagen z. B.: Jenes Kind ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/2$ farbenblind. Solche Aussagen sind in der Biologie, besonders aber in der Genetik häufig. Wir haben uns schon sehr daran gewöhnt, aber die diesem Geschehen zugrunde liegenden Ereignisse haben doch etwas sehr Beunruhigendes an sich. Wenn wir von einem Einzelereignis nur so viel voraussagen können, daß es mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit stattfinden wird, dann ist das nicht viel mehr als die Aussage, daß es eben vielleicht stattfinden wird, vielleicht auch nicht und ein Zugeständnis dafür, daß wir die Kausalkette, die zu diesem Entweder-Oder-Ereignis führt, nicht genau kennen. Wir denken aber dabei keineswegs an eine prinzipielle Unbestimmtheit oder Wahlfreiheit, sondern sind der Meinung, daß es in der Kausalkette völlig unanalysierbare, unübersehbare Glieder gibt, kleinste begünstigende und hemmende Faktoren, die wir nicht erfassen können.

Dem Begriff der Wahrscheinlichkeit haftet also etwas Flackerndes an, und er ist, auf den Einzelfall angewandt, ziemlich nichtssagend, es sei denn, die angegebene Wahrscheinlichkeit liege nahe bei 0 oder 1, etwa unterhalb 1 % oder über 99 %. Wir erwarten dann das Ereignis eigentlich mit Sicherheit und fühlen uns vom Schicksal getroffen, wenn es nicht eintritt, oder wir sind überzeugt, daß unsere Voraussetzungen falsch waren. Mit dem abstrakten, unanschaulichen Begriff der Wahrscheinlichkeit eines Einzelereignisses können wir also nichts anfangen. Wir machen diesen Begriff anschaulich, indem wir ihn auf eine Vielzahl ähnlicher Fälle übertragen, etwa auf 100. Wenn die Einzelwahrscheinlichkeit $1/2$ war, erwarten wir auf 100 ähnliche Individuen etwa 50

Merkmalsträger, also eine Häufigkeit, etwas ganz Konkretes. Das Entweder-Oder ist in seiner krassen Form verschwunden und zeigt sich nur noch darin, daß wir nicht sagen können, welche 50 von den 100 das Merkmal tragen werden und daß es auch etwas mehr oder weniger als 50 sein können. Wir sprechen deshalb von einer mittleren Häufigkeit in der Meinung, daß wiederum bei vielen solchen Stichproben die jeweiligen Häufigkeiten um 50 als Mittelwert liegen.

Unsere Vorstellung vom Begriff der Wahrscheinlichkeit ist also eine Art statistische Limesvorstellung. So verstanden, ist der Wahrscheinlichkeitsbegriff anschaulich und praktisch, und wenn diese Vorstellung auch mathematisch unbrauchbar, weil nicht streng faßbar ist, so ist es doch eine Vorstellung, die uns hilft und – so hoffen wir wenigstens – nicht zu falschen Schlüssen führt.

Anwendungsgebiete

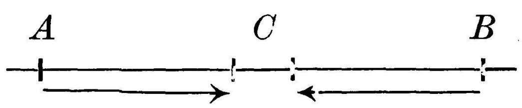
Die Hauptanwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes in der Biologie liegt darin, daß man bei beobachteten Häufigkeiten oder Meßwerten mit verschiedenen *Prüfverfahren* untersuchen kann, ob sie zu bestimmten Hypothesen in Widerspruch stehen oder nicht. Heute wird in zunehmendem Maße in der Biologie versucht, die Ergebnisse statistisch zu sichern. Viele haltlose Spekulationen und Deutungsversuche werden dadurch überflüssig. Die modernen Methoden bringen aber noch einen andern Vorteil mit sich: Das sogenannte «Gesetz der großen Zahl» hat lange Zeit zum Teil eine fatale Wirkung gehabt und hat sie immer noch, indem gerade bei den kritischen Leuten die Meinung vielfach vertreten wird, man könne bei streuenden Versuchen nur bei sehr großem Zahlenmaterial Aussagen machen. Diese Einstellung läuft in vielen Fällen auf ein vollständiges Verzichten heraus, weil oft eben nur kleine Zahlen erhältlich sind. Mit den heutigen Methoden kann man aber unter Umständen auch aus kleinem Material sichere Schlüsse ziehen.

Bei den Prüfverfahren unterläuft oft ein verhängnisvoller Fehler. Wenn man Versuchszahlen mit einer Hypothese vergleicht und feststellt, daß kein Widerspruch zur Hypothese besteht, glaubt man, die Hypothese sei damit bewiesen. Man ist sich oft nicht bewußt, daß man wohl eine Abweichung von der Hypothese statistisch sichern kann, daß man aber nicht ein Übereinstimmen mit der entsprechenden Sicherheit feststellen kann. – Dieser Sachverhalt sei an einem Beispiel aus der Genetik illustriert. Kreuzt man zwei reine Rassen, die sich in einem Merkmal unterscheiden $(AA \cdot aa)$, so erhält man Nachkommen von der Genform Aa. Wenn man wieder zwei solche Bastarde miteinander kreuzt, treten in der folgenden Generation die Großelterntypen im Verhältnis 3:1 wieder auf: $Aa \cdot Aa = AA, 2Aa, aa$. Wenn AA und Aa gleich aussehen, entsteht so das Verhältnis 3:1. Es ist dies theoretisch aus der Individualität der Gene, deren Lokalisation in den Chromosomen und aus dem Verhalten der Chromosomen bei der Bildung der Geschlechtszellen abzuleiten. Bei sogenannten Letalfaktoren ist nun z.B. AA nicht lebensfähig.

Die Kreuzung $Aa \cdot Aa$ führt dann zu (AA), $2Aa$, aa; also zum Verhältnis 2:1. Wenn man wissen möchte, ob A ein Letalfaktor ist oder nicht, muß man also nachsehen, ob die Nachkommen der Kreuzung $Aa \cdot Aa$ im Verhältnis 2:1 oder 3:1 aufspalten. Beispiel: Die beobachteten Häufigkeiten von 48 Nachkommen seien 34:14. Mit der Chi^2-Methode läßt sich leicht nachweisen, daß diese Zahlen nur als Zufallsabweichung von 2:1 angesehen werden können. Es kann sich also um einen Letalfaktor handeln. Der Schluß, daß wirklich ein Letalfaktor vorliegt, wäre aber sehr voreilig. Prüft man nämlich die andere Hypothese (3:1), so sieht man, daß die Zahlen auch zu diesem Verhältnis gerade so gut passen. Aus dieser Beobachtung kann man also für die beiden Hypothesen keine Schlüsse ziehen. Die Zahlen sind für diese Fragestellung zu klein.

An dem vorliegenden Beispiel kann ein zweites Anwendungsgebiet demonstriert werden. Es ist das für die Praxis sehr wichtige Gebiet der *Versuchsplanung*. Auf Grund der erwähnten Prüfmethoden kann man ausrechnen, wie viele Nachkommen aus solchen Kreuzungen nötig sind, um eine Entscheidung, ob 3:1 oder 2:1 vorliegt, treffen zu können. Sie beträgt etwa 640, wenn eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 % in Kauf genommen wird. Der nötige Umfang des Versuchs kann also hier, je nach dem gewünschten Sicherheitsgrad, genau vorbestimmt werden. In komplizierteren Fällen geht die Versuchsplanung darauf aus, nicht nur den Umfang des Versuchs, sondern die günstigste Versuchsanordnung zu ermitteln, die mit möglichst wenig Versuchen möglichst viel Erkenntnisse erwarten läßt.

Ein drittes Anwendungsgebiet besteht darin, auf Grund von Versuchszahlen einen Wert zu *schätzen*, der dem zugrunde liegenden unbekannten, wahren Wert möglichst nahe kommt. Als Beispiel diene die Lokalisation von Erbfaktoren. Die Gene sind kleine Teile der fadenförmigen Chromosomen. Sie zeigen eine lineare Anordnung. Bei der Reifung der Geschlechtszellen legen sich entsprechende Chromosomen aneinander und tauschen Stücke aus. Erbfaktoren, die zuvor im gleichen Chromosom gelegen waren, liegen nun in verschiedenen Chromosomen und werden auf verschiedene Nachkommen verteilt, weil jeder Nachkomme von diesen paarweisen Chromosomen immer nur eines erhält. Diesen Austauschvorgang nennt man Crossing-over. Je weiter zwei Gene voneinander entfernt sind, desto häufiger kommt Crossing-over zwischen ihnen vor. Die Häufigkeit des Crossing-over kann daher als Maß für den Abstand der Gene benützt werden. So entstehen die Chromosomenkarten, wo alle bekannten Erbfaktoren ihren bestimmten Platz einnehmen. Wenn nun ein neues Gen lokalisiert werden soll, muß die Crossing-over-Häufigkeit mit schon bekannten Genen durch geeignete Kreuzung festgestellt werden. A und B seien bekannt und nicht sehr weit voneinander entfernt. C liege dazwischen. Die Abstände $A - C$ und $C - B$



sollten zusammen $A - B$ geben, weil bei kurzen Stücken keine Doppel-Crossing-over stattfinden. Da es sich aber um Häufigkeiten handelt, denen gewisse Zufallsschwankungen anhaften, trifft das nie ganz zu. Von A aus kommt C an einen andern Ort zu liegen, als von B aus betrachtet. Die Frage ist nun folgende: Welcher Lokus von C paßt am besten zu den beiden unabhängigen Versuchen? Nach der Methode des «maximum likelihood» von R. A. FISHER muß derjenige Ort als der passendste angesehen werden, der mit der größten Wahrscheinlichkeit zugleich die beobachteten Austauschhäufigkeiten mit A und B liefert. Die sehr elegante Methode ist überall dort anzuwenden, wo aus verschiedenen unabhängigen Beobachtungshäufigkeiten der dazu am besten passende, wahre Wert geschätzt werden soll.

Ohne die Methoden des Prüfens, Planens und Schätzens, die uns die Mathematiker in die Hand geben, wären viele Aussagen der Biologen falsch, sehr ungenau oder unmöglich. Wir sind den Mathematikern, die uns hier helfen, daher sehr dankbar. Dem Biologen fallen bei dieser Arbeit die nicht immer leichten Aufgaben zu, erstens die sinnvollste Fragestellung herauszufinden, d. h. die Frage scharf zu formulieren, und zweitens die Resultate der statistischen Rechnungen richtig zu interpretieren.

Diskussion:

W. SCHERRER: Wenn man erklärt, man könne die Wahrscheinlichkeit nicht definieren, und trotzdem von Wahrscheinlichkeit spricht, können Mißverständnisse entstehen. Die Wahrscheinlichkeit als mathematischer Begriff kann und muß definiert werden.

Das die Gemüter beunruhigende Problem taucht erst auf, wenn man eine dieser Definition entsprechende Größe empirisch aufweisen will. Dann zeigt sich, daß man in jedem konkreten Falle aus einem überaus komplexen und nur intuitiv überschaubaren Wahrnehmungsbereich relativ wenige wohlbestimmte Merkmale herausgreift und gestützt auf dieselben «Ereignisse» definiert. Die nähere Betrachtung ergibt dann, daß eine auf diese Ereignisse gegründete Wahrscheinlichkeitsdefinition nur so weit exakt aufgewiesen werden kann, als es gelingt, den die Ereignisse tragenden *Rahmenbereich* exakt zu erfassen.

Zum Beispiel ist die Behauptung, der radioaktive Zerfall erfolge rein zufällig, irreführend, denn die Menge des noch nicht zerfallenen Stoffes nimmt nicht regellos, sondern um so genauer wie e^{-kt} ab, je größer die in Betracht gezogene Dauer ist. In diesem Gesetz ist t keine willkürliche Variable, sondern die empirisch maßgebende Zeit, und es ist durchaus sinnvoll zu fragen, ob es sich dabei um die Erdzeit, die NEWTONsche Systemzeit oder die durch die Quarzuhr gelieferte Zeit handelt. Analog, nur komplizierter, liegen die Verhältnisse in allen andern Fällen.

In diesem Zusammenhang kann man auch feststellen, daß ein gut Teil der Problematik der modernen Physik dadurch bedingt ist, daß der klassische Rahmenbereich (Euklidischer Raum, absolute Zeit) verlorengegangen ist und man sich nach einem neuen Rahmenbereich umsehen muß (Zeitraum der allgemeinen Relativitätstheorie oder eine noch tiefer greifende Modifikation ?).

B. Eckmann: Wenn in der mathematischen Theorie der Wahrscheinlichkeitsbegriff undefiniert bleibt, so liegt hierin nichts Anstößiges; es entspricht dies vielmehr dem durchaus üblichen und bewährten Vorgehen in der sogenannten axiomatischen Methode. Eine brauchbare Festlegung der Wahrscheinlichkeit erhält man nicht durch eine formale Scheindefinition, sondern indem man auf der einen Seite den mathematischen Apparat angemessen umschreibt und komplementär dazu die Vorschriften für seine Anwendung aufstellt.

M. Fierz: Im Anschluß an das Referat von Pauli sei nochmals darauf hingewiesen, daß es so aussieht, als ob dem Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Natur eine Realität entsprechen würde. Nehmen wir das ernst, so ergeben sich weitreichende philosophische Folgerungen. Die klassische Philosophie bis zu Hume hat zwar, insofern sie skeptisch war, zugegeben, daß unsere *Erkenntnis* nur Wahrscheinlichkeiten, keine Wahrheiten über die Weltstruktur erfassen könne; aber dies wird als Folge der Unvollkommenheit des menschlichen Erkenntnisvermögens aufgefaßt. Nun aber scheint es so, daß der Zustand der Welt, und da es nur eine Welt gibt, die Struktur der Welt, grundsätzlich nur durch Wahrscheinlichkeitsgesetze festgelegt ist. Dies ist ein tiefer Eingriff in das, was man *Existenz* nennt, und hat zur Folge, daß die klassische Ontologie eigentlich gegenstandslos wird. Unsere Fragestellung führt somit weit über bloß technische Probleme hinaus.

F. Gonseth: Dans les considérations qui précèdent je ressens un manque de courage épistémologique. On a dit que l'on ne définissait pas la notion de probabilité, mais qu'une théorie satisfaisante serait formée de deux parties:

une partie théorique constituée par une axiomatique à la Kolmogoroff;

et une partie empirique comprenant les règles d'application.

Mais cela ne suffit pas. Pour établir la loi des grands nombres par exemple, on fait en outre usage de l'hypothèse que certains cas se présentent avec *les mêmes chances*. L'idée de chance ou de chances égales intervient dans le cours même de la démonstration. Trois points de vue s'avèrent alors nécessaires, inaliénables: les points de vue axiomatique et empirique déjà mentionnés, et en outre un résidu intuitif qui est l'idée que nous avons des chances égales. Ce résidu ne peut être éliminé si l'on veut une théorie des probabilités vraiment applicable et complète.

B. L. van der Waerden, B. Eckmann und W. Pauli erklären sich mit diesen Ausführungen durchaus einverstanden. W. Pauli betont noch besonders, daß die Voraussetzung einer gleichen Chance immer inhärent ist und sich nicht eliminieren läßt.

B. L. van der Waerden: Sofern wir eine Definition der Wahrscheinlichkeit brauchen, handelt es sich nicht um eine mathematische Definition – diese erübrigt sich dank der axiomatischen Methode –, sondern um eine intuitive Definition, mit welcher dem verstehenden Menschen klargemacht werden kann, was er unter Wahrscheinlichkeit verstehen soll; m. a. W. handelt es sich nicht um eine eigentliche Definition, sondern um eine bloße Erläuterung.

J. Lugeon: Les géophysiciens et météorologistes, de même d'ailleurs que certains biologistes, n'ont pas aujourd'hui à leur disposition les outils mathématiques qui leur seraient indispensables pour traiter des phénomènes dépendant d'une quantité considérable de paramètres. Il leur faudrait une théorie leur permettant de définir des phénomènes sporadiques ou aléatoires, et des notions du type: probabilité d'une probabilité.

A. Linder: Bei Stichprobenerhebungen sollten die Elemente der Stichprobe aus allen verfügbaren Elementen zufällig ausgewählt werden. In richtig geplanten und durchgeführten Versuchen sollen die verschiedenen Verfahren den Versuchseinheiten zufällig zugeteilt werden. Um eine zufällige Auswahl vorzunehmen oder eine zufällige Anordnung durchzuführen, hat man Tafeln zufällig angeordneter Zahlen zusammengestellt. Es hat sich gezeigt, daß man dazu die Ergebnisse von Glücksspielen, z. B. von Lotterien, verwenden darf. Zusammenfassend kann man sagen: Der Forscher ist oft *gezwungen*, Folgen zufällig angeordneter Zahlen herzustellen, und dazu genügen die Ergebnisse richtig durchgeführter Glücksspiele.

Ch. Blanc: Peut-on dire que le problème de savoir s'il est nécessaire ou non de donner une définition de la notion de probabilité est un problème similaire à celui, en géométrie, de savoir s'il est nécessaire ou non de donner une définition de la notion de droite? –

Une remarque à propos de l'emploi du calcul des probabilités dans les sciences appliquées: les théorèmes rigoureux d'existence de solutions des équations différentielles dont on fait un usage constant dans les applications sont basés sur des hypothèses n'ayant souvent pas de sens physique. Il est possible d'arriver à un autre point de vue consistant à formuler les solutions et les conditions initiales dans la théorie des équations différentielles sous forme probabiliste.

F. E. Lehmann: Wenn gewisse Systeme genügend kompliziert sind, so kann es vorkommen, daß sie so weitgehend determiniert sind, daß man aus einem kleinen Teil bereits auf das Ganze zurückschließen kann, wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen sich also erübrigen. So kann z. B. der Paläontologe aus einem nicht zu einfachen Zahn den ganzen Organismus rekonstruieren.

Ferner kann es vorkommen, daß das Untersuchen großer Versuchsreihen prinzipiell nicht möglich ist, weil sich das Untersuchungsobjekt im Laufe und infolge der Untersuchung ändert. So verändert beispielsweise im tierpsychologischen Versuch ein einziger Versuch bereits das Tier.

E. J. Walter: Ist mit den von Pauli erwähnten «primären Wahrscheinlichkeiten» eine realwissenschaftliche Auffassung gemeint? Bedeutet das inhaltlich, daß die Welt eine andere Struktur hat, als die klassische Physik annahm? Liegt ein Zusammenhang mit dem Problem Kontinuum–Diskontinuum vor?

Ferner: wie definiert man effektiv die in der Wahrscheinlichkeitstheorie verwendeten Begriffe des «Falles» und des «Ereignisses»?

W. Pauli: zu den primären Wahrscheinlichkeiten: In der Quantenmechanik besteht der grundsätzliche Sachverhalt, daß bei einem Experiment die unerläßliche Trennung zwischen beobachtetem System und Beobachter eine unbestimmbare Wechselwirkung mit sich bringt. Zu jeder Möglichkeit gibt es dann eine andere, bei der das Unbestimmte und das Bestimmte vertauscht sind.

B. L. van der Waerden: In Beantwortung einer Frage von Lehmann sei betont, daß man in der Praxis eine Verteilung nur dann als normal ansehen soll, wenn ein großes Zahlenmaterial vorliegt und dieses ersichtlicherweise ungefähr normal verteilt ist. Hat man aber nur wenig Material und den Verdacht auf Nichtnormalität, so soll man lieber auf die Hypothese der Normalität verzichten, da man heute auch ohne Verwendung dieser Hypothese über ebenso scharfe Methoden verfügt.

P. Bernays: Man sollte etwas mehr das Grundsätzliche des Phänomens der Wahrscheinlichkeit in Betracht ziehen. Es handelt sich nicht nur um die Frage, «was braucht der Wissenschafter», sondern vornehmlich auch um die: «was hat es mit der Wahrscheinlichkeit für eine Bewandtnis»? Wahrscheinlichkeit im generellen Sinne definiert man ebensowenig, wie man Elektrizität oder Gravitation oder dgl. definiert. Die Wahrscheinlichkeit ist ein Moment, das die gesamte Natur durchzieht: Physik, Biologie, Meteorologie usw. Das ist philosophisch erstaunenswert. Wir haben hier ein Grundphänomen der Wirklichkeit, nicht nur etwas Technisches.

Dieses ist der eine Aspekt. Dazu aber kommt noch: Die Wahrscheinlichkeit bildet eine Art der Begreiflichkeit der Natur. Am Buffonschen Nadelproblem z.B. oder in ähnlichen Fällen sieht man, daß man aus Symmetrieverhältnissen auf Häufigkeiten schließen kann, also aus einem Nebeneinander auf ein Nacheinander. Daß wir aus einer starken Ungleichmäßigkeit in den Häufigkeiten beim Würfeln eine physische Unregelmäßigkeit des Würfels entnehmen können, ist eine Erfahrung, jedoch durchaus nichts Selbstverständliches. In der Anwendbarkeit solcher Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen zeigt sich eine Verbindung von Rationalem und Irrationalem in der Natur. Diese Verhältnisse hat speziell Edgar Zilsel in seinem Buche «Das Anwendungsproblem» erörtert. Er kommt hier zu der Auffassung, daß die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsschlüsse auf derselben Eigenschaft der Natur beruht, auf Grund deren wir mit Hilfe von Induktionsschlüssen Gesetzlichkeiten auffinden können.

Diese Erwägung legt die Annahme nahe, daß Wahrscheinlichkeit und Kausalität im Naturgeschehen in einem und demselben Sachverhalt verflochten sind – eine Ansicht, wie sie ähnlich auch von Reichenbach befürwortet wurde (ehe er seine Wahrscheinlichkeitslogik aufstellte). Es würden dann die reinen Feldgesetze als noch nicht spezifisch kausal, sondern als eine Art vorgängiger Gesetzlichkeit (wie die geometrische) anzusehen sein. Für diese Auffassung spricht einerseits, daß in den Feldgesetzen noch keine Auszeichnung einer Zeitrichtung vorliegt, und andrerseits, daß überall, wo Materie sich geltend macht, das Moment der Wahrscheinlichkeit für die Erklärung der Vorgänge hinzugezogen werden muß.

Doch wie es sich hiermit auch verhalte – jedenfalls gewinnen wir erst durch eine solche Art der Betrachtung eine richtige Würdigung für die Größenordnung des Phänomens der Wahrscheinlichkeit.