Section de Mathématiques

1. Section de Mathématiques

Séance de la Société Suisse de Mathématiques

Lundi, 30 août 1926

Président: Prof. Dr F. Gonseth (Berne)
Secrétaire: Dr P. Lambossy (Fribourg)

1. L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel). — *Sur les nombres premiers dans les progressions arithmétiques du deuxième ordre.*

Soit $\pi_2(a, b, c; x)$ le nombre des nombres premiers $\leqq x$ contenus dans la progression arithmétique générale du deuxième ordre

$$f(n) = an^2 + bn + c, \qquad (1)$$

où a, b, c sont trois nombres entiers, arbitrairement choisis mais fixes, tandis que n parcourt la suite illimitée des nombres naturels. Si l'on pouvait démontrer que

$$\pi_2(a, b, c; x) \longrightarrow \infty \text{ quand } x \longrightarrow \infty, \qquad (2)$$

on aurait résolu un problème fameux qui intéresse beaucoup de mathématiciens. L'auteur montre d'abord les trois conditions auxquelles a, b et c doivent satisfaire pour que (2) puisse avoir lieu, puis indique pour ce nombre π_2 la formule asymptotique

$$\pi'(x) = \delta \cdot \frac{C'}{\sqrt{a}} \cdot C \cdot li\sqrt{x}, \qquad (3)$$

où $li\, z$ représente le logarithme intégral de z. La formule (3), semblable à celle de MM. Hardy et Littlewood, entraînerait (2); mais comme elle n'est pas démontrée en toute rigueur, il y a intérêt à la vérifier expérimentalement. C'est ce que l'auteur a fait pour les six cas suivants:

$$f_1(n) = n^2 + 1 \quad ; \; f_3(n) = 101n^2 + 20n + 1; \; f_5(n) = 10\,001n^2 + 200n + 1;$$
$$f_2(n) = n^2 + n + 1; \; f_4(n) = 122n^2 + 22n + 1; \; f_6(n) = 10\,610n^2 + 206n + 1.$$

La factorisation des nombres $f_i(n)$ est poussée jusqu'à 225 000 000. Grâce à cette limite élevée, l'auteur a pu constater l'inexactitude d'une présomption de Gauss admise depuis plus d'un siècle $\left(\pi(x) < lix\right)$. Après avoir introduit deux nouvelles notions: *l'écart absolu* de la progression (1), savoir $\pi_2(a, b, c; x) - \pi'(x)$, et *l'écart relatif* de la progression (1) savoir

$$\frac{\pi_2(a, b, c; x) - \pi'(x)}{\pi'(x)} = \frac{\pi_2(x)}{\pi'(x)} - 1,$$

l'auteur termine sa communication par six propositions relatives aux nombres premiers contenus dans les progressions arithmétiques du deuxième ordre et présente plusieurs tableaux graphiques se rapportant à ce sujet.

2. E. Meissner (Zollikon-Zürich). — *Über eine singuläre Differentialgleichung, die in einem Problem der Seismologie auftritt.*

Oberflächen-Querwellen in einem elastischen Halbraum sollen diejenigen Wellen heissen, die horizontal und rechtwinklig zur Ausbreitungsrichtung schwingen und die mit der Tiefe so rasch abklingen, dass ihre Energie pro Oberflächeneinheit endlich ist.

Die mathematische Formulierung führt für solche Wellen in einem Halbraum, dessen elastische Eigenschaften Funktionen der Tiefe z sind, auf die Differentialgleichung:

$$L(u) + \lambda u = o \qquad L(u) = \frac{d}{dx}\left(p(x) \cdot \frac{du}{dx}\right) - q(x)\, u$$

für die ein Integral so zu suchen ist, dass

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = o \qquad \int_o^\infty u^2 \cdot dx = endlich.$$

Dieses Problem ist von H. Weyl (Math. Ann. 68, 1909) behandelt worden. Die Gleichung gehört dem von ihm als Grenzpunkttypus bezeichneten Fall an. Für das seismologische Problem wichtig ist dann die Frage nach dem Punktspektrum des Frequenzparameters bei vorgegebener Wellenlänge, das i. a. neben einem Streckenspektrum auftritt. Jedem Eigenwert desselben entspricht eine Dispersionskurve der Wellen. Existiert kein Punktspektrum, so gibt es keine Oberflächenwellen (homogener Halbraum). In den seismologisch wichtigen Fällen nimmt die Zahl der Punkte des Punktspektrums mit wachsender Wellenlänge ab; eine Dispersionskurve bricht ab. Verschiedene Dispersionskurven gehören zu Wellen mit verschiedenzähligen „Knotenebenen".

Ausser den bis jetzt allein bekannten zwei Fällen, die Love und der Vortragende publiziert haben, werden eine Reihe neuer Fälle vorgeführt, deren Kenntnis erwünscht ist wegen der praktischen Anwendung auf die Erforschung der äussersten Erdrinde von ca. 100 km Dicke.

3. L. Kollros (Zurich). — *Projection centrale et géométrie réglée.*

En projection centrale, la droite est déterminée par sa trace T sur le tableau π et par son point de fuite F. Une surface réglée est représentée par sa trace t et sa ligne de fuite f; les génératrices établissent une correspondance ponctuelle entre ces deux courbes; si les tangentes aux points homologues de t et de f sont parallèles, la surface est développable.

Les droites d'une congruence déterminent une transformation ponctuelle $T \to F$ de tous les points de π; on voit facilement[1] qu'à une affinité, une collinéation ou une inversion correspondent respectivement des congruences (1,1), (3,1) ou (2,2).

Les droites d'un complexe donnent lieu à une correspondance point$\to$courbe : $T \to f$; f est la ligne de fuite du cône formé par les droites

[1] Müller-Kruppa: Vorl. ü. darst. Geom. Bd. I: Die lin. Abbildungen.

du complexe issues de T. Si le complexe est linéaire, f est la droite de fuite du plan focal de T; supposons que la droite à l'infini i de π appartienne au complexe; elle contient alors le foyer O' du plan à l'infini Ω et celui O'' de π. Les faisceaux de droites O'' (dans Ω) et O' (dans π) sont projectifs et le complexe linéaire est formé de toutes les droites qui coupent deux rayons correspondants de ces faisceaux. En projetant les droites O'' (Ω) sur π, on obtient un faisceau perspectif à $O'(\pi)$, car la droite i se correspond à elle-même; les rayons homologues se coupent donc sur une droite x. Ainsi, les droites d'un complexe linéaire sont représentées par des paires de points TF situés sur les rayons correspondants de deux faisceau perspectifs. Mais, si l'on généralise convenablement la méthode de Monge (projections sur deux plans), on voit qu'un point quelconque de l'espace est aussi déterminé par une paire de points liés à deux faisceaux perspectifs; cette double interprétation d'une même paire de points établit une correspondance entre les points du second espace et les droites d'un complexe linéaire du premier. On peut alors montrer qu'aux points du premier espace correspondent, dans le second, les droites qui coupent une conique ω, de telle sorte que, à des points en ligne droite, correspondent des génératrices du même système d'un hyperboloïde passant par ω; la conique ω est (avec la ligne de terre x) le lieu des points dont les deux projections coïncident.

Si ω était l'ombilicale, cette correspondance serait identique à la transformation de Lie (point→droite isotrope; droite→sphère) intéressante par ses applications à la théorie des surfaces et à celle des équations aux dérivées partielles.

4. W. Saxer (Aarau). — *Über die Verteilung der Nullstellen und Pole von rationalen Funktionen konvergenter Folgen.*

Erscheint in der „Mathematischen Zeitschrift" in Berlin.

5. Chr. Moser (Bern). — *Eine Folgerung aus dem Makeham'schen Gesetze.*

Ordnet man die Zahlen der Lebenden einer Absterbeordnung nach dem Alter x, so besteht für erwachsene Personen annäherungsweise das bekannte Makeham'sche Gesetz:

$$f(x) = ks^x g^{c^x} \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

wo $f(x)$ die Zahl der Personen des Alters x darstellt und k, s, g und c konstante Grössen sind.

Ist e die Basis der natürlichen Logarithmen und wird $g^{c^x} = e^z$ gesetzt, so kann man durch geeignete Entwicklungen, in Anlehnung an das Integral für die mittlere künftige Lebensdauer eines x-Jährigen, unschwer auf Grund der Formel (1) eine Menge von Darstellungen für e^z ableiten. Wir heben daraus folgende Darstellung hervor, wo n null oder eine ganze positive Zahl sein kann:

$$e^z = \frac{1}{P_{(n,\,z)}}\left(1 + 2^n \cdot \frac{z}{1!} + 3^n \cdot \frac{z^2}{2!} + 4^n \cdot \frac{z^3}{3!} + \ldots\right) \ldots (2).$$

Hierin bedeutet $P_{(n,\,z)}$ ein Polynom, das nur vom Grade n in z ist und lauter ganze Koeffizienten besitzt. Für einen ganzzahligen Wert von z ist $P_{(n,\,z)}$ daher stets eine ganze Zahl. Es ist $P_{(0,\,z)} = 1$, $P_{(1,\,z)} = 1 + z$, $P_{(2,\,z)} = 1 + 3z + z^2$ und so fort, so dass man z. B. für $n = o$ ohne weiteres die bekannte Reihe für e^z hat, ferner etwa für $n = 2$, $z = 1$ die Reihe:

$$e = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{4}{1!} + \frac{9}{2!} + \frac{16}{3!} + \ldots\right).$$

Die Beispiele lassen sich beliebig vermehren.

Setzt man abkürzend:

$$_\lambda C_\varrho = \frac{(-1)^{\lambda+1}\varrho^{\lambda+1}}{(1+\varrho)(1+2\varrho)\ldots(1+(\lambda+1)\varrho)}$$

$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n)$ und bildet stets die $(n+1)$. Ableitung nach ϱ, ermittelt alsdann ihren Wert für $\varrho = o$ und führt die Bezeichnung ein:

$$_\lambda C_o^{(n+1)} = \frac{d^{n+1}\left(_\lambda C_\varrho\right)}{d\varrho^{n+1}} \qquad (\varrho = o)$$

so erhält $P_{(n,\,z)}$ die Form:

$$P_{(n,\,z)} = \frac{1}{_o C_o^{(n+1)}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} {_\lambda C_o^{(n+1)}}\, z^\lambda \quad \ldots (3).$$

Der Ausdruck für $P_{(n,\,z)}$ liesse sich noch anders darstellen und kann übrigens direkt, durch sukzessive Division von zwei Reihen (der in Klammern stehenden Reihe in Gl. (2) durch die Reihe für $n = o$) erhalten werden.

Für negative Werte des Exponenten n ergibt sich ein etwas modifiziertes Bildungsgesetz des Nenners P, und zwar in der Weise, dass er nicht durch ein Polynom mit einer endlichen Zahl von Gliedern darstellbar ist, sondern zu einer unendlichen Reihe wird.

Von Interesse ist wohl wesentlich, dass die Makeham'sche Funktion mit ihren vielen andern, in der Versicherungsmathematik bekannten schönen Eigenschaften ebenfalls solche aufweist, die geeignet sind, den engen Zusammenhang aufzuzeigen, der gemäss Gl. (2) jede beliebige Zahl e^z mit den Potenzen der Zahlen der natürlichen Zahlenreihe verbindet.

Handelt es sich darum, lauter Stammbrüche als Koeffizienten einzuführen, so kann folgende Darstellung gewählt werden:

$$e^z = \frac{\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma+1}\cdot\frac{z}{1!} + \frac{1}{\sigma+2}\cdot\frac{z^2}{2!} + \ldots}{\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma(\sigma+1)}z + \frac{1}{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)}z^2 - \ldots}.$$

Dabei ist es zulässig, den Anfangsstammbruch $\frac{1}{\sigma}$ nach Belieben anzunehmen.

6. R. Wavre (Genève). — *Sur une classe de fonctionnelles automorphes.*

Voir le compte rendu de la séance de la Société Suisse de Mathématiques, Fribourg 1926, qui paraîtra dans «l'Enseignement mathématique».

7. G. Juvet (Neuchâtel). — *Sur une généralisation du théorème de Jacobi.*

L'auteur n'a pas envoyé de résumé de sa communication.

8. M. Plancherel (Zurich). — *Le rôle de l'intégrale de Fourier dans l'intégration de quelques problèmes relatifs à certaines équations aux dérivées partielles du type hyperbolique ou parabolique.*

Dans un travail trop peu remarqué [Normal coordinates in dynamical systems, Proceedings London Math. Soc., 15 (1916), p. 401—448], Mr. T. J. I'A. Bromwich a été amené par une méthode heuristique des plus intéressantes à formuler sur l'intégration des problèmes mixtes relatifs à certaines équations aux dérivées partielles du type hyperbolique ou parabolique quelques propositions dont la démonstration n'a pas encore été donnée.

Cette démonstration peut être faite à l'aide de la théorie des transformations intégrales de Fourier et de quelques théorèmes de la théorie des équations intégrales, comme l'auteur le montrera dans une autre revue.

9. H. Krebs (Berne). — *Représentation géométrique d'une transformation d'équations aux dérivées partielles.*

Nous considérons l'équation

$$\text{(1)} \qquad \frac{\delta^2 x}{\delta u \, \delta v} - \frac{1}{2} \frac{\delta \log \lambda(u, v)}{\delta u} \frac{\delta x}{\delta v} - \lambda(u, v) \, x = 0.$$

Les suites de Laplace qui correspondent aux équations (1) intégrables comprennent un nombre pair d'équations et sont telles que deux équations situées à égale distance des extrêmes ont les mêmes invariants à l'ordre près.

Nous considérerons le réseau x déterminé par l'équation (1) et une congruence yz conjugée à ce réseau, les foyers de la droite passant par le point x étant désignés par y et z. Si l'on désigne par x_1 une solution de l'équation (1), le foyer y de la droite yz est déterminé par la relation

$$\text{(2)} \qquad y = \int x_1 \, x \, du + \frac{1}{\lambda} \frac{\delta x_1}{\delta v} \frac{\delta x}{\delta v} \, dv.$$

Nous poserons

$$\text{(3)} \qquad z_1 = \int x_1^2 \, du + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\delta x_1}{\delta v} \right)^2 dv.$$

Nous définirons un point ω de la droite yz par la relation

$$(4) \qquad \frac{z_1 \omega}{x_1} = \frac{z_1 x}{x_1} - y.$$

La formule (2) nous donne les relations

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta u} \dfrac{z_1 \omega}{x_1} = z_1 \dfrac{\delta}{\delta u} \dfrac{x}{x_1}, \\ \dfrac{\delta}{\delta v} \dfrac{z_1 \omega}{x_1} = \left(z_1 - \dfrac{1}{\lambda} x_1 \dfrac{\delta x_1}{\delta v}\right) \dfrac{\delta}{\delta v} \dfrac{x}{x_1}. \end{cases}$$

Nous retrouvons les équations de la transformation de M. Goursat qui permet de construire toutes les équations (1) intégrables et leurs intégrales.

Si l'on élimine successivement ω et x entre les équations (5) et que l'on exprime λ en fonction de z_1 au moyen de la relation (3), on obtient deux équations dont la seconde se déduit de la première en remplaçant x par ω et z_1 par $\dfrac{1}{z_1}$.

Le second foyer z de la droite yz est donné par une relation que l'on peut mettre sous la forme

$$(6) \qquad z = y - \frac{1}{\lambda} \frac{\delta x_1}{\delta v} x.$$

L'élimination de x entre les formules (4) et (6) nous donne la relation

$$(7) \qquad \frac{1}{\lambda} z_1 \frac{\delta x_1}{\delta v} \omega = - z_1 z + \left(z_1 - \frac{1}{\lambda} x_1 \frac{\delta x_1}{\delta v}\right) y.$$

Les relations (6) et (7) nous montrent que le rapport enharmonique des points ω, x, z et y est égal au rapport des coefficients de $\dfrac{\delta}{\delta u} \dfrac{x}{x_1}$ et de $\dfrac{\delta}{\delta v} \dfrac{x}{x_1}$ de la transformation de M. Goursat.

Nous avons donc le théorème:

Si l'on prend pour rapport enharmonique le rapport des coefficients de $\dfrac{\delta}{\delta u} \dfrac{x}{x_1}$ et de $\dfrac{\delta}{\delta v} \dfrac{x}{x_1}$ de la transformation de M. Goursat, le conjugué enharmonique d'un point du réseau défini par l'équation (1) par rapport aux foyers de la droite passant par ce point d'une congruence conjuguée à ce réseau décrit un réseau satisfaisant à l'équation obtenue en remplaçant dans l'équation (1) dans laquelle la fonction $\lambda(u, v)$ est exprimée en fonction de z_1 au moyen de la relation (3), z_1 par $\dfrac{1}{z_1}$.

La représentation géométrique de la transformation de M. Goursat que nous avons obtenue est donc semblable à celle qu'a donné M. Koenigs de la transformation de Moutard.

10. H. Brandt (Aachen). — *Zur Zahlentheorie der Quaternionen.*

Der Vortragende geht aus von dem Begriff eines allgemeinen Quaternionenkörpers und bespricht im besonderen diejenigen Körper, deren Theorie im Zusammenhang steht mit der Theorie der Komposition der quaternären quadratischen Formen. Ein derartiger Körper enthält unendlich viele grösste Integritätsbereiche $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$.., die man gleichzeitig als Einheitsideale auffassen kann. Für jeden derartigen Integritätsbereich wie $\mathfrak{e}$ gibt es Linksideale und Rechtsideale, d. h. Gesamtheiten von Quaternionen $\mathfrak{a}$, die mit α und α' auch $\alpha + \alpha'$ enthalten, und, falls jedes Quaternion aus $\mathfrak{e}$ durch ε bezeichnet wird, auch $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\alpha'$.. im ersten Fall und $\alpha\varepsilon$, $\alpha'\varepsilon$.. im zweiten Fall. Man schreibt in diesen beiden Fällen $\mathfrak{e}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a}\mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ und nennt $\mathfrak{e}$ linkes bzw. rechtes Einheitsideal von $\mathfrak{a}$.

Wenn man nicht nur den Integritätsbereich $\mathfrak{e}$, sondern auch alle andern $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$... ins Auge fasst und für jeden von ihnen die Links- und Rechtsideale sucht, so sieht man, dass jedes Ideal gerade zweimal auftritt, und zwar einmal als Linksideal und einmal als Rechtsideal, aber im allgemeinen in verschiedenen Integritätsbereichen. Mit andern Worten heisst das: Jedes Ideal hat ein eindeutig bestimmtes linkes und ein eindeutig bestimmtes rechtes Einheitsideal.

Man kann für die Ideale eine Multiplikation definieren, welche genau derjenigen der algebraischen Zahlkörper entspricht und nur durch gewisse Bedingungen abweicht, welche für die Existenz des Produktes erforderlich sind. Wenn nämlich zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gegeben sind, so existiert ein drittes Ideal, das Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, immer und nur dann, wenn das rechte Einheitsideal von $\mathfrak{a}$ zugleich linkes Einheitsideal von $\mathfrak{b}$ ist.

Für diese Art der Multiplikation der Ideale gilt das kommutative Gesetz natürlich nicht, da im allgemeinen, wenn $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, das Produkt $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ garnicht existiert. Dagegen behält das assoziative Gesetz seine Gültigkeit, wenn auch kompliziert durch die Fragen nach der Existenz der Produkte. Die Menge aller Ideale des Körpers bildet in bezug auf die Operation der Multiplikation ein Aggregat von Elementen, das zwar keine Gruppe ist, aber doch ähnliche Eigenschaften hat und vom Vortragenden in einer in den Mathematischen Annalen (Bd. 96) erschienenen Note als Gruppoid bezeichnet worden ist.

Ähnlich wie in algebraischen Zahlkörpern lassen sich auch in Quaternionenkörpern die Ideale in Klassen einteilen. Zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ werden dabei zu einer Klasse $\mathfrak{A}$ gerechnet oder als äquivalent bezeichnet, wenn es zwei Quaternionen ϱ und σ gibt, so dass $\mathfrak{a}_1 = \varrho\,\mathfrak{a}\,\sigma$. Parallel der Multiplikation der Ideale läuft dann eine Komposition der Klassen, für welche ganz ähnliche Gesetze gelten. Zu jeder Klasse gehört eine linke und eine rechte Einheitsklasse, und zwei Klassen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ lassen dann und nur dann eine Komposition zu, wenn die rechte Einheitsklasse von $\mathfrak{A}$ zugleich linke Einheitsklasse von $\mathfrak{B}$ ist.

Die Gesamtheit aller Klassen bildet in bezug auf diese Komposition ebenfalls ein Gruppoid. Die Anzahl der Elemente dieses Gruppoids ist aber (jedenfalls bei den definiten Körpern und vermutlich auch bei den indefiniten) eine endliche Zahl, welche sich nach den Dirichletschen transzendenten Methoden bestimmen lässt.

11. Fräulein H. STAEHELIN (Fetan). — *Abbildung des Tangentenkomplexes des Kegels zweiter Ordnung auf eine dreidimensionale Punktmannigfaltigkeit.*[1]

Die Gleichungen eines irreduziblen Kegels zweiter Ordnung, K_2, lassen sich bei geeigneter Wahl der homogenen projektiven Koordinaten $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ in folgender Form darstellen:

$$x_0 = l_{00},\ x_1 = l_1^2,\ x_2 = l_1 l_2,\ x_3 = l_2^2,$$

wo die Parameter $l_{00} : l_1 : l_2$ nicht gleichzeitig null sein dürfen und in dem Sinne als homogen erklärt werden, dass ein Wertesystem $l_{00} : l_1 : l_2$ äquivalent ist mit $\varrho^2 l_{00} : \varrho l_1 : \varrho l_2$, $\varrho \neq o$. Die gradlinigen Erzeugenden haben Gleichungen der Form:

$$(1) \qquad a_1 l_1 + a_2 l_2 = o.$$

Werden die Koordinaten $l_{00} : l_1 : l_2$ als Funktionen eines Parameters t aufgefasst, so berechnet man die Plückerschen Koordinaten einer Tangente des K_2, die nicht durch den Scheitelpunkt geht, als die zweireihigen Determinanten der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} l_{00} & l_1^2 & l_1 l_2 & l_2^2 \\ l'_{00} & 2 l_1 l'_1 & l'_1 l_2 + l'_2 l_1 & 2 l_2 l'_2 \end{matrix} \right\|.$$

Als Parameter der Tangenten können folgende homogene Grössen dienen:

$$L_1 = l_1 (l_1 l'_2 - l_2 l'_1),\quad L_2 = l_2 (l_1 l'_2 - l_2 l'_1)$$
$$L_3 = 2 l_{00} l'_1 - l_1 l'_{00},\quad L_4 = 2 l_{00} l'_2 - l_2 l'_{00}.$$

Diese genügen den Relationen

$$(2) \quad L_1 : L_2 = l_1 : l_2,\quad L_1 L_4 - L_2 L_3 = 2 l_{00} (l_1 l'_2 - l_2 l'_1)^2.$$

Man erhält so als Parameterdarstellung der Tangente:

$$\begin{cases} X_{01} = L_1 L_3,\ X_{02} = \dfrac{1}{2}\left(L_1 L_4 + L_2 L_3\right),\ X_{03} = L_2 L_4, \\ X_{23} = L_2^2,\quad X_{31} = -2 L_1 L_2,\quad X_{12} = L_1^2. \end{cases}$$

Deuten wir nun die Parameter L_i als homogene Punktkoordinaten $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ einer komplexen dreidimensionalen Punktmannigfaltigkeit, so entspricht jeder Tangente, die nicht durch den Scheitelpunkt des K_2 geht, umkehrbar eindeutig ein Punkt

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = L_1 : L_2 : L_3 : L_4.$$

[1] H. Stähelin, Die charakteristischen Zahlen analytischer Kurven auf dem Kegel 2 · O. und ihrer Studyschen Bildkurven. Basler Dissertation 1924; Math. Ann. Bd. 93.

Für die Erzeugenden ist zwar $L_1 = 0$ und $L_2 = 0$. Es wird aber nach (1) und (2):

$L_1 : L_2 = l_1 : l_2 = -a_2 : a_1$ und $L_3 : L_4 = L_1 : L_2 = -a_2 : a_1$.

Die Bildpunkte der Erzeugenden haben daher Koordinaten der Form:

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = 0 : 0 : -a_2 : a_1$$

mit
$$\xi_0 : \xi_1 = -a_2 : a_1.$$

Diese Punkte liegen somit auf der Leitlinie der parabolischen Linienkongruenz:
$$\Xi_{01} = 0, \ \Xi_{12} - \Xi_{03} = 0.$$

Man zeigt nun leicht, dass ein Tangentenbüschel bei unserer Abbildung in eine Gerade übergeht, welche die Leitlinie dieser Kongruenz schneidet, und die dann und nur dann der Kongruenz angehört, wenn der Mittelpunkt des Tangentenbüschels ein regulärer Punkt der Fläche ist. Jeder Geraden, die durch den Scheitelpunkt des K_2 geht, entsprechen 2 Punkte der Direktrix. Diese sind die Bildpunkte der Erzeugenden, längs welchen die Tangentialebenen, die man durch diese Gerade an den Kegel legen kann, diesen berühren; sie fallen dann und nur dann zusammen, wenn diese Gerade eine Erzeugende ist. Die Zweideutigkeit, die sich bei der Abbildung des Tangentenkomplexes einer Fläche zweiter Ordnung mit nicht verschwindender Diskriminante ergibt,[1] reduziert sich hier auf diejenigen Tangenten, die durch den Scheitelpunkt des Kegels gehen und die nicht Erzeugende sind. Schliesst man diese uneigentlichen Tangenten aus, so entspricht jeder Tangente umkehrbar eindeutig ein Punkt einer komplexen dreidimensionalen Punktmannigfaltigkeit.

12. Madame GR. CHISHOLM YOUNG (La Conversion). — *Pythagore: Comment a-t-il trouvé son théorème?*

Des deux scènes supposées, que la conférencière esquisse en quelques mots, toutes deux placées à 25 siècles en arrière de nos jours, la première se passe à Babylone. Le jeune Pythagore vient de faire la connaissance du Triangle Cosmique, c'est-à-dire du triangle rectangle dont les côtés comportent respectivement 3, 4 et 5 unités de longueur, ces nombres étant liés par l'équation

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Un vieux mage lui montre un poids du roi Nabuchadnezzar, copié sur un modèle de plus de mille ans antérieur à lui. Le poids a la forme d'un cône à base elliptique, dont le petit axe mesure deux dixièmes du pied babylonien (un pied babylonien = 3,2 décimètres); le grand et le petit axes étant dans le rapport 4 : 3.[2]

---

[1] E. Study: Über die Geometrie der Kreise und Kugeln, Math. Ann. 86. H. Jobin: Sur une généralisation de la transformation de Lie. Thèse. Zurich. E p. f.

[2] Ces données sur la forme et les dimensions du poids — qui se trouve actuellement au Musée britannique de Londres – obtenues tout récemment par la conférencière, révèlent un emploi du Triangle Cosmique de beaucoup antérieur à tout emploi certifié jusqu'ici. Quoiqu'au dire de Plutarque ce triangle eût été utilisé en Egypte comme symbole sacré, on n'en avait pas jusqu'à présent reconnu de trace dans l'ancienne Assyrie. Pour ce qui concerne la connaissance de l'ellipse, on ne semblait pas avoir pu établir qu'elle appartient à une époque antérieure à Pythagore.

La seconde scène se passe à Crotone, où Pythagore avait fondé son école. La tradition qui nous a été transmise nous présente Pythagore raisonnant en arithméticien plutôt qu'en géomètre, et la conférencière prétend que les théories avancées jusqu'ici sur la découverte du théorème géométrique dit de Pythagore — théorème qui nous est parvenu comme le I, 47 d'Euclide, et dont la tradition a toujours attribué l'énoncé à Pythagore, mais la démonstration à Euclide lui-même — ont échoué parce qu'elles n'ont pas tenu compte des tendances connues de celui qui a enseigné à ses disciples les propriétés fondamentales des nombres.

Nous savons que Pythagore a trouvé la première série de triples de nombres entiers, commençant par (3, 4, 5), le carré du plus grand desquels est égal à la somme des carrés des deux autres; mais, loin de tenir compte de ce fait très caractéristique, on a cherché à deviner comment inversement il eût tiré la formule des triples de son théorème géométrique. D'autre part, passant sous silence les écrits que nous possédons sur la manière pythagorienne de raisonner, on a proposé différentes démonstrations primitives de ce théorème géométrique, toutes basées sur notre représentation du nombre par la longueur. La conférencière, par contre, s'appuyant sur le caractère de Pythagore comme fondateur de la théorie des nombres et sur sa manière connue de représenter les nombres par des figures composées de cailloux ou de trous faits dans le sable, décrit la marche probable de sa pensée, passant par ses découvertes indubitables des relations numériques

$$1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n - 1) = n^2,$$

et

$$(2n - 1) + (n - 1)^2 = n^2,$$

à sa série de triples de nombres $\left\{ m, \frac{m^2 - 1}{2}, \frac{m^2 + 1}{2} \right\}$ reliés par l'égalité

$$m^2 + \left\{\frac{m^2 - 1}{2}\right\}^2 = \left\{\frac{m^2 + 1}{2}\right\}^2, \left\{ m, \text{ entier impair } \right\}.$$

Reconnaissant que le premier de ces triples correspond au Triangle Cosmique, Pythagore se demande s'il y a toujours une telle liaison entre ses triples et des triangles rectangles. La démonstration que la conférencière se figure naissant dans l'esprit du maître à l'aide de ses rangées de trous dans le sable le conduit à énoncer son théorème avec parfaite généralité.

Cette démonstration, sous sa forme primitive, ne s'applique qu'aux triples de Pythagore; pour la rendre applicable au cas général il faudrait faire intervenir la théorie de la proportionalité, élaborée plus d'un siècle plus tard. Mais c'est ainsi que les grands esprits parviennent à leurs découvertes; il comporte à leurs disciples de trouver, comme pour le théorème de Pythagore, une démonstration ou même une centaine de démonstrations générales.

La conférence sera publiée dans l'Enseignement Mathématique.