

# Sektion für Mathematik und Astronomie

Autor(en): **[s.n.]**

Objekttyp: **AssociationNews**

Zeitschrift: **Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden  
Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences  
Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali**

Band (Jahr): - **(1914)**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# I

## Sektion für Mathematik und Astronomie

zugleich Hauptversammlung der Schweizerischen  
Mathematischen Gesellschaft

---

1. M. René DE SAUSSURE (Berne). — *Sur le mouvement le plus général d'un corps rigide en tenant compte des vitesses.*

On admet généralement que le mouvement le plus général d'un corps rigide de forme quelconque est le mouvement hélicoïdal, c'est-à-dire que : étant données deux positions quelconques  $C$  et  $C'$  d'un corps rigide, on peut toujours faire passer ce corps de la position  $C$  à la position  $C'$  par une rotation autour d'une certaine droite  $X$  et un glissement le long de cette droite, et cela n'est possible que d'une seule manière. Il en résulte que lorsqu'un corps rigide en mouvement passe par une série de positions connues  $C, C', C'', \text{etc.}$ , on peut obtenir une représentation approchée du mouvement de ce corps, en remplaçant le mouvement réel par une série de mouvements hélicoïdaux  $CC', C'C'', C''C''', \text{etc.}$  tous parfaitement déterminés par les positions connues  $C, C', C'', \text{etc.}$  Cette solution se rapproche d'autant plus du mouvement réel que les positions données  $C, C', C'', \text{etc.}$  sont plus voisines les unes des autres ; elle est donc parfaite au point de vue géométrique ; mais au point de vue mécanique, elle n'est pas complète puisqu'elle ne tient pas compte de la vitesse avec laquelle le corps rigide  $C$  se déplace.

Comment tenir compte de cette vitesse ? Remarquons que lorsqu'un corps rigide  $C$  tourne et glisse sur une droite fixe  $X$ , le glissement n'est pas nécessairement proportionnel à la rotation ; il y a donc ici un élément arbitraire dont on pourrait

se servir pour tenir compte de la vitesse avec laquelle se meut le corps  $C$ .

La solution que nous proposons est basée sur la notion des *feuilletés cotés*, notion que nous avons introduite dans notre Géométrie des feuilletés<sup>1</sup>. Un *feuillet* est l'ensemble des éléments géométriques nécessaires et suffisants pour déterminer la position  $C$  d'un corps rigide de forme quelconque. Par exemple, un point  $M$  une droite  $D$  passant par  $M$  et un plan  $P$  passant par  $D$  constituent un feuillet parce que la position de la figure  $MDP$  suffit pour déterminer la position  $C$  d'un corps rigide qui serait invariablement relié au feuillet  $MDP$ . On sait que les systèmes de feuilletés sont tout à fait analogues aux systèmes de droites : on peut définir la position d'un feuillet au moyen de 8 coordonnées homogènes.

Lorsqu'on associe à une droite un coefficient numérique, on obtient l'élément que R. S. Ball a appelé une vis<sup>2</sup> : au point de vue géométrique, une vis est une droite ordinaire  $A$  affectée d'une cote  $a$  (droite cotée). Les systèmes fondamentaux de droites cotées ont été étudiés par Ball; ainsi par exemple deux droites cotées  $A(\alpha)$  et  $B(\beta)$  déterminent la monosérie fondamentale et cette monosérie a la forme d'un conoïde de Plücker. De même, si l'on associe à un feuillet  $C$  un coefficient numérique  $\gamma$  on obtient un feuillet (ou corps) coté  $C(\gamma)$  et les systèmes de feuilletés cotés seront analogues aux systèmes de droites cotées. Dans une prochaine étude qui paraîtra dans les *Arch. des Sc. Ph. et Nat.*, je me propose d'étudier les formes fondamentales de la géométrie des feuilletés cotés; nous verrons alors que la *monosérie fondamentale* peut être définie comme le lieu des corps  $C$  symétriques d'un corps fixe  $C_0$ , par rapport aux différentes génératrices d'un conoïde de Plücker. Il suffit de deux corps cotés  $C(\gamma)$ ,  $C'(\gamma')$  pour déterminer complètement ce lieu. En effet, soit  $X$  l'axe du mouvement hélicoïdal qui permet de passer de la position  $C$  à la position  $C'$  : considérons une droite quelconque  $I$  rencontrant l'axe  $X$  à angle droit et

<sup>1</sup> Voir *Arch. des Sc. Ph. et Nat.*, un article intitulé *La géométrie des feuilletés cotés* qui paraîtra en janvier 1915.

<sup>2</sup> Voir *Theory of Screws*, de R. S. Ball, Dublin 1876.

construisons le corps  $C_0$  symétrique du corps  $C$  par rapport à la droite  $I$ . Il est facile de voir que le corps  $C_0$  sera aussi symétrique du corps  $C'$  par rapport à une droite  $I'$  rencontrant aussi l'axe  $X$  à angle droit. Si l'on associe à la droite  $I$  une cote égale à la moitié de la cote  $\gamma$  relative au corps  $C$ , et à la droite  $I'$  une cote égale à la moitié de la cote  $\gamma'$  relative au corps  $C'$ , les deux droites cotées  $I\left(\frac{\gamma}{2}\right)$  et  $I'\left(\frac{\gamma'}{2}\right)$  déterminent un conoïde de Plücker. Si donc on construit tous les corps symétriques du corps fixe  $C_0$  par rapport aux génératrices de ce conoïde, on obtiendra une monosérie de corps parmi lesquels se trouveront les deux corps donnés  $C$  et  $C'$ . Ce problème n'a qu'une solution, car cette solution ne dépend pas de la manière dont on choisit la droite  $I$ . En outre, à chaque génératrice du conoïde de Plücker correspond une cote déterminée  $\frac{\gamma_n}{2}$  et une position déterminée  $C_n$  du corps qui se meut en restant symétrique du corps fixe  $C_0$ .

Supposons maintenant que la cote  $\gamma_n$  représente l'époque à laquelle le corps mobile occupe la position  $C_n$ , notre problème se trouve complètement résolu, puisque *étant données deux positions  $C$  et  $C'$  occupées respectivement par un corps mobile aux époques  $\gamma$  et  $\gamma'$ , nous avons réussi à interpoler entre ces deux positions une série continue de positions  $C_n$  à chacune desquelles correspond une époque définie  $\gamma_n$* . La solution reste la même si les corps  $C$  et  $C'$  sont infiniment voisins l'un de l'autre : dans ce cas les époques correspondantes  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont aussi infiniment voisines ; la série des corps  $C_n$  et des époques  $\gamma_n$  représente donc bien *le mouvement le plus général d'un corps rigide quelconque en tenant compte des vitesses*.

2. Dr. S. MAUDERLI (Bern). — *Die Säkularglieder in der Himmelsmechanik und ihre Bedeutung in der Stabilitätsfrage.*

Die Integration der in der Himmelsmechanik auftretenden Differentialgleichungen kann auch heute noch nur in ganz seltenen und besonderen Fällen anders als durch sukzessive

Näherung erfolgen. Die dabei gefundenen Lösungen haben dann im allgemeinen die Form

$$(1) \quad \sum At^m \cos vt + \sum Bt^m \sin vt,$$

worin  $t$  die Zeit und  $m$  eine ganze positive Zahl bedeutet. Insbesondere ergeben sich solche Lösungen bei der Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Coeffizienten, die in der Himmelsmechanik eine hervorragende Stelle einnehmen. Ist  $m=0$ , so besteht (1) aus einer Summe von *reinperiodischen* Gliedern, die in ihrer Gesamtheit die hinreichende Bedingung dafür darstellen, dass das betrachtete System von aufeinanderwirkenden materiellen Punkten (Himmelskörper) unendlich oft und beliebig nahe zur Ausgangslage, bezw. zur ursprünglichen Konstellation zurückkehrt. Notwendige Voraussetzung dabei ist nur, dass die in (1) auftretenden Coeffizienten A und B die üblichen, für die Convergenz trigonometrischer Reihen geforderten Bedingungen erfüllen. Nach dem an anderer Stelle (vergl. des Verfassers Untersuchungen über Stabilität: 1908 über Stabilität im strengen Sinne, 1910 über Stabilität dynamischer Systeme in der Mechanik des Himmels, 1911 über Kommensurabilitäten im Sonnensystem und 1913 über Stabilität im Sonnensystem mit besonderer Berücksichtigung der sonnennahen Planeten) gegebenen Stabilitätsbegriff hat man es also hier mit einem *stabilen* System zu tun. Im Gegensatz zu diesem speziellen Fall steht der ebenso spezielle, wo die Lösung der gegebenen Differentialgleichung nur Glieder mit reinen Potenzen von  $t$  enthält, also aus *reinen Säkulargliedern* besteht. Das Auftreten solcher Glieder wurde von jeher als Kriterium für Unstabilität angesehen, ebenso wie das Auftreten von nur rein periodischen Gliedern als Kriterium für die stabile Bewegung gilt. Während indessen hier, wie in den obengenannten Abhandlungen verschiedentlich dargetan wurde, noch Voraussetzungen über Convergenz gemacht werden müssen, ist dort die Unstabilität der Bewegung ohne Einschränkung als erwiesen anzusehen. Zumeist ergibt sich diese Tatsache ohne strenge Untersuchung unmittelbar aus der Art des vorgelegten Bewegungsproblems.

Ein typisches Beispiel hiezu liefert die Bewegung eines Planeten in einem circumsolaren Medium (Mitteilungen der Berner Naturforschenden Gesellschaft 1913) von gegebener Dichtigkeit. Schon die erste Ueberlegung lässt hier die stetige Annäherung des Planeten an die Sonne erkennen und der mathematischen Analyse bleibt nur übrig, die Art und etwa noch die Dauer der Annäherung festzustellen. Dass da periodische Glieder *nicht* auftreten können, dürfte jedenfalls auf den ersten Blick klar sein. Je nach den Voraussetzungen, unter denen man die Bewegung vor sich gehen lässt, erhält man denn in der Tat auch die verschiedensten Resultate, die aber alle nur rein säkulare Glieder aufweisen. Im einfachsten Falle ergeben sich beispielsweise für die rechtwinkligen Coordinaten  $x$  und  $y$  des Ortes, an dem sich der Planet zur Zeit  $t$  befindet, die Ausdrücke

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= A \exp(-\alpha^2 t) + B \exp(-\beta^2 t) \\ y &= C \exp(-\alpha^2 t) + D \exp(-\beta^2 t) \end{aligned}$$

oder zwischen  $x$  und  $y$  die Beziehung

$$(3) \quad (Cx - Ay)^{\alpha^2} : (By - Dx)^{\beta^2} = (BC - AD)^{\alpha^2 - \beta^2}$$

Der säkulare Charakter der rechten Seite von (2) ist hier offenbar, indem für zunehmende Werte von  $t$  sowohl  $x$  als  $y$  sich dem Grenzwert  $0$  nähern. Die Bahngleichung (3) stellt eine spiralähnliche Curve dar, auf der sich der Planet mehr und mehr der Sonne nähert, um schliesslich mit derselben zusammenzutreffen. Ist in (1)  $m \neq 0$ , so sind die rechtsstehenden Glieder *gemischt säcular* und die Untersuchung dieser Lösung führt auf besonders bemerkenswerte Resultate, bemerkenswert namentlich in Hinsicht auf die Art, wie bei der Integration der Differentialgleichungen der Himmelsmechanik und verwandten Gebieten solche Glieder auftreten. Der Umstand, dass dieselben auch in solchen Problemen der Mechanik auftreten, in denen die Stabilität der in Frage stehenden Bewegung nicht zweifelhaft ist, hat den Gedanken nahegelegt, dass das eingangs erwähnte Integrationsverfahren damit in Zusammenhang stehen könnte. Wie der Verfasser in der zweiten der oben zitierten Abhandlung gezeigt hat, trifft dies in der Tat in

einem dort behandelten Falle wirklich zu. Dagegen wäre es verfrüht, hieraus Schlüsse auch hinsichtlich anderer hiehergehörender Probleme zu ziehen. Jedenfalls sind die Untersuchungen in dieser Richtung noch fortzusetzen.

3. M. le Prof. Dr D. MIRIMANOFF (Genève) : *Sur le « Tile Theorem » de M. W.-H. Young.*

4. M. le Prof. Dr J. FRANEL (Zurich) : *Sur les formules sommatoires.*

5. M. le Prof. Dr Fr. DANIËLS (Fribourg). — *Nouvelle démonstration du théorème de Pohlke.*

Trois vecteurs coplanaires  $(OA_k) \equiv a_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) peuvent toujours s'obtenir par la projection parallèle de trois vecteurs égaux rectangulaires, pourvu que parmi les quatre points  $O, A_1, A_2, A_3$ , il n'y ait pas plus de trois en ligne droite.

1. Pour qu'un système de vecteurs-unités rectangulaires  $i_1, i_2, i_3$ , lorsque la projection se fait dans la direction d'un vecteur  $r$  par des droites de longueurs  $x_1, x_2, x_3$ , donne des vecteurs proportionnels aux  $a_k$ , il faut que les vecteurs  $i_1, i_2, i_3, r$ , les scalaires  $x_1, x_2, x_3$  et le facteur de proportionnalité  $m$  satisfassent à

$$(1) \quad \begin{array}{lll} i_1 - x_1 r = m a_1 & i_2 \cdot i_3 = 0 & i_1 \cdot i_1 = 1 \\ i_2 - x_2 r = m a_2 & i_3 \cdot i_1 = 0 & i_2 \cdot i_2 = 1 \\ i_3 - x_3 r = m a_3 & i_1 \cdot i_2 = 0 & i_3 \cdot i_3 = 1 \end{array} \quad r \cdot r = 1$$

Nous cherchons 1° le vecteur  $r$  en fonction des  $i_k$ , 2° le facteur  $m$ , 3° les scalaires  $x_k$ .

2. Les  $a_k$  étant coplanaires, il existe des nombres  $\mu_k$  tels que

$$(2) \quad \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 = 0 \quad \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1$$

Multipliant les équations (1) par les  $\mu_k$  on obtient donc en ajoutant

$$(3) \quad r = \underline{\mu_1 i_1 + \mu_2 i_2 + \mu_3 i_3}$$

$$(4) \quad \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 \equiv r \cdot (x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3) \equiv r \cdot r = 1$$

3. Formons maintenant à l'aide des équations (1) deux « dyadiques » (Gibbs-Wilson, Vectoranalysis Chap. V) avec leurs doubles produits scalaires et vectoriels :

$$(5) \quad \Phi \equiv (i_1 - x_1 r) i_1 + \dots = I - r x$$

$$(6) \quad \Psi \equiv a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$$

$$(7) \quad \Phi = m \Psi$$

$$(8) \quad \Phi^2 \equiv \Phi : \Phi = 1 + r \cdot r = m^2 \Psi^2 = m^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

$$(9) \quad \Phi_2 \equiv \frac{1}{2} \Phi \times \Phi = r r = m^2 \Psi_2 = m^2 (a_2 \times a_3 i_1 + \dots)$$

$$(10) \quad \Phi_2^2 \equiv \Phi_2 : \Phi_2 = r \cdot r = m^4 \Psi_2^2 = m^4 (a_2^2 a_3^2 \sin^2 \alpha_1 + \dots) \\ = 4m^4 \sigma^2 : \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2$$

Les angles  $(a_1, a_2)$  etc. sont  $\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2$ . La surface du triangle formé par les  $|\mu_k a_k|$  est  $\sigma$ . L'« idemfacteur » est I. Les équations (8) et (10) fournissent immédiatement

$$(11) \quad m^2 = \frac{\Psi^2 + \varepsilon \sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2}}{2\Psi_2^2} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

4. Nous introduisons maintenant trois vecteurs auxiliaires coplanaires  $a^2 k \mathcal{I}_k$ , faisant des angles  $(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2) = 2\alpha_3$  etc. Leur somme  $\mathcal{I}$  satisfait aux relations :

$$\mathcal{I}^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 - 4(a_2^2 a_3^2 \sin^2 \alpha_1 + \dots) = \Psi^4 - 4\Psi_2^2 \\ a_1^2 \mathcal{I} \cdot \mathcal{I}_1 = a_1^2 (a_1^2 + a_2^2 \cos 2\alpha_3 + a_3^2 \cos 2\alpha_2) = a_1^2 \Psi^2 - 2\Psi_2^2 (\mu_2^2 + \mu_3^2)$$

Si donc nous élevons au carré la première des équations (1) nous aurons

$$(x_1 - \mu_1)^2 = \frac{1}{2\Psi_2^2} [(\Psi^2 + \varepsilon \sqrt{\Psi^4 - 4\Psi_2^2}) a_1^2 - 2\Psi_2^2 (1 - \mu_1^2)] \\ = \frac{a_1^2}{2\Psi_2^2} (\mathcal{I} \cdot \mathcal{I}_1 + \varepsilon |\mathcal{I}|)$$

ce qui n'est positif que lorsque  $\varepsilon = 1$ . En appelant  $(\mathcal{I}, \mathcal{I}_k) = 2\Phi_k$  nous aurons enfin

$$(12) \quad x_k = \mu_k + \varepsilon_k \frac{a_k \cos \Phi_k \sqrt{\mathcal{I}^2 / \Psi_2^2}}{2\Psi_2^2} \equiv \mu_k + \varepsilon_k \Delta_k \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

5. On démontre ensuite sans peine que les vecteurs, de grandeurs proportionnelles aux  $|a_k|$

$$(13) \quad i_k - (\mu_k + \varepsilon_k \Delta_k) r$$



sont coplanaires et font des angles égaux à ceux formés par les  $\alpha_k$  seulement, lorsque les  $\varepsilon_k$  ont tous les mêmes signes ou tous des signes contraires à ceux des  $\cos \Phi_k$ . Il y a donc deux solutions.

La construction de la normale au plan contenant les vecteurs (13), donnée par le produit vectoriel de deux de ses vecteurs

$$(14) \quad (\mu_1 + \varepsilon_1 A_1) i_1 + (\mu_2 + \varepsilon_2 A_2) i_2 + (\mu_3 + \varepsilon_3 A_3) i_3$$

ou  $\underline{(a_2 a_3 \sin \alpha_1 \pm a_1 \cos \Phi_1 \sqrt{i}) i_1 + (a_3 a_1 \sin \alpha_2 \pm a_2 \cos \Phi_2 \sqrt{i}) i_2 + \dots}$

ne présente aucune difficulté. Il en est de même du vecteur  $r$  donnant la direction des droites projetantes :

$$(15) \quad \mu_1 i_1 + \mu_2 i_2 + \mu_3 i_3$$

ou  $\underline{a_2 a_3 \sin \alpha_1 i_1 + a_3 a_1 \sin \alpha_2 i_2 + a_1 a_2 \sin \alpha_3 i_3}$

6. M. le Prof. D<sup>r</sup> M. PLANCHEREL (Fribourg): *Un théorème de convergence des représentations intégrales d'une fonction arbitraire.*

7. M. le Prof. D<sup>r</sup> LOUIS KOLLROS (Zurich). — *Quelques problèmes de géométrie.*

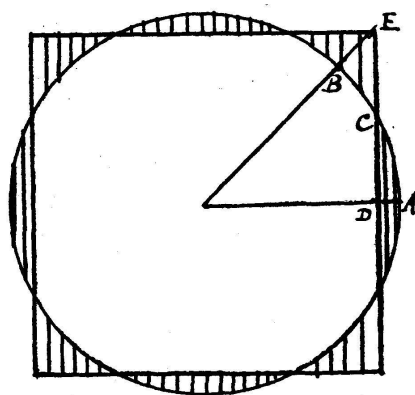
1. *Sur les sphéroïdes.* — Dans la séance du 1<sup>er</sup> avril 1914 de la Société mathématique de France, M. Lebesgue a énoncé quelques propriétés des courbes de largeur constante, des orbiformes, comme il les appelle; il a rappelé, en particulier, que toutes les orbiformes de largeur donnée  $d$  ont la même longueur, que le cercle a la plus grande surface et que l'orbiforme d'aire minimum est le triangle curviligne formé de trois arcs de cercle ayant pour centres les sommets d'un triangle équilatéral et pour rayon le côté  $d$  de ce triangle.

On peut se demander s'il existe des théorèmes analogues dans l'espace, entre autres si les surfaces de largeur constante  $d$  (que nous appellerons des *sphéroïdes*) ont toutes la même aire. Or, les projections orthogonales d'un sphéroïde sur un plan quelconque sont évidemment des orbiformes de même largeur  $d$ ; elles ont donc toutes un pourtour de même longueur. De plus, l'aire d'un corps convexe, en particulier d'un sphéroïde, est

égale <sup>1)</sup> à quatre fois la moyenne arithmétique des aires de ses projections orthogonales dans toutes les directions. Il en résulte immédiatement que les *sphéroïdes de largeur donnée n'ont pas tous la même aire* et que *la sphère a la plus grande* (a fortiori le plus grand volume).

2. *Sur un problème élémentaire.* — Une question qui m'a été posée par un ingénieur, à propos d'une construction économique de silos en béton, m'a conduit au problème suivant : *Un carré et un cercle concentriques empiètent l'un sur l'autre; trouver le minimum de l'aire comprise entre les deux figures.* Ce minimum est différent suivant que le cercle ou le carré varie.

Si le carré reste fixe, un accroissement donné au rayon du cercle montre que l'accroissement correspondant de l'aire considérée est nul, aux infiniment petits du second ordre près, lorsque le point C est le milieu de l'arc AB. Il y a donc *minimum lorsque le carré fixe divise la circonférence en huit parties égales.*



La question correspondante dans l'espace, relative à un cube et une sphère concentriques se traite d'une manière analogue.

3. *Sur une généralisation de l'hypocycloïde de Steiner.* — Une étude géométrique des principaux covariants des systèmes linéaires de quadriques m'a conduit, entre autres, au résultat suivant :

On sait que l'enveloppe des droites de Simson relatives à un triangle et aux points de la circonférence circonscrite est une hypocycloïde à 3 rebroussements ; l'enveloppe des axes des paraboles inscrites à ce triangle est identique à celle des asymptotes des hyperboles équilatères conjuguées au triangle : c'est aussi une hypocycloïde à 3 rebroussements : la développée de la première. — Dans l'espace, le lieu des points, dont les projections sur les faces d'un tétraèdre sont situées dans un

1) *Minkowski, Œuvres, t. II, p. 215.*

même plan  $\pi$ , est une surface bien connue du 3<sup>m</sup>e ordre, à 4 points doubles, qui est en même temps le lieu des foyers des paraboloides de révolution,  $p$ , inscrits au tétraèdre et le lieu des centres des hyperboloïdes équilatères,  $h$ , conjugués au tétraèdre. L'enveloppe des plans  $\pi$  est une surface du 6<sup>m</sup>e ordre et de la 4<sup>m</sup>e classe que Beltrami <sup>1)</sup> a appelée : enveloppe steiné-rienne.

Je trouve que la surface focale de la congruence des axes des paraboloides,  $p$ , est identique à l'enveloppe des cônes asymptotes des hyperboloïdes,  $h$ , et qu'elle est en même temps le lieu des centres de courbure principaux de l'enveloppe steiné-rienne.

8. Herr H. von WAYER (Oberwil, Baselland): *Eine spezielle metrische Geometrie.*

9. Herr A. GIGER (Zürich): *Ueber die dritte Steiner'sche Erzeugungweise der Fläche 3. Ordnung.*

10. Herr Prof. Dr. K. MERZ (Chur). — *Die Steiner'sche Fläche in quadratischer Transformation.*

Durch  $\xi^2 = x$ ,  $\eta^2 = y$ ,  $\zeta^2 = z$  wird die Steinersche Fläche  $\Sigma$  übergeführt in das Oktaeder 80.

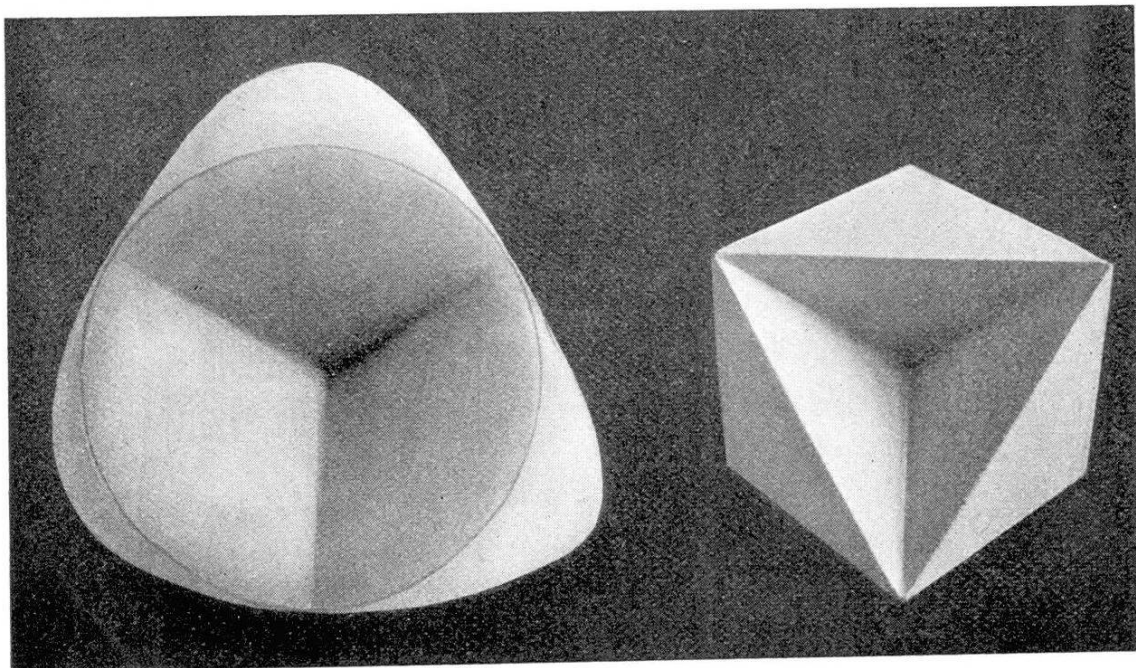
$$\Sigma : \sqrt{\frac{x}{\alpha}} + \sqrt{\frac{y}{\beta}} + \sqrt{\frac{z}{\gamma}} = 1 \quad ; \quad 80 : \frac{\xi}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\eta}{\sqrt{\beta}} + \frac{\zeta}{\sqrt{\gamma}} = 1$$

Einem Punkte  $P(x, y, z)$  von  $\Sigma$  entsprechen im allgemeinen 8P( $\xi, \eta, \zeta$ ) durch die Wahl der Vorzeichen. 80 besitzt als zerfallende Fläche 8. Ordnung 28 Doppelgerade, 8 dreifache und 12 vierfache Punkte. Diesen entsprechen die Singularitäten der Fläche 4. Ordnung  $\Sigma$ . Den zu vieren in jeder der Koordinatenebenen gelegenen Oktaederkanten  $W$  entsprechen drei Parabeln  $W_2$ , längs denen  $\Sigma$  diese Ebenen berührt. Der vierte singuläre Kegelschnitt von  $\Sigma$  liegt, wie die ihm entsprechenden 4 Geraden von 80, unendlich fern. Durch jede Oktaederecke  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{X}_0, \mathfrak{Y}_0, \mathfrak{Z}_0$  gehen ferner zwei Gerade je parallel zu

<sup>1</sup> *Opere matematiche*, t. III, p. 57.

einer Koordinatenebene; ihnen entsprechen die drei Doppelgeraden von  $\Sigma$ , die sich im dreifachen Punkte  $\mathfrak{S}(\alpha, \beta, \gamma)$  treffen. Den 6 Oktaederecken entsprechen drei Kuspidalpunkte von  $\Sigma$  auf den Achsen in den begl. Abständen  $\alpha, \beta, \gamma$  vom Nullpunkt, während drei unendlich fern liegen.

Um eine *eindeutige Abbildung* zu erzielen und damit zugleich eine Veranschaulichung der gegenseitigen Lage der Gebiete von  $\Sigma$  durch Teile von Ebenen, werde von 80 nur derjenige Teil in Betracht gezogen, der in einem der Oktanten liegt, z. B.  $(+++)$ . Ein solcher *Oktaederoktant* |80| kann aus der Ebene eines Oktaederdreiecks  $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$  hergestellt werden durch Aufklappungen längs Kanten  $W$ , wie die Figuren  $I^a$  u.  $I^b$  zeigen. Durch kollineare Umformung entsteht daraus ein endlich begrenzter Oktaederoktant im Innern eines Koordinatentetraeders,



wie ihn Figur II darstellt, sowie das beigefügte Bild neben einem Modell <sup>1</sup> der Steinerschen Fläche. *Die 6 Ecken dieses Oktaederoktanten und seine drei Achsen mit ihrem Schnittpunkt entsprechen den 6 Kuspidalpunkten, den drei Doppelgeraden und dem dreifachen Punkte der Steinerschen Fläche.* Den singulären Kegel-

<sup>1</sup> Aus dem Verlage von Hr. Martin SCHILLING, Leipzig, nach KUMMER, *Monatsberichte*, Ak. Berlin, 1863, S. 539.

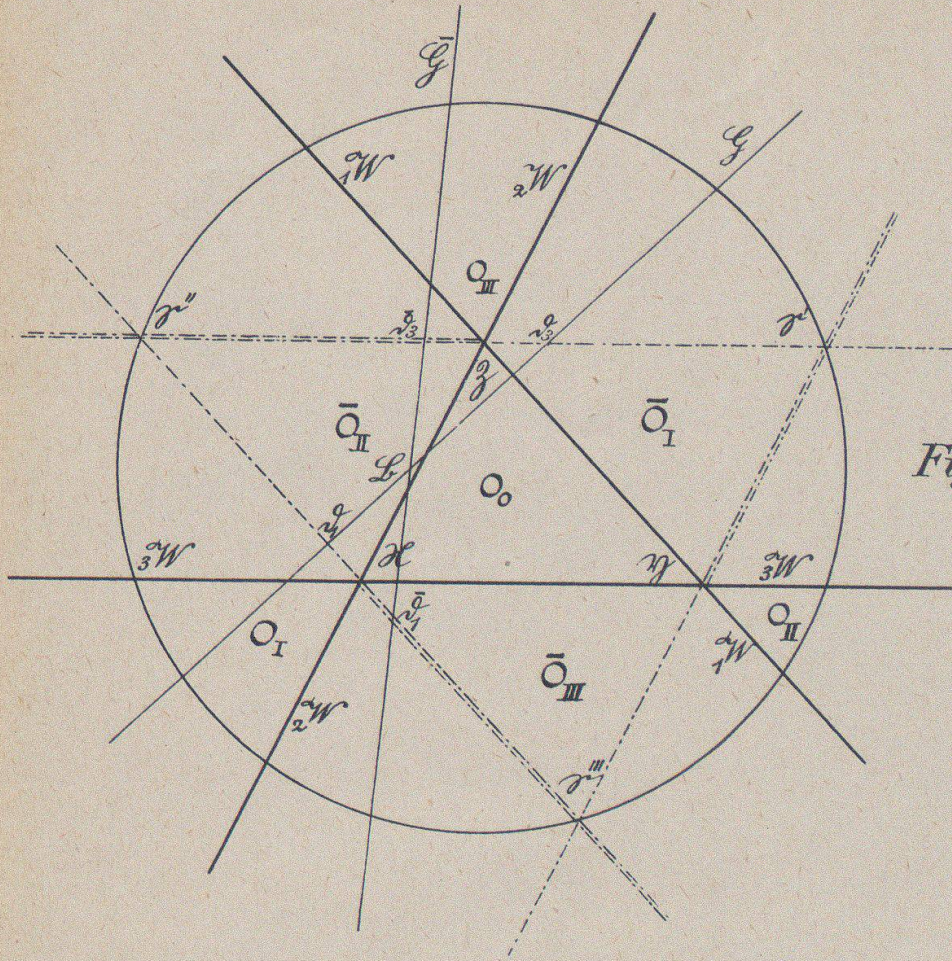
schnitten  $W_2$  entsprechen die in den Ebenen des Tetraeders gelegenen Dreiecke, von denen aus einspringende Raumecken nach  $\mathcal{S}$  gehen.

In der Hauptebene  $\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$  sind zu  $\mathcal{S}'\mathcal{S}''\mathcal{S}'''$  zwei konjugierte Gerade  $G$  u.  $\bar{G}$  gezeichnet, die einem Hyperboloid  $H_2$  angehören, das in  $\mathcal{B}''$  die Hauptebene berührt und O I I I I zum Poltetraeder hat. Durch centrische Involutionen von I, II, III aus und durch geschaarte über die Gegenkanten entstehen aus  $G$  u.  $\bar{G}$  die windschiefen Vierecke  $|8G|$  u.  $|8\bar{G}|$ , die zwei Ellipsen  $G_2$  u.  $\bar{G}_2$  abbilden einer Tangentialebene  $H$  der Steinerschen Fläche. Wenn  $G$  ein Strahlbüschel um  $J$  beschreibt, so umhüllt  $\bar{G}$  eine quadratische Kurve  $\bar{C}_2$  u.  $G$  erzeugt mit  $\bar{G}$  eine kubische Kurve  $C_3$  mit  $J$  als Doppelpunkt. Die Uebertragung von  $C_3$  durch die quadratische Raumabbildung auf die Steinersche Fläche ergibt die *Berührungskurve*  $\bar{C}_6$  des *Tangentialkegels*, der von einem Punkte  $J$  der Fläche an sie gelegt wird. Aus  $\bar{C}_2$  entsteht die Restschnittkurve  $C_4$ .

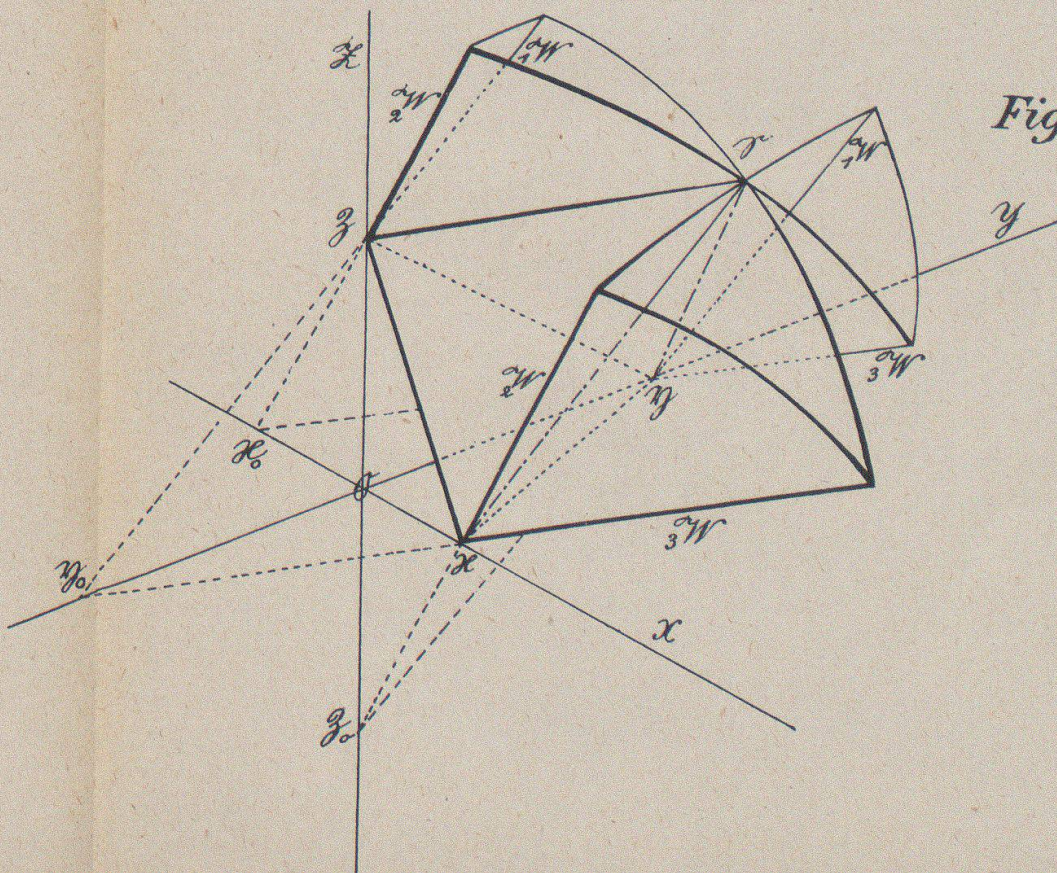
In der Abbildung in der Hauptebene gehen alle  $C_3$  durch die Ecken des von den  $W$  gebildeten Vierseits, wodurch zugleich die Abbildung der Reciproken zur Steinerschen Fläche erhalten wird.

Den Tangentialebenen, die von einem beliebigen Punkte  $P(x_i)$  an die Steinersche Fläche gehen, entsprechen diejenigen Flächen des Bündels der  $H_2$  durch die  $8P(\xi_i)$ , welche die Hauptebene berühren. Der Ort der Berührungspunkte ist eine allgemeine  $C_3$ , und ihre Uebertragung ergibt die Berührungskurve  $C_6$  eines allgemeinen Tangentialkegels an die Steinersche Fläche.

Eine eingehendere analytische Darstellung findet sich in der *Programmeilage* 1913/14 der Bündnerischen Kantonsschule : K. MERZ, « *Parallelflächen und Centralfläche eines besonderen Ellipsoides und die Steinersche Fläche.* »



Figur I<sup>a</sup>



Figur I<sup>b</sup>

Figur II

