

# Unicité du développement d'une fonction en série de polynômes de Legendre et expression analytique des coefficients de ce développement

Autor(en): **Plancherel, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali**

Band (Jahr): **95 (1912)**

PDF erstellt am: **20.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-90211>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

indications relatives à différents polyèdres rencontrés dans le cours de ses recherches.

8. Prof. D<sup>r</sup> M. PLANCHEREL, Fribourg. *Unicité du développement d'une fonction en série de polynômes de Legendre et expression analytique des coefficients de ce développement.*

$P_n(x)$  désignant le polynôme de Legendre  $\frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$ , nous appellerons série de polynômes de Legendre toute série de la forme  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$ .  $f(x)$  étant une fonction sommable dans l'intervalle  $(-1, +1)$ , on peut former les *coefficients de Legendre*  $f_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx$ . La série  $\sum f_n P_n(x)$  formée au moyen de ces coefficients n'est pas nécessairement convergente; nous l'appellerons la *série de Legendre* de  $f(x)$ ,  $f(x)$  en sera dite la *génératrice*.

On peut se poser au sujet de ces séries des questions analogues à celles que *Cantor* et *Dubois-Reymond* ont posées et partiellement résolues dans la théorie des séries trigonométriques. Les théorèmes suivants constituent une réponse partielle à ces questions.

I. *La condition nécessaire et suffisante pour que dans tout l'intervalle  $(-1, +1)$  à l'exception au plus d'un ensemble réductible de points,  $\sum a_n P_n(x)$  converge vers zéro, est que  $a_n = o(1/n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Ce théorème est dû à M. Dini. La méthode qui me donne les théorèmes suivants m'en fournit une démonstration plus simple.*

II. *Si la série  $\sum a_n P_n(x)$  converge dans tout l'intervalle  $(-1, +1)$ , à l'exception au plus d'un ensemble réductible de points, vers une fonction  $f(x)$  bornée, c'est une série de Legendre dont  $f(x)$  est la génératrice.*

III. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série  $\sum a_n P_n(x)$  (convergente ou non) possède une fonction génératrice*

$f(x)$  est que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-1}^x P_n(x) dx$  converge dans tout l'intervalle  $(-1, +1)$  vers  $\int_{-1}^x f(x) dx$ .

Dans les théorèmes analogues de Cantor et de Dubois-Rey-  
mond, l'élément analytique qui joue un grand rôle dans la  
démonstration est l'expression  $\frac{1}{h} [f(x+h) + f(x-h) -$   
 $2f(x)]$  dont la limite pour  $h = 0$  donne la dérivée seconde  
généralisée de  $f(x)$ . Pour trouver dans notre cas une expression  
jouant un rôle analogue, nous considérerons une fonction  $F$   
 $(\delta, \varphi)$  sur la sphère de rayon 1. Décrivant autour du point  $(\delta, \varphi)$   
comme centre un petit cercle de rayon sphérique  $h$ , appelant  
 $(\delta', \varphi')$  les points de ce petit cercle,  $ds'$  l'élément d'arc et  $s$  le  
périmètre de ce petit cercle, nous formerons l'expression

$$\Delta_2 F(\delta, \varphi; h) = \frac{1}{\sin^2 \frac{h}{2}} \left[ \frac{1}{s} \int F(\delta', \varphi') ds' - F(\delta, \varphi) \right]$$

Notant  $\Delta_2 F(\delta, \varphi)$  la limite de cette expression pour  $h = 0$ ,  
il vient, si  $F$  possède une différentielle seconde,

$$\Delta_2 F = \frac{1}{\sin \delta} \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \sin \delta \frac{\partial F}{\partial \delta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \delta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}.$$

En particulier,  $\Delta_2 P_n(\cos \delta) = -n(n+1)P_n(\cos \delta)$ . L'ex-  
pression  $\Delta_2 F(\delta, \varphi; h)$  jouit de propriétés d'extrémum qui per-  
mettent de suivre dans la démonstration de nos théorèmes une  
marche analogue à celle donnée par Hölder dans le cas des  
séries trigonométriques. Faisant correspondre maintenant par  
la substitution  $x = \cos \delta$ , à toute série  $\sum a_n P_n(x)$  une fonction  
 $F(\delta) = -\sum \frac{a_n}{n(n+1)} P_n(\cos \delta)$ , on démontre que  $\lim_{h \rightarrow 0} \sin$   
 $\frac{h}{2} \Delta_2 F(\delta, h) = 0$  et qu'en tout point de convergence de la série  
 $\sum a_n P_n(x)$ ,  $\Delta_2 F(\delta) + a_0 = \sum a_n P_n(\cos \delta)$ . L'utilisation de ces  
propriétés conduit sans difficulté aux théorèmes énoncés plus  
haut.