Ein für die Aeronautik grundlegendes Gesetz der Mechanik

Man erhält die drei Zahlen a, b, c eines Tripels nach den Formeln

$a = x^2 - y^2 \qquad b = 2xy \qquad c = x^2 + y^2$

x und y sind dabei ganze Zahlen, wobei x größer als y zu wählen ist. Enthalten x und y keine gemeinsamen Faktoren und ist eine der beiden Zahlen gerade, so erhält man primitive, d.h. teilerfremde Tripel. Durch Multiplikation der primitiven Tripel mit beliebigen positiven Zahlen erhält man abgeleitete Tripel. Die nachstehende Tabelle enthält die kleinsten primitiven Tripel.

5. Verzeichnis der benützten Literatur

(1) Behnke-Süß-Fladt: Grundzüge der Mathematik, Bd. I. Vandenhoeck und Ruprecht 1958

(2) Gonseth-Marti: Planimetrie Leitfaden, 2. Teil. Orell Füßli 1936

(3) Wolff: Handbuch der Schulmathematik, Bd. III. Schroedel, Hannover

(4) Ebneter: Geometrie, 2. Heft. Fehr'sche Buchhandlung, St. Gallen 1956

(5) Weiß: Geometrie für Sekundarschulen, I. und II. Tei·l Kant. Lehrmittelverlag, Zürich

(6) Fladt: Mathematik, Bd. I. Moritz Diesterweg 1962

(7) Fladt-Krfat-Dreetz: Mathematisches Unterrichtswerk, IV. Bd. Moritz Diesterweg 1955

(8) Bieri: Geometrie. Sammlung ‚Lebendiges Wissen', Heft 10. Bubenbergverlag, Bern

(9) Weiß: Geometrie für Sekundarschulen, III. Teil. Kant. Lehrmittelverlag, Zürich

Ein für die Aeronautik grundlegendes Gesetz der Mechanik

Dr. P. Theodor Schwegler OSB, Einsiedeln

In jüngster Zeit brachte die Presse allerlei Angaben über die Höhe (bzw. Erdentfernung), Zeit und Geschwindigkeit der Erdumflüge der Russen und der Amerikaner. Mancher Leser wird sich da gefragt haben, welcher Zusammenhang zwischen den angegebenen Größen bestehe. Dieser Zusammenhang soll im folgenden so einfach als möglich dargestellt werden.

Die Mathematiker, die die Erdumflüge zu berechnen hatten, mußten darauf bedacht sein, daß die Erdanziehung durch die Geschwindigkeit der Kapsel paralysiert wurde. Bei kleinerer Geschwindigkeit entstand die Gefahr, daß die Kapsel in dichtere Luftschichten und wegen der Reibung in Brand geriet oder bei längerer Fahrt irgendwo mit dem Erdboden zusammenstieß. War die Geschwindigkeit größer, so mußte sich die Kapsel immer weiter von der Erde entfernen und im Weltenraum verlieren. Die eingeschlagenen Kurven waren jeweils *Ellipsen*, die, vom Erdmittelpunkt aus gesehen, einem Kreise sehr nahe kamen, war doch die numerische Exzentrizität der von Glenn beschriebenen Bahn r. $^1/_{170}$. Für die Umlaufgeschwindigkeit kann daher die Exzentrizität ε vernachlässigt werden. Eine technische *Kreis*linie läßt sich zwar mathematisch errechnen, ist aber von der Wahrscheinlichkeitsrechnung her höchst unwahrscheinlich.

Im folgenden bezeichnet c die Geschwindigkeit, a die Erdbeschleunigung von 9,81 m/s², r den Äquator-Radius der Erde (6378388 m), t die Zeit des Umlaufes; a_o, c_o und t_o die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und die Umlaufzeit im Abstand r_o *vom Erdmittelpunkt*. Da die Anziehungskraft der Erde mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt, gelten die Beziehungen:

$a_o : a = r^2 : r_o^2$ und $c_o : c = \sqrt{r} : \sqrt{r_o}$

Aus dem elementar leicht ableitbaren Gesetz der Kreisbewegung $c^2 = a \cdot r$ ergibt sich nun für einen Erdumflug in *möglichster Erdnähe:*

$c = \sqrt{6378388 \cdot 9{,}81}$ m/s $= 7906$ m/s oder 28,46 km/h und

$t = \frac{2\pi r}{c} = 2\pi \cdot \sqrt{\ /_a} = 5070\,\text{s} = 1\,\text{h}\ 24{,}5\,\text{min}.$

Beim Erdumflug des Amerikaners Glenn war r_o im Mittel $= r + 208$ km, also $r_o/r = 1{,}0326$. Daraus ergeben sich die Werte:

$c_o = \sqrt{a_o \cdot r_o} = r \cdot \sqrt{a/r_o} = 7784$ m/s oder 28,023 km/h

und $t_o = \frac{2 r_o \pi}{c_o} = \frac{2 r_o \pi}{r} \cdot \sqrt{r_o/a} = 5316\ \text{s} = 1\ \text{h}\ 28\ \text{min}\ 36\,\text{s}.$

Diese letzte Formel, auf die Form $t_o^2 = \frac{4\pi^2}{a \cdot r^2} \cdot r_o^3$ gebracht, spiegelt unmittelbar das dritte Keplersche Gesetz der Planetenbahnen wider, wonach sich die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten wie die Kuben der großen Halbachsen – genauer wie die Kuben der Abstände vom gemeinsamen Schwerpunkt der beiden Massen. Wenn die Kapsel Glenns der eine ‹Planet› ist, dann eine der Kapseln der russischen Aeronauten oder der Mond der Vergleichs-Planet.