

Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 50 (1963)
Heft: 6-7

Artikel: Moderne Begriffe in der Mittelschulmathematik
Autor: Regli, Franz
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-530965>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Franz Regli, Professor, Luzern

1. Einleitung

Felix Klein sollte heute für jeden Mathematiklehrer an der Mittelschule zum Wegweiser für einen modernen Geometrieunterricht geworden sein. Seine Forderungen nach einem axiomatisch einwandfreien, logischen Aufbau der Geometrie sind in der Abbildungsgeometrie als Invariantentheorie in bezug auf eine gegebene Abbildungsgruppe verwirklicht worden. Und diese Abbildungsgeometrie beginnt, fast 90 Jahre nach dem ersten Ruf Kleins, Einzug in unsere Schulstuben zu halten. Daß dies hierzulande so spärlich und langsam vor sich geht, dürfte nicht zuletzt der mangelnden Experimentierfreudigkeit zuzuschreiben sein. Jedes Experiment trägt Risiken in sich und erfordert vom experimentierenden Lehrer großen Zeitaufwand. So wird zumeist noch auf die über 2000 Jahre alte sichere Karte «Euklid» gesetzt, was in Anbetracht der manchenorts bestehenden Lehrverpflichtung bei großen Schülerzahlen wenigstens zum Teil verständlich ist. Eine Teilschuld trägt aber auch die Hochschule. Was der Sekundar- oder der Progymnasiallehrer von der Hochschule an mathematischem Rüstzeug in vielen Fällen miterhält, ist gerade das, was er an seiner Schulstufe nie werden brauchen können. Es reicht oft im besten Falle zu einem einigermaßen sauberen *Funktionsbegriff*.

Dem Funktionsbegriff der Analysis entspricht nun in der Geometrie der *Abbildungsbegriff*. Der gruppentheoretische Aufbau der Geometrie aber führt zwangsläufig zu Strukturfragen, die einige Anforderungen an abstrakte Denken stellen. Struktur und Abbildungen, und somit auch der Funktionsbegriff, lassen sich aber letztlich ohne Kenntnis der Abbildungs- und Strukturträger, der endlichen und unendlichen Mengen, nicht verstehen. Es ist nun nicht die Absicht, elementare Mengenlehre kapitelweise in den Mittelschullehrstoff aufzunehmen, um einmal mehr das Lehrgebäude zusammenhanglos aufzustocken. Die Mengenlehre soll aber auch nicht auf das Nebengeleise einer Arbeitsgemeinschaft abgeschoben und damit der Liebhaberei einzelner überlassen werden. Es geht wie bei der Abbildungsgeometrie vielmehr darum, die grundlegenden mengentheoretischen Begriffe und Relationen in den bekannten Lehrstoff einzubauen und diesen nach den tragenden Gesichtspunkten hin neu zu ordnen. Dabei wird dies oder jenes über Bord geworfen, anderes aber ausgebaut oder neu orientiert werden müssen. Außer der Technik können heute auch Volkswirtschaft, Medizin, Biologie und andere

Wissenschaften mathematische Methoden nicht mehr entbehren. Gerade die Praxis verlangte die Aktivierung oder sogar die Schöpfung neuer mathematischer Theorien. Wir denken dabei an Lineare Programmierung, Spieltheorie, an Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie an die Theorie der Rechenautomaten. Die Mittelschule wird in Zukunft auf die Fragestellungen dieser Theorien vorbereiten müssen.

Die OECE hat uns vor Monaten in der Schrift «Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire» ein auf Mengen- und Gruppentheorie aufgebautes Lehrprogramm für die Mittelschule vorgelegt. Ob dieses Programm zweckmäßig und für uns durchführbar ist, soll hier nicht diskutiert werden; jedenfalls enthält es viele Anregungen und Hinweise zur Neuorientierung des Mathematikunterrichts. Auch die bestbekannte Zeitschrift «Der Mathematikunterricht» aus dem Verlag Ernst Klett, Stuttgart, befaßt sich in mehreren Artikeln mit den aufgeworfenen Fragen.

2. Die einfachsten Grundbegriffe der elementaren Mengenlehre

Es sollen in diesem Abschnitt die einfachsten Begriffe der elementaren Mengenlehre dargestellt werden. Die Darstellung ist absichtlich knapp gehalten und muß abbrechen, bevor die Theorie interessant wird. Ausführlichere und wesentlich weiter gehende Einführungen existieren heute zur Genüge. Diese eignen sich aber meist für die Verwendung in mathematischen Arbeitsgemeinschaften oder zum Studium. Es geht hier vielmehr darum, dem Leser, der die Mengenlehre nur dem Namen nach kennt, die *Grundbegriffe* vor Augen zu führen und nachher zu zeigen, wie die Mathematik der Unter- und Mittelstufe mit mengentheoretischen Begriffen «fermentiert» werden kann. Der Lehrer wird allerdings mit der Kenntnis nur dieser wenigen Begriffe und Relationen nicht an die Neuorientierung seines Unterrichts herantreten dürfen. Die Eingliederung der Mengenlehre in den Stoff der Oberstufe sowie deren Behandlung in den ma-

thematischen Arbeitsgemeinschaften soll hier nicht behandelt werden. Der Mathematiklehrer an der Oberstufe wird nach guter Vorbereitung der Schüler an der Unter- und Mittelstufe seinen Unterricht ohnehin gerne und ohne Schwierigkeit nach den neuen Gesichtspunkten orientieren. Es wird auch kaum ein Gebiet der Oberstufenmathematik, inklusive Darstellende Geometrie, geben, in dem mengentheoretische Begriffe nicht nutzbringend angewandt werden können.

Und nun zur Mengenlehre selbst:

Georg Cantor (1845–1918), der geniale Begründer der Mengenlehre, sagt:

Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen.

In dieser Definition sind zwei Punkte zu beachten:

1. «bestimmter Objekte» soll heißen: Für jedes Objekt soll eindeutig feststehen, ob es Element der betrachteten Menge ist oder nicht.

2. «wohlunterschiedener Objekte» soll heißen: Die Elemente einer Menge sollen alle voneinander verschieden sein.

Beispiele:

1) Die Realklasse 3a der Kantonsschule Luzern hat 32 Schüler. In ihrem Klassenzimmer sind 32 Sitzplätze vorhanden. 20 Schüler sind katholisch, die übrigen 12 protestantisch. Alle Schüler lernen Französisch. 14 der katholischen und 9 der protestantischen Schüler lernen zudem Englisch.

Wir haben es hier also mit folgenden Mengen zu tun:

a) M sei die Menge aller Schüler der Realklasse 3a der Kantonsschule Luzern. Jedes Element von M besitzt die Eigenschaft «ist Schüler der Realklasse 3a». Wir schreiben symbolisch:

$$M = \{x \mid x \text{ ist Schüler der Realklasse 3a}\}$$

(in Worten: M ist die Menge aller Objekte x mit der Eigenschaft «ist Schüler der Realklasse 3a»)

b) K sei die Menge der katholischen Schüler dieser Klasse, also

$$K = \{x \mid x \text{ ist katholischer Schüler der Realklasse 3a}\}$$

c) P sei die Menge der protestantischen Schüler,

$$P = \{x \mid x \text{ ist protestantischer Schüler der Realklasse 3a}\}$$

d) F sei die Menge aller Schüler der Klasse, die Französisch lernen.

e) E sei die Menge der Schüler der Klasse, die Englisch lernen.

f) S sei die Menge der 32 Sitzplätze.

2) Die Menge N aller natürlichen Zahlen, symbolisch

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

oder

$$N = \{x \mid x \text{ ist natürliche Zahl}\}$$

3) Die Punktmenge einer Geraden

4) Die Menge aller konvexen Vielecke in einer Ebene.

Alle Mengen aus dem ersten Beispiel sind *endliche*, die übrigen *unendliche Mengen*.

Die Mengen M und F enthalten dieselben Elemente. Die beiden Mengen heißen deshalb gleich: $M = F$.

Definition: Zwei Mengen heißen gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Ist a Element der Menge M, so schreiben wir $a \in M$,

ist aber a nicht Element von M, so setzen wir $a \notin M$.

Im ersten Beispiel ist jedes Element der Menge K auch Element von M. K heißt eine Teilmenge von M,

symbolisch $K \subseteq M$.

Da $M \neq K$ ist, heißt K auch eine echte Teilmenge von M,

$$K \subset M.$$

M ist eine sogenannte *unechte Teilmenge* von sich selbst.

Definition: Eine Menge K heißt *Teilmenge* einer Menge M,

$$K \subseteq M,$$

wenn jedes Element von K auch Element von M ist. Gibt es mindestens ein Element in M, das nicht zu K gehört, so heißt K eine *echte Teilmenge* von M,

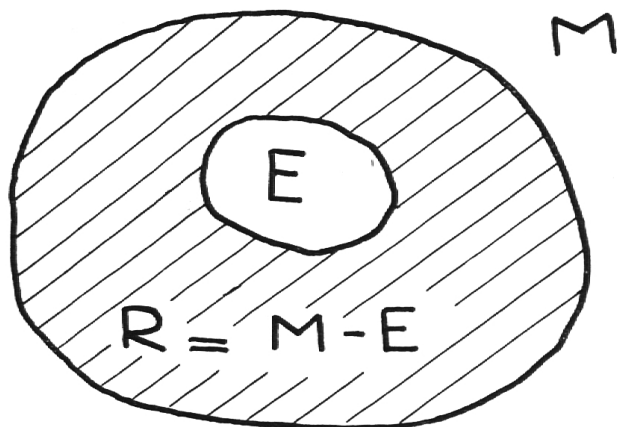
$$K \subset M,$$

sonst *unechte Teilmenge* von M.

Es ist also: $F \subseteq M$; $K \subset M$; $P \subset M$; $E \subset M$.

Alle Schüler der Klasse 3a, die nicht Englisch lernen, bilden ebenfalls eine Menge R. R heißt die Restmenge oder das Komplement von E bezüglich M.

Definition: Die Menge aller Elemente einer Menge M , die nicht zugleich auch zu einer Teilmenge E von M gehören, heißt die *Restmenge* R oder das *Komplement von E bezüglich M* ,
 $R = M - E$.
 Zeichnerisch läßt sich dies im sogenannten *Venn-diagramm* veranschaulichen:



Da $E \subset M$ ist, so gilt:

Ist a Element von E , so ist folglich a Element von M ,
 $a \in E \implies a \in M$.

$\implies$ ist das Zeichen der *Implikation* («folglich»).

Ebenso gilt $a \in R \implies a \in M$

und $a \in R \implies a \notin E$.

Es ist weiter $M - K = P$ und $M - P = K$.

Nimmt man M als (unechte) Teilmenge von M , so existiert keine Restmenge von M bezüglich M . Um auch hier von einer solchen sprechen zu können, führt man die sogenannte leere Menge oder Nullmenge ein:

Definition: Die *leere Menge* oder *Nullmenge* enthält kein Element.

Zeichen: $\emptyset$

Es wird somit: $M - M = \emptyset$

$M - F = \emptyset$

$M - \emptyset = M$.

Zusätzlich *definieren* wir: Die Nullmenge ist Teilmenge jeder Menge (also auch von sich selbst).

Es ist auch nützlich, ein Zeichen für die Gleichwertigkeit von Aussagen einzuführen: $\iff$

$E \subset M \iff (a \in E \implies a \in M)$

(in Worten: E ist Teilmenge von M ist gleichwertig mit: Ist a Element von E , so ist folglich a auch Element von M .)

Mit dieser Bezeichnung läßt sich für die Restmenge R von E bezüglich M sagen:

$a \in R \iff a \notin E$

$a \in E \iff a \notin R$.

Sieht man bei den Mengen M und S von der Natur der Elemente ab, so bleibt nur noch ihre Anzahl übrig. Setzt man je einen Schüler auf je einen Sitzplatz, so entsteht eine Zuordnung zwischen den Elementen von M und S . Jedem Schüler entspricht dabei genau ein Sitzplatz und umgekehrt. Die beiden Mengen M und S sind so auf umkehrbar-eindeutige Weise einander zugeordnet. Eine solche umkehrbar-eindeutige Zuordnung heißt auch eine *eindeutige Abbildung der Mengen M und S aufeinander*.

Definition: Zwei Mengen M und S , die sich eineindeutig aufeinander abbilden lassen, heißen zueinander *äquivalent*,

$M \sim S$.

z. B. Gegeben: $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
 $G = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

Aus der Zuordnung

1	2	3	4	5	·	·	·
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
2	4	6	8	10	·	·	·

folgt $N \sim G$.

Numeriert man die Elemente der Menge M , wie auch die der Menge S durch, so erhält man eine eindeutige Abbildung von M bzw. S auf einen Abschnitt der natürlichen Zahlenreihe. Die letzte vorkommende Nummer in M bzw. S heißt die Anzahl, besser nun aber die *Kardinalzahl* oder *Mächtigkeit* der Menge M bzw. S . M und S haben also die gleiche Kardinalzahl oder die gleiche Mächtigkeit.

Bei unendlichen Mengen wie z. B. N und G ist es unmöglich, von der Anzahl der Elemente zu sprechen. N und G sind aber äquivalente Mengen. Wir sagen deshalb auch hier: N und G haben dieselbe *Mächtigkeit* oder dieselbe (transfinite) *Kardinalzahl* $\aleph_0$.

Die Elemente einer zu N gleichmächtigen Menge lassen sich durch eine eindeutige Abbildung auf N durchnummerieren.

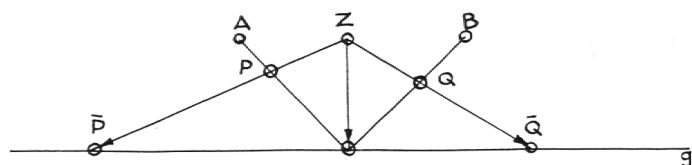
Wir *definieren*: Eine zur Menge N der natürlichen Zahlen gleichmächtige Menge heißt *abzählbar*.

Bemerkenswert ist natürlich, daß N und G gleichmächtig sind, obwohl G echte Teilmenge von N ist. Da dies nur bei unendlichen Mengen möglich ist,

läßt sich dies direkt zur Definition der Begriffe «endliche» und «unendliche Menge» benützen. Folgende im dritten Teil teilweise gebrauchten Mengen sind abzählbar (Beweise leicht!):

- 1) Menge I der ganzen Zahlen
- 2) Menge P der rationalen Zahlen
- 3) Menge A der algebraischen Zahlen
- 4) Menge aller Primzahlen

Die Einführung der transfiniten Kardinalzahl $\aleph$ wäre recht uninteressant, wenn sich alle unendlichen Mengen als abzählbar erweisen würden. Mit dem berühmten «Cantorschen Diagonalverfahren» (siehe z.B. W.L. Fischer: Einführung in die Mengenlehre; Verlag Klett) läßt sich nun aber auf einfache Art zeigen, daß bereits die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nicht mehr abzählbar und somit von höherer Mächtigkeit als die Menge N ist. Die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 ist überdies wieder gleichmächtig zur Punktmenge einer Einheitsstrecke AB und diese zur Punktmenge einer vollen Geraden, wie folgende Zentralprojektion zeigt:



Damit wird aber die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 gleichmächtig zur Menge R der reellen Zahlen überhaupt. Man nennt die Mächtigkeit der Menge R die *Mächtigkeit des Kontinuums*. Überraschenderweise erweisen sich dann folgende Mengen alle als von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$:

- 1) Punktmenge einer Strecke
- 2) Punktmenge einer Geraden
- 3) Punktmenge der Ebene
- 4) Punktmenge des dreidimensionalen Raumes

Ob es Mengen mit Mächtigkeiten zwischen $\aleph$ und $\mathfrak{c}$ gibt, ist bis heute noch ungelöst (Kontinuumproblem). Aber es läßt sich zeigen, daß es zu jeder unendlichen Menge noch Mengen mit höherer Mächtigkeit gibt.

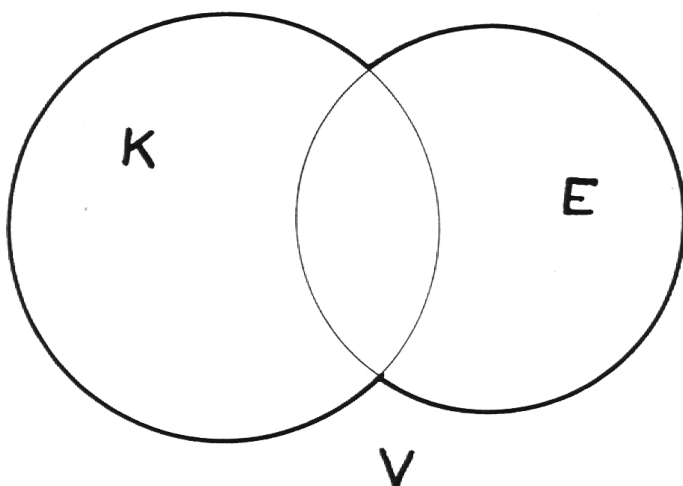
Diese Mächtigkeitsbetrachtungen sowie das Rechnen mit den transfiniten Kardinalzahlen sind nun äußerst interessant und bilden ein wesentliches

Stück der Mengenlehre. Sie übersteigen aber den Rahmen der ordentlichen Schulmathematik. Die knappe Übersicht will lediglich einen Ausblick auf dieses reizvolle Thema bieten.

Wesentlich für die Schulmathematik sind aber die mengentheoretischen Operationen. Unter ihnen sollen die beiden wichtigsten, das Bilden von Durchschnitt und Vereinigung, kurz behandelt werden.

Vereinigung. Wir betrachten die Mengen K und E aus dem ersten Beispiel. Beide Mengen haben gewisse Elemente gemeinsam.

Unter der Vereinigung V der beiden Mengen K und E verstehen wir nun die Menge aller Schüler, die entweder katholisch sind oder Englisch lernen oder beides zugleich erfüllen. Im Venndiagramm sieht dies folgendermaßen aus:



Definition: Unter der Vereinigung zweier Mengen K und E versteht man die Menge V aller Elemente, die mindestens einer der Mengen K und E angehören;

in Zeichen $K \cup E = V$
($\cup$ = «union», Vereinigung)

Es wird:

$$K \cup P = M$$

$$F \cup F = F$$

$$G \cup U = N$$

wenn G die Menge der geraden, U die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen ist.

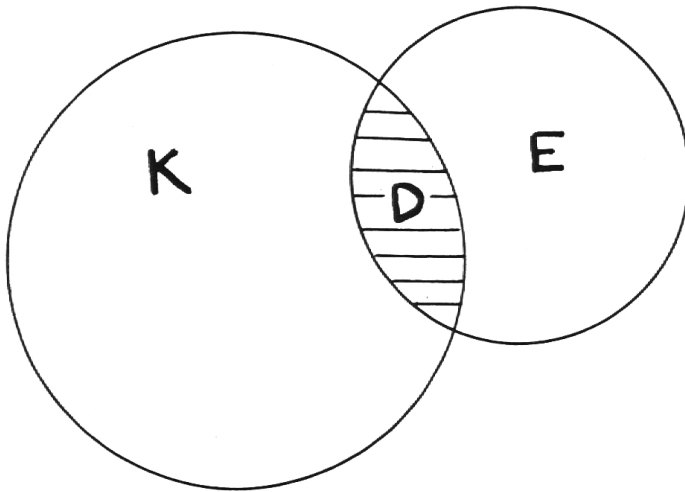
Die Bildung der Vereinigung genügt überdies folgenden Gesetzen, die leicht zu beweisen sind:

$$A_1) A \cup B = B \cup A \quad \text{Kommutativgesetz}$$

A₂) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Assoziativgesetz

A₃) $A \cup A = A$ Idempotenzgesetz

Durchschnitt: Die gemeinsamen Elemente der Mengen K und E bilden wieder eine Menge, nämlich die Menge derjenigen katholischen Schüler, die Englisch lernen. Diese Menge heißt der *Durchschnitt* D der Mengen K und E.



Definition: Unter dem *Durchschnitt* D zweier Mengen K und E verstehen wir die Menge derjenigen Elemente, die sowohl zu K als auch zu E gehören;

in Zeichen: $D = K \cap E$

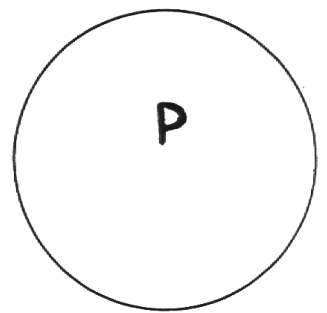
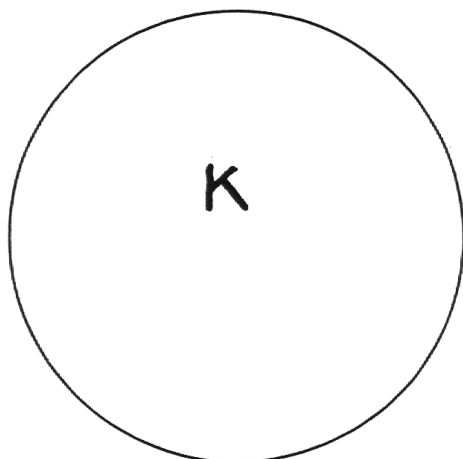
Es wird also:

$$M \cap K = K$$

$$M \cap P = P$$

$$M \cap E = E$$

K und P aber besitzen keine gemeinsamen Elemente:



Ihr Durchschnitt ist also die Nullmenge oder leer. Die Mengen K und P heißen deshalb zueinander *fremd*:

$$K \cap P = \emptyset$$

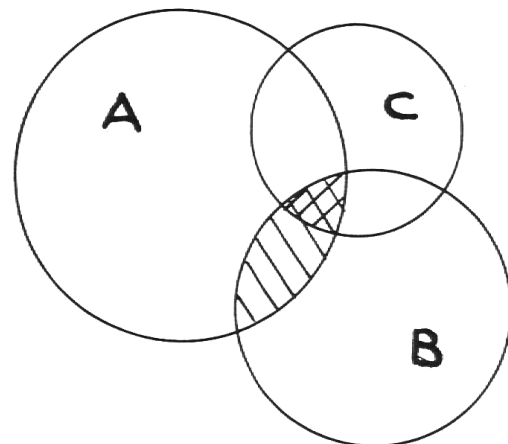
Für die Durchschnittsabbildung gelten wieder die drei Gesetze:

B₁) $A \cap B = B \cap A$ Kommutativgesetz

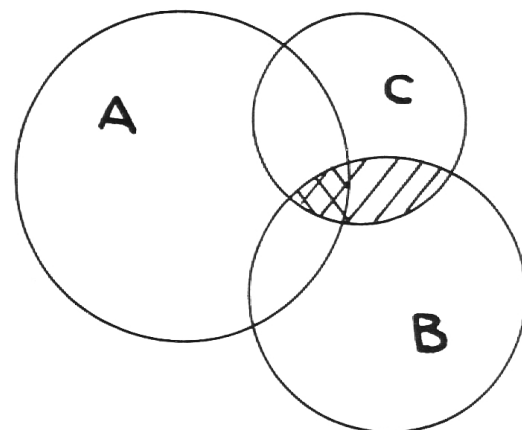
B₂) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ Assoziativgesetz

B₃) $A \cap A = A$ Idempotenzgesetz

Wir veranschaulichen das Assoziativgesetz B₂:



$$(A \cap B) \cap C$$



$$= A \cap (B \cap C)$$

Die beiden mengentheoretischen Operationen sind schließlich durch die beiden

Distributivgesetze

$$C_1) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$C_2) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

sowie die beiden

Verschmelzungsgesetze

$$D_1) A \cap (A \cup B) = A$$

$$D_2) A \cup (A \cap B) = A$$

miteinander verbunden (Veranschaulichung!).

Die sehr fragmentarische Einführung soll damit abgeschlossen sein. Sie ist weder für den Fachmathematiker noch zur endgültigen Orientierung gedacht, sondern soll lediglich die Ausführungen im dritten und wichtigsten Teil einigermaßen verständlich machen und, so hoffe ich, zu weiterem Eindringen in dieses reizvolle mathematische Teilgebiet anregen. Die Fortsetzung soll nun zeigen, wie diese Begriffe den Hintergrund erhellen und zu einem Band zwischen den manchmal recht zusammenhanglos erscheinenden Teilen der Schulmathematik werden können.

Fortsetzung folgt

Grundfragen personaler Mädchenbildung *

Von Dr. Renata Dessauer, Würzburg

Lehrerin

Mädchenbildung läßt sich nicht auf einzelne Fächer beschränken. Bildung ist ja der ununterbrochene geheimnisvolle Vorgang im menschlichen Leben, der sich unsichtbar oder nur zu einem Teil sichtbar vollzieht, auch da, wo wir es nicht vermuten und wo er nicht in der Absicht des Erwachsenen liegt. Niemals bekommen wir diesen Vorgang ganz in den Griff, aber immer ist der Erwachsene, bewußt oder unbewußt, bei der Bildung des jungen Menschen mit im Spiel. Sicher ist, daß Bildung sich im Umgang mit Menschen und Dingen, oder wie Guardini sagt, in der «Begegnung» mit der Umwelt vollzieht, das heißt mit dem Ausschnitt Welt, in dem das Leben des Kindes und des jungen Menschen sich entfaltet. Mädchenbildung ist genauso wie Knabenbildung Menschenbildung, das heißt, sie erfaßt den ganzen Menschen. Damit erübrigt sich die in der Vergangenheit oft angestellte Überlegung, welcher Winkel im Raume der Bildung der Mädchenbildung vorbehalten sein soll. Nicht beantwortet aber bleibt die Frage, die uns nun beschäftigen soll: Warum überhaupt eine *eigenständige* Mädchenbildung?

Der Umwandlungsprozeß in unserer Welt: die uni-

versale Technisierung, die Veränderung der Struktur der Gesellschaft usw. hat sich so rasch vollzogen und geht in so schnellem Tempo voran, daß er unsere pädagogische Besinnung überrollt hat. Wir haben hier viel Nachholarbeit zu leisten.

Es ist zwar sehr viel über die Wesensart der Frau geschrieben worden, die Anthropologie hat die Eigenständigkeit des weiblichen Seins eindeutig dargetan; die Psychologie zeigt die Besonderheit der Mädchen in Art und Rhythmus ihrer Entwicklung auf. Im pädagogischen Bereich fangen wir jedoch erst langsam an, diese Erkenntnisse auszuwerten und in der Bildungsarbeit zu verwirklichen. Wir stehen hier vor keiner leichten Aufgabe.

Die Schwierigkeiten für uns liegen vor allem auf zwei Gebieten:

1. Wir leben in einer Epoche, in der die Frau in nahezu allen Berufen neben dem Mann steht; in der sie in ihren Pflichten und Rechten, beruflich, gesellschaftlich und als Staatsbürgerin diesem gleichgestellt ist. Dem oberflächlichen Blick muß in einer so «partnerschaftlichen» Zeit eine eigenständige Mädchenbildung als überflüssig erscheinen; alles ist klar, und die Bildung orientiert sich, wie das Leben, sozusagen

* Aus: «Katholische Frauenbildung» 1962, Heft 11, S. 721 ff.