

Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 44 (1957)
Heft: 18

Artikel: Gedanken zum Mineralogie-Unterricht an der Mittelschule II
Autor: Weber, Leonhard
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-539236>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

welches Verhalten dann wieder seinen Niederschlag in stark übertriebenen Forderungen an die Adresse der Primarschule findet. Die Primarschule hat endlich die Pflicht, einem angezüchteten, aber nicht assimilierbaren Scheinwissen den härtesten Kampf anzusagen; die Sekundarschule hätte sie auch. Statt dessen aber redet man ständig von «herabnivellieren», als ob man sich scheute, auf das geistige Fassungsvermögen der Schüler Rücksicht zu nehmen. Bis heute ist noch kein befriedigendes Verfahren für die Auslese in die Sekundarschule gefunden worden. Es wird auch nie eines gefunden werden, weil ein sicheres Kriterium immer an der nur teilweise und äußerst schwer meßbaren Individualität der Prüflinge scheitert. So wird

nicht zu umgehen sein, daß Leute in der Sekundarschule sitzen, denen die Voraussetzungen für diese Stufe mehr oder weniger fehlen. Es wird auch immer einige Grenzfälle geben, wo ein sicherer und verantwortungsbewußter Entscheid schlechthin unmöglich ist.

Die Primarschule will im Einzelfall die Schuld auf sich nehmen, wo sie wirklich schuld ist. Sie erwartet von der Sekundarschule die gleiche Haltung und vor allem mehr Verständnis und Zusammenarbeit. Vorsicht im Ergründen der wirklichen Ursache des Versagens und im Urteil ist dringendes Gebot, soll nicht der Graben zwischen den beiden Stufen der Volksschule mehr zum Schaden der Schüler vertieft werden.

Gedanken zum Mineralogie-Unterricht an der Mittelschule II

Mittelschule

Dr. Leonhard Weber, Honorarprofessor der Universität Freiburg

Können von der Geographie, ergänzt durch die elementarsten Erfahrungen der Chemie, Schönheit, Mannigfaltigkeit und Umfang der Mineralwelt ohne große Schwierigkeit auf jeder Lehrstufe zur Geltung gebracht werden, so dürfte es der *Mittelschulgeometrie* möglich sein, ohne Belastung der eigenen Ziele, *Einsicht in wesenhafte Gesetzmäßigkeiten der Kristalle* zu vermitteln. Ausgewählte Bleiglanz-, Pyrit-, Magnetit- und Granatkristalle beleben die einführende Behandlung der einfachsten Körper, regen zu interessanten Fragestellungen an und wecken den Sinn für *naturgegebene Symmetrie*. Man betrachte z. B. einen großen Steinsalzwürfel und stelle ihn einem oktaedrischen Spaltungsstück des Fluorits gegenüber – wo möglich mit Benützung entsprechender Modelle von geeigneter Größe. Sofort werden an Kristall und Modell drei aufeinander senkrecht stehende Richtungen erkannt, um die sich jene derart um 90 Grad drehen lassen, daß sie vor wie nach der Drehung den gleichen Anblick gewähren. Man sagt, sie hät-

ten drei 4zählige, vertauschbar gleichwertige *Symmetrieachsen* (A_4). Dem Menschenleib kommt diese Eigenschaft nicht zu; sie zeigt sich aber irgendwie am Lineal, an den Kreuzblütlern, am freistehenden Turm oder am Dominikanerkreuz. Wegen der dreifachen A_4 -Symmetrie werden *Würfel und Oktaeder* in der Kristallographie nicht beliebig nebeneinander gestellt, sondern so orientiert, daß die A_4 -Achsen beider parallel sind (vgl. Fig. 1, a, wo das Oktaeder in den Würfel hineingestellt ist). Zu dieser Parallelstellung der A_4 nötigt auch die oktaedrische *Spaltbarkeit* der Fluoritwürfel. Kristallographie ist also nicht reine Geometrie, sondern vielmehr Physik, wie denn auch die Kristallgestalten nicht irgendwelche Naturspiele darstellen, wohl aber sinnenfälliger Ausdruck sind für den innern, gesetzmäßigen Bau der kristallisierten Substanz. Rein geometrisch gesehen gibt es unendlich viele Möglichkeiten, das Oktaeder derart in einen Würfel einzuschließen, daß jede Oktaederecke eine Würfelfläche berührt. Hierzu brauchen nur die vor-

dere, rechte, und obere Oktaederecke in die auf das A_4 -System des Würfels (mit der Kantenlänge $2a$) bezogenen Lagen

$$a, ax, -\frac{ax}{1+x} \quad -\frac{ax}{1+x}, a, ax \quad ax, -\frac{ax}{1+x}, a$$

gebracht zu werden, wobei die Variable x den Bedingungen

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

zu genügen hat. Natürlich haben alle diese Oktaeder längere A_4 -Achsen als in Fig. 1, a. Das Streckungsverhältnis beträgt $(1+x+x^2) : (1+x)$. Zur *zeichnerischen Darstellung* – schade, daß die Schulgeometrie die exakte Konstruktion einfacher Figuren allzu sehr vernachlässigt – wäre $x = 0,5$ ein günstiger Fall. Aus der Zeichnung würde ersichtlich, daß die gefundenen Oktaedereckpunkte durch Drehung des Würfels um jene Diagonale, die vorne oben rechts aussticht, ineinander überführbar sind, und doch sind nicht alle so ineinander überführbaren Punkte der Würfeloberfläche auch Ecken eines richtigen Oktaeders.

Für anregende stereometrische Rechnungen würde sich das *Rhombendodekaeder* (Fig. 1, b) vorzüglich eignen. Obwohl es mit Würfel und Oktaeder gleichsymmetrisch ist, zählt es nicht zu den fünf regelmäßigen Körpern. Sein Volumen ist 4mal kleiner als das des unbeschriebenen Würfels mit gleichem A_4 -System (vgl. Fig. 1, a). Die Frage, wie sich – gleiches Volumen vorausgesetzt – die Oberflächen von Würfel, Oktaeder und R-Dodekaeder zueinander verhalten, böte bereits einige rechnerische Schwierigkeiten und sei hier nicht weiterverfolgt.

Vielleicht finden sich in der Schulsammlung Bleiglanz-, Fluorit- oder Pyritkristalle, die im Aussehen der Fig. 2 gleichen. Wenn ja, so sei zunächst festgestellt, daß die Gestalt eines Kristalls eine größere Variationsbreite aufweist, als es bei der uns vertrauten Tierwelt der Fall ist. Weiterhin wird sichtbar, daß nicht bloß jeder Fläche des obern Gebildes eine Fläche des untern parallel ist, sondern daß sogar – trotz abweichender Begrenzung – 6 mit den Würfel- und 8 mit den Oktaederflächen der Fig. 1 in der Lage übereinstimmen. Nach der Sprechweise der Mineralogie stellen die beiden Zeichnungen der Fig. 2 *Kombinationen* des Würfels und Oktaeders dar – oben mit vorherrschendem Würfel, unten mit stärker entwickeltem

Oktaeder. Beidemale ist der Würfel auf die Kantenlänge $2a$ bezogen¹. Wird im ersten Fall (obere Fig.) die Länge des durch eine Oktaederfläche weggeschnittenen Würfelkantenstücks λ genannt, so berechnet sich das Restvolumen zu

$$V_1 = \frac{4(6a^3 - \lambda)}{3} \quad (I)$$

In der untern Figur schneidet der festgehaltene Würfel vom Oktaeder, dessen halber Durchmesser von $2a$ bis a abnimmt, an den Ecken 6 Pyramiden der Höhe $a - \mu$ weg. Für das verbleibende Volumen kommt also

$$V_2 = \frac{4(2\mu^3 - 3a\mu^2 - 3a^2\mu + 5a^3)}{3} \quad (II)$$

λ und μ variieren unabhängig voneinander zwischen 0 und a , doch hat μ gerade jene Länge, um die das zugehörige λ über die Würfelkantenmitte hinausginge. Ist $\lambda = 0$, so liegt der reine Würfel vor. $\lambda = a$ und $\mu = 0$ ergeben die nämliche Gestalt, an der in den 12 Ecken – also nur mehr die Hälfte wie zuvor – je 2 Würfel- und Oktaederflächen zusammenstoßen. Wird schließlich $\mu = a$, so bleibt das Oktaeder allein übrig. Beim *Wachstum* des Kristalls wird pro Zeiteinheit auf den Oktaederflächen im allgemeinen nicht eine gleichstarke Substanzschicht abgesetzt wie auf den Würfelflächen. Das Verhältnis beider Wachstumsgeschwindigkeiten hängt aber nicht nur vom innern Aufbau der Flächen ab, sondern auch von den Zustandsgrößen der Lösung, aus der sich der Kristall bildet. Demzufolge kommt es vor, daß z. B. ein ursprünglich oktaedrischer Kristall beim Weiterwachsen in einen Würfel übergeht, wobei sich selbstverständlich, neben den in Fig. 2 gezeichneten Phasen, auch alle übrigen Zwischenglieder einstellen, darunter jenes, an dem die Oktaederflächen regelmäßige Sechsecke sind ($\mu = \frac{1}{2}$; für welche λ - oder μ -Werte sind alle Kanten gleich lang oder alle Flächen gleich groß?).

Der angedeutete Wachstumsvorgang ist kontinuierlich. Nicht aber die rechnerische Darstellung. Da es bei dieser um Enteckungen geht (oben des Würfels, unten des Oktaeders), werden verschie-

¹ Würfel, Oktaeder, Rhombendodekaeder werden als *Formen* bezeichnet. Allgemein umfaßt eine Form die Gesamtheit aller physikalisch gleichwertigen Flächen eines Kristalls. Von ihrer zufälligen Begrenzung ist abzusehen (Fig. 1, a, und Fig. 2). Die Form kann offen oder geschlossen sein und zählt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 oder 48 Flächen.

Freudige Glückwünsche an unsern Mitredaktor Dr. Ineichen

Unser tüchtiger und initiativer Kollege im Redaktionsstab, Herr Dr. Robert Ineichen, Professor an der Kantonsschule Luzern, wurde am 13. Dezember zum Professor am neuen Technikum Luzern erwählt und am 20. Dezember sogar zum Vizedirektor. Wir gratulieren unserm verehrten Herrn Kollegen aufs freudigste, beglückwünschen aber auch das neue Technikum zu dieser ausgezeichneten Kraft. Wir freuen uns, daß Herr Professor Dr. Ineichen unserem Redaktionsstab erhalten bleibt und die Verbindungen unserer Redaktion auch nach dieser Seite ausweiten kann und andererseits damit den wichtigen Aufgaben des Technikums in unsern Lehrer- und Erzieherkreisen um so erfolgreicher zu dienen vermag.

dene Formeln erhalten, die aber nicht im ganzen Existenzbereich, sondern bloß im Intervall $0 \leq \lambda$, $\mu \leq a$ zu den verlangten Werten führen. Überdies werden (I) und (II) durch ganz verschiedene Kurven veranschaulicht. Fig. 2 stellt ihren Verlauf im Intervall $-3a \leq \lambda$, $\mu \leq 3a$ dar; aus Raumgründen liegt den Ordinaten eine wesentlich kürzere Einheit zugrunde als den Abszissen.

Nebst den bereits genannten innern und äußern Gegebenheiten hängt die Wachstumsgeschwindigkeit einer Kristallfläche noch von allerlei «Zufälligkeiten» im Bildungsraum ab. Diese können bewirken, daß im Gegensatz zu den *idealen Gestalten* der Fig. 1 gleichartige Flächen verschieden rasch

wachsen. Als Beleg dafür dient Fig. 3, ein Oktaeder, dessen Flächen in Größe und Gestalt (aus dem regelmäßigen Sechseck durch Parallelverschiebung geeigneter Kanten ableitbar; auch Parallelogramme und Trapeze sind möglich; durch Konstruktion nachprüfen) ganz verschieden sind. Ein solcher Kristall heißt *verzerrt*. In Wirklichkeit ist jeder Kristall mehr oder weniger verzerrt. Das verzerrte Oktaeder der Fig. 3 – als Sonderfall einem Würfel eingezeichnet – zeigt die gleichen Kantenrichtungen wie das ideale Oktaeder (Fig. 1). Es sind aber vier Ecken dieses letztern durch Kanten ersetzt, welche in den Diagonalen der Würfel Flächen liegen und bei hinreichender Verlängerung ein *Tetraeder* – regelmäßiger Körper wie Würfel und Oktaeder – bestimmen. Die Volumenberechnung des verzerrten Oktaeders ist darum äußerst leicht. Man braucht nur vom ergänzten Tetraeder – ein Drittel des umschriebenen Würfels – die weggeschnittenen Ecken (ebenfalls Tetraeder) abzurechnen. Es ist indessen darauf zu achten, daß beim Wegspalten der Eckentetraeder keine Überschneidungen stattfinden (vgl. Fig. 2), sonst würden die Formeln wesentlich komplizierter.

Die Verzerrung der Kristalle bot dem wissenschaftlichen Fortschritt der Mineralogie jahrhundertlang größte Schwierigkeiten. Es war darum eine geistige Großtat, als ihr Wesen von Niels Stensen (1638–1686) gedeutet und als *Gesetz der Winkelkonstanz* formuliert wurde².

² Stensen war auch ein großer Förderer der Anatomie und Geologie. Seine Entdeckungen haben heute noch Gültigkeit und Namen. In seinen letzten Lebensjahren entfaltete er als Weihbischof von Münster ein Apostolat heroischer Selbstlosigkeit. Der Kanonisationsprozeß ist eingeleitet. –

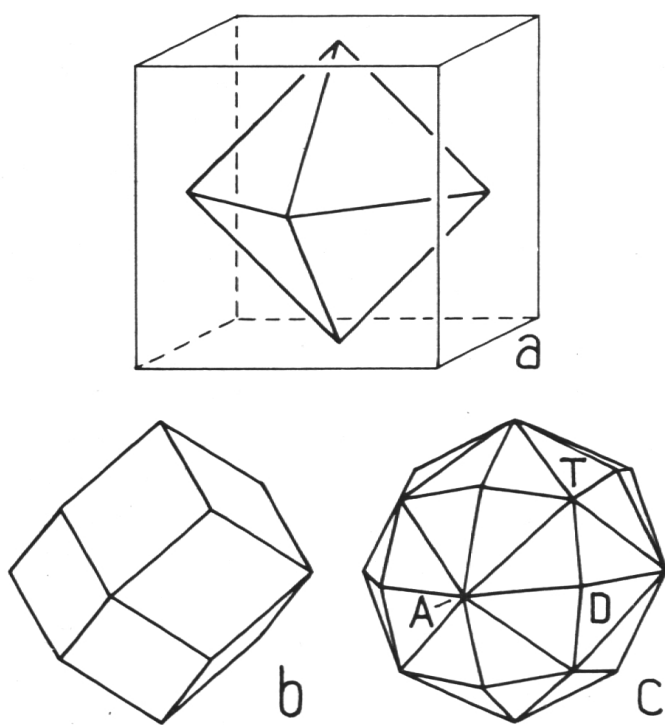


Fig. 1

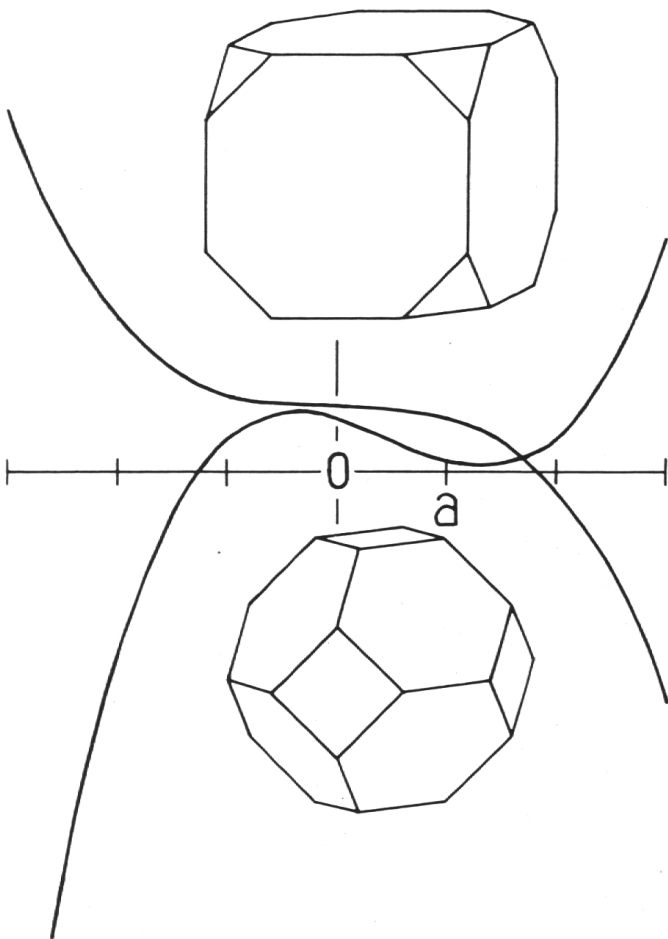


Fig. 2

Eine für die innere Symmetrie vieler Kristalle charakteristische Gestalt ist der in Fig. 1, c, dargestellte 48-Flächner (*Hexakisoktaeder*). Er findet sich, von kleinen Zusatzflächen abgesehen, am Fluorit gewisser Vorkommen, überdies zusammen und dem vorherrschenden R-Dodekaeder untergeordnet am weitverbreiteten Granat. In der Zeichnung reduziert sich eine Fläche links oben, die den projizierenden Strahlen parallel ist, auf eine Gerade. Darum gelangten nur 23 Begrenzungsdreiecke zur Darstellung. Trotzdem läßt sich leicht finden, daß sechs 8-, acht 6- und zwölf 4kantige Ecken vorhanden sind (A, D, T). Die 72 Kanten selber erweisen sich ihrer Länge und Symmetriebeziehung nach als dreifacher Art (je 24). Vielleicht ist es sogar möglich, außer den obengenannten drei A_4 , noch die vier A_3 (eigentlich 6zählige *Drehspiegelachsen*) und die sechs A_2 (je durch zwei gegenüberliegende T- bzw. D-Ecken gehend) sowie die auf den A_4 und A_2 senkrecht stehenden

Daß auch moderne Naturforscher strenge Wissenschaft mit erhabenem Tugendstreben zu verbinden wissen, zeigte der Freiburger Botaniker Prof. Max Westermaier (1852–1903).

Symmetrieebenen zu erkennen. Bezeichnet O den Schnittpunkt aller dieser Symmetrieelemente, so werde (entsprechende Fig. 1,) $OA = a$ gesetzt. OD und OT mögen $a\lambda\sqrt{2}$ bzw. $a\mu\sqrt{3}$ messen. Der Abstand des Punktes T von den drei durch je zwei A_4 -Achsen gehenden Ebenen ist also $a\mu$, während D von den beiden diesen Punkt nicht enthaltenden A_4 -Ebenen um $a\lambda$ entfernt ist. Daraus ergibt sich das Volumen der Pyramide OADT zu $a^3\lambda\mu : 6$. Da aus Symmetriegründen – dies zu beachten ist für die Ableitung wesentlich – alle 48 derart definierten Pyramiden kongruent sind, wird das Gesamtvolumen des komplizierten 48-Flächners durch den überraschend einfachen Ausdruck

$$V = 8a^3\lambda\mu \quad (\text{III})$$

bestimmt. Weiter läßt sich zeigen, daß jede Fläche auf den A_4 -Geraden die Abschnitte

$$a, \frac{\lambda}{1-\lambda} a, \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu} a \quad (\text{IV})$$

macht. An den hierhergehörigen Kristallen können indes nur solche Flächen erscheinen, deren Abschnitte auf den A_4 im Verhältnis einfacher rationaler Zahlen stehen. Diese Tatsache stellt einen Sonderfall des die ganze Kristallwelt beherrschenden allgemeinen *Rationalitätsgesetzes* dar. Kristallographisch, nicht aber geometrisch, sind auch λ und μ rationale Zahlen. Sie sind größer als $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$, haben 1 zur obersten Grenze und unterliegen der Bedingung $\lambda \geq \mu$. Polyeder, deren λ, μ sich nicht an diese Grenze halten, sind nicht mehr konvex, sondern konkav und gehört (vgl. Fig. 4, f und h).

Für besondere Werte von λ, μ vermindert sich die Kantenzahl der Ausgangsgestalt (Fig. 1, c). Zugleich fallen 2, 4, 6 oder 8 Begrenzungsdreiecke zu mehr oder weniger symmetrischen Vielecken zusammen, so daß aus dem Hexakisoktaeder als *Grenzfälle* sechs verschiedene Formentypen entstehen. Auf diese soll hier nicht näher eingegangen werden. Beistehende Tabelle, vielleicht unterstützt durch Modelle oder Figuren, erlaubt, die Spezialisierungen ohne Schwierigkeit zu verfolgen. Da Gleichung (III) allgemein gilt, ergeben sich für die jeweiligen Volumen die beige-schriebenen Ausdrücke, von denen die drei ersten einen veränderlichen Parameter (also auch ein wechselndes Aussehen) haben. Mit Benützung der Grenz-

Fortsetzung siehe Seite 537

werte zeigt sich, daß 1) von 5) bis 6), 2) von 4) bis 5) und 3) von 4) bis 6) variiert. Für das zeichne-

rische Studium einfacher Sternpolyeder würden sich besonders 2) und 3) eignen.

Grenzfälle des Hexakisoktaeders

λ, μ -Werte	Wegfall-Kante	Flächengestalt	Volumen
1. $\lambda = \frac{\mu}{1+\mu}; \frac{1}{3} < \mu < \lambda$	AT	24 Deltoide (= monosymmetrische Vierecke)	$16a^3 \frac{\mu^2}{1+\mu}$
2. $\lambda = \frac{1}{2}; \frac{1}{3} < \mu < \frac{1}{2}$	DT	24 gleichsch. Dreiecke	$4a^3\mu$
3. $\frac{1}{2} < \lambda = \mu < 1$	AD	24 gleichsch. Dreiecke	$8a^3\mu^2$
4. $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$	AD, DT	12 Rhomben	$2a^3$
5. $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{3}$	AT, DT	8 gleichseit. Dreiecke	$\frac{4}{3}a^3$
6. $\lambda = \mu = 1$	AD, AT	6 Quadrate	$8a^3$

Wird in Betracht gezogen, daß der Kristall von Formen ganz verschiedener Flächenzahl, aber gleicher Symmetrie (Fig. 2), begrenzt sein kann und daß gleichartige Flächen zumeist von stark verschiedener Größe sind (Fig. 3), der Flächenkomplex jedoch dem grundlegenden Gesetz der Rationalität unterliegt, so zeigt sich – für unsere unduldsame Engherzigkeit sicher eine eindrucksvolle Lehre –, daß in Gottes Schöpfung unübersehbare Individualität mit strengster Gebundenheit wunderbar verknüpft ist.

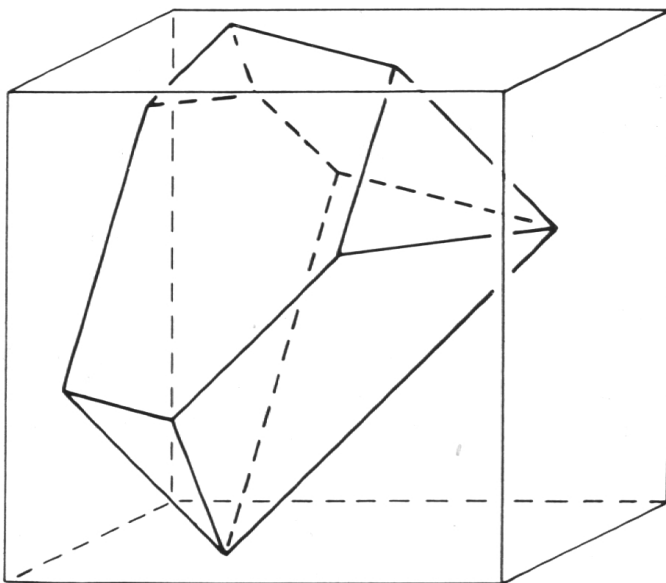


Fig. 3

III

Neben *hochsymmetrischen* Kristallen gibt es auch solche *ohne alle Symmetrie*. Doch sind diese nicht schlechthin regellos, denn sie werden vom bereits genannten, aber allgemeiner formulierten Rationalitätsgesetz beherrscht. Leider kann darauf nicht näher eingegangen werden. Eine schiefe Pyramide mit einem Parallelogramm als Grundfläche wäre ein einfachstes Beispiel. Statt dessen sei hier die merkwürdige Gruppe des *Trapezoeder* einläßlich betrachtet. (Fig. 4; a, b, c, e.) An den Kristallen erscheinen diese für *Substanzen mit Drehvermögen* charakteristischen Formen nur in Kombination mit andern, einfacheren Gestalten (z. B. *Doppelpyramiden*). Der vertikale Durchmesser ist in jedem Falle eine Symmetrieachse (A_3, A_4 oder A_6). Als einzige dieser Art tritt sie am Gebilde stark hervor und ist senkrecht zu 3, 2+2 oder 3+3 A_2 (im zweiten und dritten Fall von doppelter Art). Alle diese Achsen schneiden sich in einem Punkt O und treffen die auf- und absteigenden «*Randkanten*» (nach Ausweis der Fig. 4 sind sie abwechselnd länger und kürzer) in deren Mitte (z. B. A', A'') unter rechtem Winkel.

Die beiden Trapezoeder a, b sind zueinander spiegelbildlich («*enantiomorph*») und verhalten sich ähnlich wie rechte und linke Hand. Das ist am leichtesten zu erkennen, wenn durch A' und CE' eine Ebene gelegt wird. Spiegelt sich a daran, so entsteht b. Daß die Zahl der sichtbaren Flächen

beider Trapezoeder verschieden ist, hängt von ihrer Drehung gegenüber der Projektionsebene ab. Das Betrachten solcher Figuren will geübt sein und wird zum Schaden der Geometrie oft vernachlässigt. Daß es zu den Trapezoedern c und e der Fig. 4 ebenfalls enantiomorphe Ausbildungen gibt, ist klar³.

Läßt sich das Volumen des Trapezoeders allgemein berechnen? Gewiß, und sogar sehr einfach. Zu dem Zweck werde der Ausschnitt CA''C'A''C betrachtet (Fig. 4, a). Er ist, wie die Symmetrieverhältnisse deutlich zeigen, der achte Teil des ganzen Trapezoeders (bei Fig. 4, c und e, wäre es der zwölfte bzw. sechste Teil). Die festgehaltene Länge OA' sei a; OA'' = b ist innerhalb gewisser Grenzen veränderlich. Der Halbmesser OC = c steht kristallographisch zu a in *irrationalen Verhältnissen*, verlangt nach einer allgemeineren Formulierung des Rationalitätsgesetzes und weicht physikalisch von allen andern Richtungen des Kristalls ab. Die Ebene CSC', welche mit der Ebene CA'C' den Winkel α einschließe, unterteilt den fraglichen Ausschnitt in zwei dreiseitige Pyramiden mit den Grundflächen CA'C' und CA''C'; S ist gemeinsame Spitze. Der genaue Ort von S spielt für das Volumen keine Rolle; maßgebend sind einzig seine Abstände von den Pyramidengrundflächen. Trifft die durch S gelegte Parallele zu CC' die Ebene A'OA'' in S', so sind S'A' und S'A'' die gesuchten Abstände (= Pyramidenhöhen). Für den Bestand des Vierecks OA'S'A'', das in O den Winkel $\pi : u = w$ hat, in A' und A'' aber aus Symmetriegründen rechtwinklig ist, müssen die Ungleichungen

$$a \cos w \leq b \leq \frac{a}{\cos w} \quad (\text{V})$$

bestehen. Mit Benützung des Winkels α wird

$$S'A' = \frac{b - a \cos w}{\sin w} \quad S'A'' = \frac{a - b \cos w}{\sin w}$$

Das Trapezoedervolumen ist demnach allgemein

³ Es mag interessieren, daß zwei schiefe Pyramiden gleicher Höhe, die als Grundflächen beispielsweise kongruente gleichseitige Dreiecke haben, spiegelbildlich zueinander sein können (aber nicht müssen). Die Schüler mögen den genauen Sachverhalt klären und herausfinden, ob auch zwei kongruente schiefe Kreiskegel die Enantiomorphie zu belegen vermögen. Lassen sich zwei kongruente, schiefe Dreiecke durch geeignete Färbung ihrer Ober- und Unterseite unter allen Umständen auseinanderhalten?

$$V = \frac{2nc}{3} \cdot \frac{2ab - (a^2 + b^2) \cos w}{\sin w} \quad (\text{VI})$$

oder nach Einführung des halben Winkels

$$V = \frac{nc}{3} \cdot \frac{2(a^2 + b^2) \sin^2 \frac{w}{2} - (b - a)^2}{\sin \frac{w}{2} \cdot \cos \frac{w}{2}} \quad (\text{VII})$$

Für die Grenzwerte von b degeneriert das Trapezoeder zu einer regelmäßigen, n-seitigen *Doppelpyramide* (Fig. 4, d). Dabei vereinfacht sich das Volumen zu

$$V_b = \cos w = \frac{nc}{3} a^2 \sin 2w$$

$$V_b = \frac{a}{a \cos w} = \frac{2nc}{3} a^2 \tan w$$

Die Richtigkeit dieser Ausdrücke läßt sich an den Figuren direkt nachprüfen.

Ein besonderes Interesse bietet für $n = 3$ der Fall $b = a$, weil er auf das *Rhomboeder* führt⁴ (Fig. 4, i), also gewissermaßen zu einem Würfel wird, der in Richtung einer Raumdiagonale (CC' in Fig. 4), bei übereinstimmender Veränderung aller Kanten, verlängert oder verkürzt ist. Bekanntlich erweist sich die Volumenberechnung des Rhomboeders (auch Spat genannt) als ziemlich umständlich. Gewöhnlich erfolgt sie mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie. Da aber – wiederum aus Symmetriegründen – die drei oberen Ecken (und entsprechend die drei untern, die beiden Spitzen nicht mitgezählt) in einer Ebene liegen, die auf CC' senkrecht steht und davon genau das obere (bzw. das untere) Drittel abschneidet, setzt sich das Rhomboeder aus zwei dreiseitigen Pyramiden und einem Prismatoid zusammen. Wird außer der Kantenlänge etwa der Winkel an der Spitze gegeben, so ist die Berechnung sehr elementar. Bequemer ist aber die Ableitung aus Formel (VI). Wird $n = 3$ und $w = 60$ Grad gesetzt, so kommt nämlich sofort

$$V = 4a^2 c \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{VIII})$$

Soll von dieser Formel auf den Würfel übergegangen werden, so ist zu beachten, daß a den halben Abstand zweier gegenüberliegenden Randkanten bedeutet. Auf den Würfel mit der Kantenlänge 2k (früher immer 2a) übertragen, ist

⁴ Für $n \neq 3$ steht $a = b$ im Widerspruch zum Rationalitätsgesetz und ist darum kristallographisch unmöglich. Rein geometrisch bleibt es bei Trapezoedern, nur haben alle Randkanten (wie beim Rhomboeder) gleiche Länge.

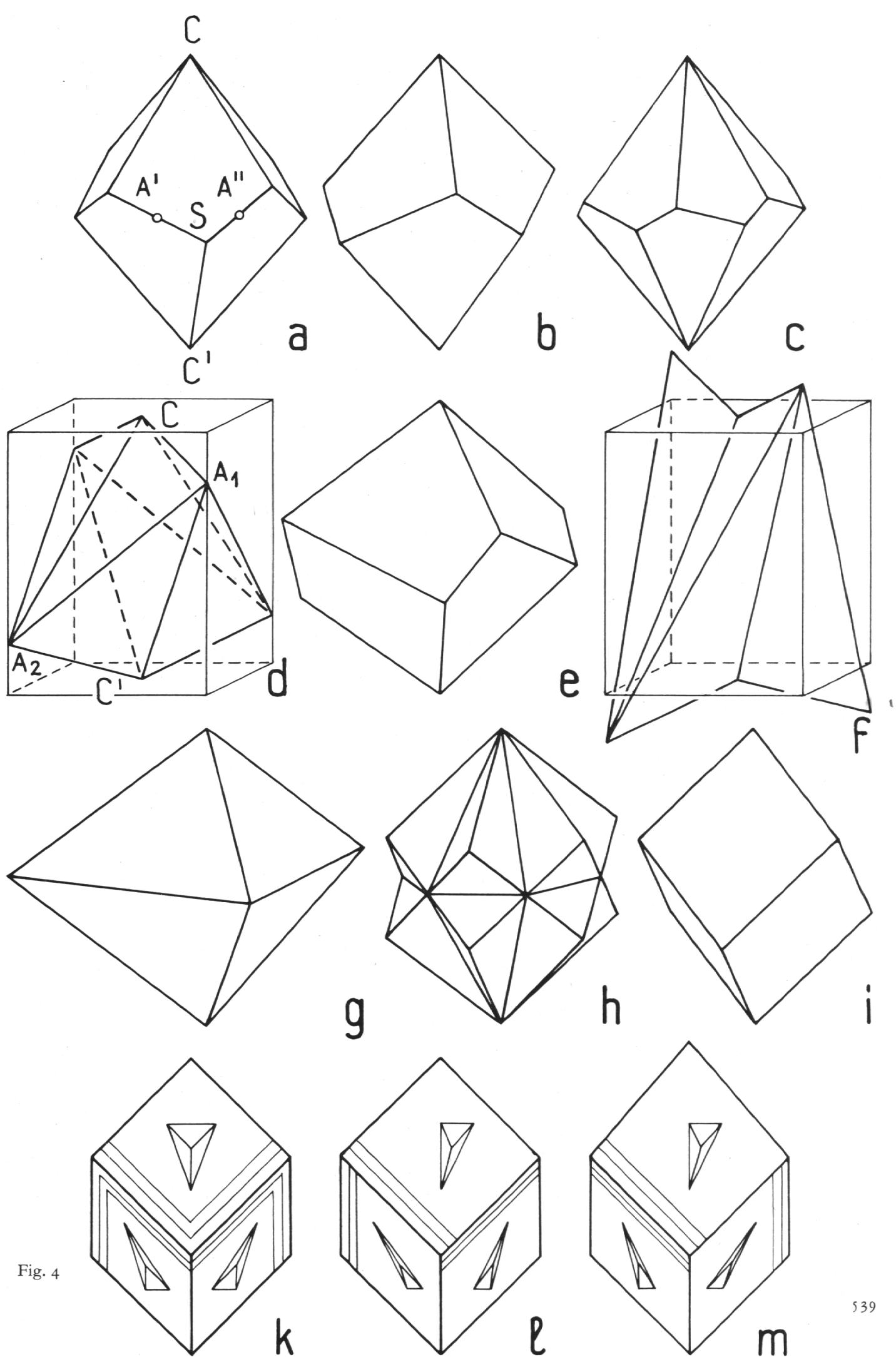


Fig. 4

$$a = k\sqrt{2} \text{ und } c = k\sqrt{3},$$

so daß (VIII) den selbstverständlichen Wert $V = 8k^3$ annimmt.

Abweichend von der Kristallographie, wo n nur die Werte 3, 4 oder 6 hat, kennt die Geometrie unendlich viele Trapezoeder. Für diese bleibt die Formel (VII) bestehen, sofern n irgendeine ganze Zahl 3 bezeichnet. Je größer n wird, um so mehr nähert sich wegen V die im allgemeinen nicht mehr rationale Länge b dem Werte a . Nun sei n so groß angenommen, daß $\sin w$ und $\cos w$ einfach durch den Bogen w und $\cos w$ durch 1 ersetzt werden dürfen. Dann wird nach (VI)

$$V = \frac{4na^2c}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{w}{2} - \frac{nc}{3} \cdot \frac{(b-a)^2}{\sin \frac{w}{2} \cos \frac{w}{2}} \quad (\text{IX})$$

Wegen (V) ist

$$b - a \leq \frac{2a \sin^2 \frac{w}{2}}{\cos w}$$

und da, wie sich leicht nachprüfen läßt, für $n = \infty$ der Subtrahend von (IX) verschwindet, bleibt schließlich

$$V = \frac{2}{3} a^2 c \pi$$

übrig. Mit wachsendem n nähern sich also die Trapezoeder mit gegebenem a und c einem geraden *Doppel-Kreiskegel*.

Am Kupferkies werden Kristalle gefunden, die dem Achtfächner der Fig. 4, d, ähneln. Dieses eigenartige Polyeder (*Skalenoeder*) ist einem Prisma eingeschrieben, dessen Basisquadrat die Seitenlänge $2a$ hat; die Höhe messe $2c$. Zwei Ecken des Vielfachs liegen im Zentrum der beiden Grundflächen, die vier andern befinden sich auf den Seitenkanten des Prismas und haben abwechselnd von den obern und untern Enden gleichen Abstand. Der Ausschnitt A, CA₂C'A, – der vierte Teil des Körpers – ist eine dreiseitige Pyramide mit der Basis ac 2. Von ihr hat die Spitze A₂ den Abstand a 2. Das Volumen des Skalenoeders ist also

$$V = \frac{8a^2c}{3} \quad (\text{X})$$

Die Formel (X) ist von der zufälligen Lage der A-Punkte unabhängig. Diese dürfen darum, jeder verschieden vom andern, auf der Prismenkante (und darüber hinaus) beliebig verschoben werden, ohne daß sich das Volumen irgendwie änderte. Es lassen sich auf diese Weise bizarre, inhaltsgleiche

Körper bilden, die mit den Kristallen im allgemeinen nichts mehr zu tun haben, jedoch zeichnerisch zu verfolgen wären. Wird etwa ein A-Punkt in $\frac{1}{2}$ der Höhe festgehalten und die andern dem vorausgehenden gegenüber zyklisch je um $\frac{1}{4}$ Höhe nach oben verschoben, so ergibt sich ein Punktsystem, das für gewisse Kristallstrukturen reale Bedeutung hat. Nun wiederum kristallographisch werden die Polyeder, wenn die A-Punkte entweder in die ihr benachbarte Basisfläche rücken (wobei sich eine tetraederähnliche Form einstellt) oder aber die Mitten der Seitenkanten besetzen (eine gerade Doppelpyramide mit quadratischem Querschnitt bildend).

Eine ungewohnte Gestalt ergibt sich, wenn die A-Punkte um ein beliebiges, aber je gleiches Stück abwechselnd über die Basisflächen hinausrücken. Die Begrenzungsdreiecke treffen sich unter ein- und ausspringenden Winkeln (Fig. 4, f). Auch in der Natur kommen solche Gebilde vor. Am Lengenbach bei Binn (Wallis) finden sich Dolomitenkristalle vom Aussehen der Fig. 4, h, nur sind sie etwas flacher. Sofort wird darin die Gestalt des Rhomboeders i (Fig. 4) erkannt und zugleich festgestellt, daß der übrige Teil des «Zwillings» – wenigstens geometrisch gesehen – das an der horizontalen Mittelebene sich spiegelnde Bild des genannten Rhomboeders ist.

Um das Volumen der *Durchwachsung* zu finden, werde vom einfachen Rhomboeder (Fig. 4, i) ausgegangen. Diesem läßt sich, wie Fig. 4, h, zeigt, eine sechsseitige Doppelpyramide mit dem Volumen $a^2c\sqrt{3}$ einbeschreiben. Sie schneidet vom Rhomboeder sechs kongruente, nasenartige Teile ab, die am Zwillings dem einfachen Rhomboeder gewissermaßen angefügt sind. Somit kommt aus Gleichung (VIII) für das gesuchte Volumen des Zwillings (Fig. 4)

$$V = \frac{5}{3} a^2 c \sqrt{3}. \quad (\text{XI})$$

Der schon mehrfach genannte Fluorit bildet ähnliche Zwillinge. Selbst kleine Sammlungen besitzen schon Belegstücke. Warum sie nicht zur Belebung der Stereometrie ausnützen? Durch die gleiche Substitution, wie sie zur kubischen Vereinfachung der Formel (VIII) angewandt wurde, kommt aus (XI) der Ausdruck $V = 10k^3$, d. h. genau ein Viertel mehr wie für den Würfel.

Das Skalenoeder der Fig. 4, e, hat einen bemerkens-

werten Symmetriecharakter. Wird die als A_2 -Achse erkennbare Richtung CC' – sie steht auf zwei andern A_2 senkrecht und ist Schnittlinie zweier Symmetrieebenen – senkrecht zu einer spiegelnden Platte gebracht und das Vielfach 90 Grad um diese Achse verdreht, so ist das Spiegelbild seiner neuen Lage der Ausgangsstellung des Körpers parallel. Eine solche Achse heißt vierzählige *Dreh-Spiegelachse*. Sie sei mit A'_4 symbolisiert. Das ergänzte Tetraeder der Fig. 3 hat drei A'_4 . Die Kristallographie kennt auch A'_6 -Achsen. Bei Beschreibung des 48-Flächners wurde bereits auf das Vorhandensein von vier A'_6 aufmerksam gemacht. Diese sind natürlich auch den flächenärmern Abkömmlingen des Hexakisoktaeders eigen. Dem Rhomboeder (Fig. 4, i) kommt (wenigstens geometrisch) eine A_6 zu.

Wie die Geometrie unendlich viele Trapezoeder kennt, weiß sie auch um unendlich viele Skalenoeder, von denen jedes als charakteristische Drehspiegelachse eine A'_{2n} hat und einem $2n$ seitigen, regelmäßigen Prisma eingeschrieben ist. Als Volumen wird allgemein

$$V = \frac{2na^2c \sin w}{3}$$

berechnet, so daß im Grenzfall ($n = \infty$, $w = 0$) $V = \frac{2a^2c}{3}$ ist, entsprechend einem geraden Doppelkreiskegel wie beim Trapezoeder.

Fig. 4, g, und Fig. 4, i, veranschaulichen Sonderfälle des Trapezoeders (Fig. 4, c), scheinen aber ganz verschiedene Symmetrie zu haben. Natürlich nur geometrisch, nicht physikalisch. Hierauf sei unter Beschränkung auf das Rhomboeder noch kurz eingegangen.

Das Rhomboeder ist als Spaltungsform des Calcits seit Jahrhunderten bekannt. Wird ein solches Spaltungsstück einen Augenblick in eine entsprechend verdünnte Säure getaucht, so bedecken sich seine Flächen mit mikroskopisch kleinen Grübchen, sogenannten *Ätzfiguren*, die alle gleiches Aussehen haben und auf ein und derselben Fläche untereinander parallel sind. In Fig. 4, k – die Projektionsart weicht von den sonst üblichen etwas ab –, ist auf der oberen Rhombenfläche eine solche Ätzfigur schematisch dargestellt. Sie ist links-rechts spiegelbildlich und verrät dadurch, daß die durch CC' gehende, auf der Rhombenfläche senkrechte Ebene nicht nur geometrisch, sondern auch physikalisch gesehen eine Symmetrieebene ist. Da sich

aber solche Ätzfiguren allüberall, oft dicht gedrängt, auf der Fläche einstellen, so stehen – und das übersteigt die gewöhnliche Betrachtungsweise – auf der Rhombenfläche unzählig viele parallele Spiegelebenen senkrecht. Jeder Punkt ist parallel gleich umgeben wie jeder andere. Man sagt, der Kristall sei *physikalisch homogen*, natürlich in einem viel höheren Sinn als Wasser, Luft, Glas usw. Auch auf den beiden untern sichtbaren Rhombenflächen ist je eine solche Ätzfigur eingezeichnet. Da aber diese Flächen der Projektionsebene gegenüber anders liegen, scheinen ihre Ätzfiguren von der obern verschieden zu sein. Werden sie aber auf den Umriß sowie die Längs- und Querdiagonale der Fläche bezogen, so zeigt es sich, daß sie verdrehte, an der horizontalen Mittelebene gespiegelte Bilder erstbeschriebener Ätzfiguren sind. Demgemäß ist CC' eine A'_6 -Achse (parallel zu drei Spiegelebenen, auf denen je eine A_2 senkrecht steht).

Fig. 4, l, zeigt, von der Dimensionierung abgesehen, die Verhältnisse des Dolomits. Da die obere Ätzfigur asymmetrisch ist, gehen dem Dolomit die drei Symmetrieebenen des Calcits ab. Die untern Ätzfiguren, welche je rechts von der Längsdiagonale der beiden Rhomben liegen, zeigen der obern gegenüber das gleiche spiegelbildliche Verhalten wie in Fig. 4, k. Der Dolomit hat somit – die drei A_2 des Calcits fehlen ja – nur eine A'_6 -Achse.

Gemäß den eingezeichneten Ätzfiguren gehen auch dem Rhomboeder der Fig. 4, m, die Spiegelebenen ab; die untern Ätzfiguren verknüpfen sich jedoch mit der obern durch A_2 -Achsen, die in der Mitte der Randkanten auf diesen senkrecht stehen. Statt der A'_6 ist bloß eine A_3 vorhanden. Fig. 4, m, hat mithin die gleiche Symmetrie wie Fig. 4, e, und entspricht den physikalischen Besonderheiten des Quarzes.

Recht oft zeigt sich die physikalische Symmetrie der Kristalle in einer feinen, gerad- oder krummlinigen *Streifung*, evtl. *Zeichnung der Flächen*. Diese aufzuspüren und mit der Lupe zu verfolgen, ist überaus reizvoll. Parallele Linienpaare, die auf den drei geätzten Rhomboedern der Fig. 4 schematisch eingezeichnet sind, sollen davon eine blasse Vorstellung geben und andeuten, daß sie der wirklichen Symmetrie des Kristalls entsprechen, ohne sie aber immer zu verraten. Wäre nämlich die Streifung der einen oder der andern Rhomben-

diagonale parallel, so müßte sie z. B. auf das linke oder rechte Flächendrittel lokalisiert sein, um Rückschlüsse auf eine Symmetrie nahezulegen, die geringer ist als die geometrische.

Das Gesagte beweist, daß übereinstimmenden Begrenzungen der Kristalle ganz verschiedene physikalische Symmetrien zugrunde liegen können. Es gibt also eine *Vieldeutigkeit der Gestalten*. Würfel und Rhombendodekaeder sind 5deutig, hexagonale Doppelpyramiden 4deutig, die 48-Flächner

eindeutig. Doch ist in jedem Fall die physikalische Gleichartigkeit der Flächen nachzuweisen (Glanz, Streifung, Ätzung usw.). Gewisse Kombinationen vieldeutiger Formen sind eindeutig. Die Kristallographie verlangt also vielseitiges und umfassendes Urteil. An reifer Überlegung und klugem Maßhalten darf es auch nicht fehlen, wenn kristallographische Einzelheiten, wie sie hier geschildert wurden, den Geometrieunterricht ausweiten und bereichern sollen.

Der Katholische Erziehungsverein der Schweiz

legte sein Ziel in den neuen Statuten nieder, die an der letzten Tagung des Zentralvorstandes und der Präsidenten der kantonalen und Regionalsektionen (vom Dezember 1957) in Zürich einstimmig genehmigt wurden. Danach erstrebt der Katholische Erziehungsverein der Schweiz (KEVS) die Verwirklichung des christlichen Erziehungsideals in Familie, Schule und Öffentlichkeit nach den Lehren und Weisungen der Kirche, in Auswertung der Ergebnisse pädagogischer Forschung und Praxis. Er bezweckt den Zusammenschluß aller Erzieher, vorab der Eltern, Priester und Lehrer, in kantonalen und regionalen Sektionen. Die örtlichen Verhältnisse sollen bei der Durchführung des Programms angemessen berücksichtigt werden.

Der KEVS faßt die katholischen Erziehungsberechtigten zu tatkräftiger Einheit, gemeinsamer Zielsetzung und Aktion zusammen. Die Bildung und Verinnerlichung aller Erziehungsfreunde durch Exerzitien, Elternschulung, Erziehungssonntage und -wochen, durch Förderung von Eltern- und Berufsberatungsstellen, durch Studientagungen und eigene Veröffentlichungen sowie durch Unterstützung des katholischen Lehrerseminars in Zug werden aufmerksam betreut.

Auf Vorschlag des Zentralpräsidenten des Katholischen Lehrervereins der Schweiz, Regierungsrat *Josef Müller*, Flüelen, wurde der *Zentralvorstand* des KEVS auf eine neue Amtsdauer wie folgt bestätigt:

Msgr. A. Oesch, Rheineck SG, Zentralpräsident

Fräulein Dr. jur. H. V. Borsinger, Basel

Stadtpfarrer Dr. Hans Metzger, Riehen-Basel

Prof. Dr. Josef Niedermann, Schwyz

Dr. A. Reck, Altstätten SG

Prof. Dr. J. Reck, Goldach SG

Dr. J. Rudin, Zürich

Otto Schätzle, Gewerbelehrer, Olten

A. Villiger, Bankverwalter, Flums SG

Josef Zimmermann, Sekundarlehrer, Frick AG

Die interne Ämterverteilung bleibt gleich wie bisher. Die Sektion Sargans stellt wie bis anhin die Rechnungskommission.

Zentralpräsident Oesch betonte in seinem Eröffnungswort die Bedeutung der *kantonalen Sektionen*, denen bei der Verwirklichung der zahlreichen Postulate das Hauptgewicht zufällt. Sie müssen auf die gegebenen Verhältnisse in ihrem Gebiet Rücksicht nehmen und die allgemein gültigen Weleitungen auf die kantonalen Verhältnisse zuschneiden. – Msgr. Oesch erstattete auch Bericht über die neunte

Umschau

Präsidentenkonferenz der schweizerischen katholischen Erziehungsorganisationen vom 23. November 1957 in Luzern. Universitätsprofessor Dr. Ed. Montalta, Zug-Freiburg, steht nun schon ein Jahrzehnt dieser bemerkenswerten Erziehungskonferenz vor und verdient dafür unsere Anerkennung. Auch der KEVS hilft die Elternschulung und Erwachsenenbildung mit allen Mitteln fördern. Er wünscht dabei, daß immer auch Schul-, Erziehungs- und Berufsfragen berücksichtigt werden, denn diese stehen bei vielen Eltern im Vordergrund des Interesses. Allgemein wird eine gewisse Koordination bei den schweizerischen katholischen Erziehungsorganisationen begrüßt. Die fruchtbare Zusammenarbeit mit den andern katholischen Erziehungsorganisationen (wie u. a. auch mit dem Katholischen Lehrerverein der Schweiz) hat sich schon wiederholt als äußerst vorteilhaft erwiesen. Der KEVS setzt sich nun seit über 80 Jahren unermüdlich für die christlichen Schul- und Erziehungsideale ein und stand an der Wiege manchen wohl gelungenen Werkes, so u. a. auch des *Orthopädiefonds* für arme invalide Kinder und junge Leute, dessen Sitz von Jona neu nach Luzern verlegt wurde und dessen Aufsicht nun der Bund innehat.

Über das im Frühling 1958 wieder zu