

Beiträge zur Analytischen Geometrie des Dreiecks

Autor(en): **Schwegler, Theodor**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **30 (1943)**

Heft 21

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-542093>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Mittelschule

Beiträge zur Analytischen Geometrie des Dreiecks

Vorbemerkung. Der Verfasser dieser Arbeit benützt seit Jahren im Unterricht an den höhern Klassen zur Lösung von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten in bescheidenem Ausmass die Determinanten. Seitdem E. Voellmy in seinen „Logarithmen- und Zahlentafeln“ auch die Determinanten 2. und 3. Ordnung aufgenommen hat, zieht der Verfasser dieses vorzügliche Hilfsmittel der Algebra erst recht heran, weil dadurch die Lösungen nicht nur elegantere Gestalt annehmen, sondern im allgemeinen auch leichter durchzuführen sind. Ausserdem pflegt er in der Analytischen Geometrie bei der Behandlung der Geraden, der Streckenteilung und der Punktreihen die einfachern Fälle der merkwürdigen Punkte des Dreiecks abzuleiten, um für Aufgaben mit Drehkörpern die nötigen Grundlagen zu bekommen. Bei der planmässigen Durchdringung und Verarbeitung des Stoffes stiess er einerseits auf Formeln, die manche Probleme leichter zu lösen gestatten, anderseits auf eine elementare Behandlung von Problemen oder eine elementare Anwendung von Methoden, die sonst beide dem Hochschulunterricht vorbehalten sind. Diese Dinge mögen für die Gesamtheit der Klasse zu hoch sein, wirken aber auf die fähigern Köpfe, im richtigen Augenblick vorgelegt, überaus anregend. Von solchen Ergebnissen sollen die folgenden Zeilen berichten.

Für die Analytische Geometrie an der Mittelschule kommen von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks der Schwerpunkt S , das Umkreiszentrum U , das Inkreiszentrum I , allenfalls die Ankreiszentren I_i ($i=1,2,3$) und der Höhenpunkt H in Frage; sie lassen sich verhältnismässig leicht finden und für lehrreiche Aufgaben verwenden (Anwendung der Guldin'schen Sätze usw.).

1) Nach dem ersten Satz von Guldin (1577—1643; aus St. Gallen, Konvertit, Jesuit, Lehrer der Mathematik in Wien und Graz) ist der Inhalt eines Drehkörpers gleich dem Produkt aus der rotierenden Fläche und dem Weg des Schwerpunktes dieser Fläche.

Seien $P_i(x_i, y_i)$ die Ecken eines beliebigen Dreiecks; dann gilt für dessen Schwerpunkt $S\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ oder in abgekürzter Schreibweise $S = \frac{P_1+P_2+P_3}{3}$

Um den Flächenschwerpunkt eines konvexen Vierecks zu finden, stehen zwei Wege offen. Man zerlegt 1. das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ in die Teildreiecke $P_1P_2P_3$, $P_1P_3P_4$ und $P_1P_2P_4$, $P_2P_3P_4$ mit den Schwerpunkten S_4 , S_2 bzw. S_3 , S_1 (Index nach dem fehlenden Eckpunkt P_i benannt). Der Schwerpunkt S des Vierecks liegt dann sowohl auf der Strecke S_2S_4 , wie auf der Strecke S_1S_3 , fällt also mit deren Schnittpunkt zusammen. — Man kann nun 2. bloss eine dieser beiden Strecken betrachten, etwa S_1S_3 . Sie wird durch S so geteilt, dass das Hebelgesetz erfüllt bleibt. Bei Berücksichtigung gleichen Richtungssinnes der Teilstrecken hat man $P_1P_2P_4 \cdot SS_3 = P_2P_3P_4 \cdot S_1S$, oder abkürzend $S_1S : SS_3 = F_3 : F_1$. Wird die Strecke P_1P_2 durch P im Verhältnis $m : n$ geteilt, so ist mit abermaliger Rücksichtnahme auf den Richtungssinn $P = (mP_2 + nP_1) : (m + n)$. Auf unsern Fall angewendet, kommt daraus:

$$S = \frac{F_1 \cdot S_1 + F_3 \cdot S_3}{F_1 + F_3}$$

Für die geometrische Konstruktion des Schwerpunktes eines beliebigen Vierecks ist in der „Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“, 1942, Heft 3 (S. 88) eine sehr einfache Anleitung samt Beweis gegeben. Sei M der Schnittpunkt der beiden Diagonalen; seien ferner H_1 und H_2 die Mitten der Diagonalen. Dann

trägt man auf der ersten (zweiten) Diagonale von H_1 (H_2) aus die Strecke MH_1 (MH_2) nach der entgegengesetzten Seite hin ab; der Endpunkt, der in bezug auf H_1 (H_2) symmetrisch zu M liegt, sei M_1 (M_2). Der Schnittpunkt der beiden Strecken M_1H_2 und M_2H_1 ist der gesuchte Schwerpunkt des Vierecks.

Die Formel

$$S = \frac{F_1 \cdot S_1 + F_3 \cdot S_3}{F_1 + F_3}$$

verlockt dazu, die Schwerpunktskoordinaten eines Vierecks ebenfalls durch die Eckkoordinaten auszudrücken. Die übliche Flächenformel für das Dreieck

$$2F = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

wird bequemer in der sog. Matrizenform gebraucht:

$$2F = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

Benützen wir nun für F_1 (bzw. F_2) wie für F_3 (bzw. F_4) die gewöhnliche, linksläufige Formel, so erhalten wir durch Addition für das Viereck die Inhaltszahl

$$2F = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad 2F = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$

Der Vergleich der Inhaltszahl in der Matrizenform beim Dreieck und beim Viereck gibt zur Bemerkung Anlass, dass sich diese Formel auf ein beliebiges Vieleck $P_1P_2P_3P_4P_5 \dots P_n$ ausdehnen lässt.

Die für den Schwerpunkt des Vierecks abgeleitete Formel ist der einfachste Fall eines viel allgemeineren Gesetzes, nämlich des Gesetzes der Mittelwerte, das die Ausmittelung von Messungsreihen ungleicher Genauigkeit, die Preisberechnung von Warenmischungen verschiedener Güte usw. beherrscht. Wird demgemäss das konvexe n -Eck $P_1P_2P_3P_4 \dots P_n$ in $(n-2)$ Teildreiecke zerlegt mit S_1, S_2, \dots, S_{n-2} als Schwerpunkten, so gilt für den Schwerpunkt des ganzen n -Ecks

$$S = \frac{F_1 \cdot S_1 + F_2 S_2 + F_3 S_3 \dots + F_{n-2} S_{n-2}}{F_1 + F_2 + F_3 \dots F_{n-2}}$$

Der Uebergang vom Schwerpunkt einer Fläche zum Schwerpunkt eines Körpers ergibt sich nun leicht.

2) Für das Umkreiszentrum U des Dreiecks $P_1P_2P_3$ liefert die Analytische Geometrie die Formel

$$U = \frac{\sin 2\alpha \cdot P_1 + \sin 2\beta \cdot P_2 + \sin 2\gamma \cdot P_3}{4 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}$$

Aber die Ableitung dieser Formel ist für die Grosszahl der Schüler zu schwer; noch schwieriger wäre es für sie, die trigonometrischen Koeffizienten in eine leicht zu handhabende algebraische Form zu bringen. Wir sehen also von dieser Formel ganz ab und lassen die Schüler das Umkreiszentrum zunächst als Schnittpunkt der Mittellote der Dreiecksseiten finden. Sie bedienen sich dabei der Geradengleichung, die durch das Richtungsmass und einen Punkt bestimmt ist. Das Mittellot der Seite P_1P_2 geht durch den Punkt $P_3^1 = (P_1 + P_2) : 2$ und bekommt als Richtungsmass den negativen Kehrwert des Richtungsmasses der Strecke P_1P_2 . Die Gleichung des Mittellotes nimmt also die Gestalt an $(x_1 - x_2) \cdot (x - x_3^1) + (y_1 - y_2) \cdot (y - y_3^1) = 0$.

Ganz analog lauten die Gleichungen der Dreiecks hö h e n; jene durch den Punkt P_3 hat z. B. die Gestalt:

$$h_3 : (x_1 - x_2) \cdot (x - x_3) + (y_1 - y_2) \cdot (y - y_3) = 0.$$

Zur Bestimmung des Umkreiszentrums U können wir auch die allgemeine Kreisgleichung benutzen, am besten in der Form

$$x^2 + y^2 - 2(ax + by) + (a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

In dieser Gleichung sind a und b (die Koordinaten des Mittelpunktes) sowie der Ausdruck $(a^2 + b^2 - r^2)$ unbekannt. Ersetzt man die laufenden Koordinaten durch die der Eckpunkte des Dreiecks, so erhält man, zusammen mit der allgemeinen Kreisgleichung, ein System vier gleich gebauter Gleichungen mit drei Unbekannten. Nach den Sätzen über die homogenen Gleichungen kann dieses System nur bestehen (s. Völlmy, Abschnitt über Determinanten, lineare Gleichungen und homogene Systeme), wenn die Determinante der Koeffizienten Null wird. Man hat also

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \equiv (x^2 + y^2) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \\ + y \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Die vier Unter-Determinanten lassen sich leicht auswerten. Dividiert man noch die erhaltene Gleichung durch den Koeffizienten von $(x^2 + y^2)$, so ergeben sich unmittelbar die drei Unbekannten a, b und $a^2 + b^2 - r^2$ (bzw. r).

Welche der beiden Methoden gangbarer ist, hängt natürlich von der Einstellung der Schüler ab. Unter allen Umständen muss man sich vor ungeheuerlichen Formeln hüten. Vielleicht ziehen es auch manche Freunde der Determinanten vor, den gekünstelten Weg über die viergliedrige Determinante zu vermeiden und das dreigliedrige Gleichungssystem ganz schlicht zu lösen. (Schluss folgt.)

Einsiedeln.

Dr. P. Theodor Schwegler.

Umschau

Himmelserscheinungen im März und April

Sonne und Fixsterne. Die scheinbare Bahn der Sonne durchschneidet am 20. März den Himmelsäquator, Frühlingsäquinoccium. Bis Ende April erreicht sie eine nördliche Deklination von 15° und steht dann im Sternbild des Widlers. Der Tagbogen der Sonne zählt nunmehr 14 Stunden 18 Minuten. Am 16. April steht Spika, der Hauptstern der Jungfrau, im Gegenpol der Sonne und geht um Mitternacht durch den Meridian. Südlich der Jungfrau steht das Viereck der Raben. Der Jungfrau geht nach Westen voraus der Löwe. In der Mitte des westlichen Himmelsfeldes stehen die Zwillinge, südlich davon der kleine Hund, nordwestlich der

Fuhrmann mit Capella. Ein rechtwinkliges Dreieck verbindet Alphard in der Hydra mit dem kl. Hund und Regulus.

Planeten. Die Planetensicht beschränkt sich im März auf Mars, Jupiter und Saturn. Mars und Saturn stehen am 7. März in Konjunktion im Sternbild des Stieres am Westhimmel. Jupiter kulminiert um 23 Uhr zwischen Krebs und Löwe. Im April (7.—17.) wird auch Merkur in West-Nordwest sichtbar.

Um die Zeit des Frühlingsäquinocciums zeigt sich in klaren Nächten das Zodiakallicht zirka 1½ Stunden nach Sonnenuntergang als eine vom Westpunkt aufsteigende mattschimmernde Pyramide.

Dr. J. Brun.