Mathematatische Musseübungen

Autor(en): **Schwegler, Theodor**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Schule**

Band (Jahr): **25 (1939)**

Heft 5

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-541935

pflege gebildet unter dem Vorsitz von Albert Peter, Lehrer, Hirslanderstr. 38, Zürich 7. Sie richtet an die Kolleginnen und Kollegen unserer ganzen Heimat die freundliche und eindringliche Einladung, recht zahlreich sich für eine oder zwei Lehrstunden zur Verfügung zu stellen und die Anmeldung so bald als möglich an das Büro des Lehrervereins Zürich, Beckenhofstr. 31, Zürich 6, zu richten. (Angabe des Unterrichtsfaches, Klasse, Schülerzahl und gewünschte Unterrichtszeit.) Es ist auch denkbar, dass in verschiedenen Kantonen die von den Erziehungsbehörden und der Lehrerschaft bestellten Vertrauensleute auch die Beteiligung an den Lehrproben organisieren und die Anmeldungen dann gesamthaft einsenden. So kann beizeiten ein Stundenplan für den Unterricht im Schulzimmer der LA aufgestellt werden. Der Besuch der LA ist nicht vom Wetter abhängig. Der Massenandrang verlangt auch die bestimmte Anmeldung beim Quartierbüro mindestens 3 Wochen vorher. Bewerber erhalten eine Bestätigung ihrer Anmeldung mit allen nötigen Angaben, und spätestens ein paar Tage vor der Ankunft in Zürich einen datierten Ausweis für den Gratisbesuch der Ausstellung zugestellt. (Der übliche Eintrittspreis für die Schüler — 80 Rappen — muss sonst mit dem Bezug des Fahrscheines entrichtet werden.) Möge durch die freudige Zusammenarbeit der schweizerischen Lehrerschaft aller Gaue die „lebendige Schule" der LA ein getreues Bild schweizerischer Vielgestaltigkeit werden! (Mitget.)

Schulfunksendungen im März

1. März. Mi. *Wer rastet, der rostet.* Prof. Dr. K. Schmid, Zürich, führt ein in die Bedeutung der Sprichwörter, die einst ein wichtiges Erziehungsmittel waren und es verdienten, dass ihnen auch in der Schule vermehrte Beachtung geschenkt wird. Eine willkommene Vorbereitung der Schüler auf diese Darbietung wäre die ausgiebige Behandlung eines Sprichwortes.

6. März. Mo. *Humor im Volkslied.* Aus dem überreichen Volksgut humoristischer Volkslieder soll ein bunter Strauss dargeboten werden. Dem Autor, Musiker Ernst Müller aus Basel, liegt es daran, den Schülern einen Begriff zu geben von gesundem, urwüchsigem Humor, wie er besonders auch aus den Röseligartenliedern hervorstrahlt.

10. März. Fr. *Rot-Gelb-Grün.* Polizeikorporal Hugi aus Bern erklärt den Landkindern den Verkehr in der Stadt und macht damit die Schulfunkhörer bekannt mit den wichtigsten Verkehrsregeln und Verkehrsordnern, also auch mit den Verkehrsampeln mit dem roten, gelben und grünen Licht. Zur Vorbereitung bietet die Schulfunkzeitschrift wertvolle Wegleitung und Hilfe.

14. März. Di. *Die Schweiz in Zürich!* Arthur Welti und Hans Bänninger geben eine Vorschau auf die schweizerische Landesausstellung, um damit unsern Schülern die Bedeutung dieses grossen, nationalen Werkes vor Augen zu führen. Nebenbei soll diese Darbietung in den Schülern den Wunsch erwecken, die Landesausstellung selber zu besuchen.

16. März. Do. *Tragödien im Walde.* Dr. S. Brunies, Basel, erzählt erschütternde Erlebnisse mit Waldtieren. „Wir wollen die Not der Tiere nicht auch noch vermehren." Dass dieser Entschluss bei den Schülern das Ergebnis der Sendung werde, ist der Wunsch des Autors.

22. März. Mi. *Us miiner Buebezyt.* Joseph Reinhart erzählt aus seiner Jugendzeit. Zur Vorbereitung wird man die Schüler bekannt machen mit dem Leben und dem Werk des Dichters. Näheres über den Dichter siehe Schulfunkzeitschrift (Verlag Ringier).

E. Grauwiller.

Mittelschule

Mathematische Musseübungen

1. *Tangensformel für zusammengesetzte Winkel.*

Schon mit den Anfangsgründen der Differenzialrechnung lässt sich die Reihenformel ableiten, die gestattet, zu jedem gegebenen trigonometrischen Tangens den entsprechenden Bogen sowohl im absoluten wie im gewöhnlichen Bogenmass zu berechnen. Diese Berechnung wird besonders einfach, wenn der trigonometrische Tangens irgend ein Stammbruch ist. Sei beispielsweise

$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{n}$, dann ist

$$\mathrm{arc}\,\varphi = \frac{1}{n} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{n^7}\ \ldots$$

und $\varphi = 206264'',8\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n^5}\ \ldots\right]$

Je grösser n, um so eher kann die Reihe abgebrochen werden; bei $n = 60$, spielt bei der Berechnung tatsächlich nur noch das 1. Glied der Reihe eine Rolle; m. a. W. bis rund 1^0 sind Bogen, Tangens und Sinus (praktisch) einander gleich. Ist n dagegen klein, so empfiehlt es sich, den entsprechenden Winkel so in zwei Teilwinkel zu zerlegen, dass deren trigonometrische Tangenten wiederum Stammbrüche sind.

Sei also $\varphi = \chi + \psi$; $\mathrm{tg}\,\chi = \frac{1}{x}$, $\mathrm{tg}\,\psi = \frac{1}{y}$:
x und y ganze Zahlen wie n.

Nun ist $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{\mathrm{tg}\,\chi + \mathrm{tg}\,\psi}{1 - \mathrm{tg}\,\chi\cdot\mathrm{tg}\,\psi}$,

also $\frac{1}{n} = \dfrac{{}^1/_x + {}^1/_y}{1 - {}^1/_x\cdot{}^1/_y} = \dfrac{x+y}{xy-1}$;

oder $xy - 1 = n(x+y)$,

also $y(x-n) = nx + 1 = n(x-n) + n^2 + 1$

mithin $\underline{y = n + \frac{n^2+1}{x-n}}$

Für den Nenner des Bruches kommen nur Teiler von $(n^2 + 1)$ in Frage; sei m ein solcher Teiler, dann ist $x = m + n$.

Beispiel:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	usw.
x	2	3	5	5	7	7	12	13	11	11	
y	3	7	8	21	18	43	17	21	50	111	

Probe $\frac{1}{5} = \dfrac{{}^1/_7 + {}^1/_{18}}{1 - {}^1/_7\cdot{}^1/_{18}} = \dfrac{25}{125}$.

also $\mathrm{arc}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{1}{5} = \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7^7}\ldots\right]$
$+ \left[\frac{1}{18} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{18^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{18^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{18^7}\ \ldots\right]$

Mit einigen vorbereitenden Rechnungen lässt sich dieses Verfahren auch anwenden, wenn n bzw. ${}^1/n$ eine beliebige (reelle) Zahl ist.

a) Liegt der Tangens n des Winkels φ in der Nähe von 1, so empfiehlt es sich, den Ergänzungswinkel χ zu suchen, so dass

$\varphi \pm \chi = 45^0$, oder $\mathrm{arc}\,\varphi \pm \mathrm{arc}\,\chi = \pi/4$ ist.

Also $\mathrm{tg}\,\chi = \dfrac{\mathrm{tg}\,45^0 - \mathrm{tg}\,\varphi}{1 + \mathrm{tg}\,45^0\cdot\mathrm{tg}\,\varphi} = \dfrac{1-n}{1+n} = k$

bzw. $\mathrm{tg}\,\chi = \dfrac{\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,45^0}{1 + \mathrm{tg}\,45^0\cdot\mathrm{tg}\,\varphi} = \dfrac{n-1}{n+1} = k$

(je nachdem $n \lesseqgtr 1$),

also $\mathrm{arc}\,\chi = k - {}^1/_3\cdot k^3 + {}^1/_5\cdot k^5 - \ldots$
in infinit.

Beispiel: $n = {}^8/_9$; bzw. ${}^9/_8$ (allg. ${}^r/_s$);
dann ist $k = \frac{9-8}{9+8} = \frac{1}{17}\left(\text{allg.} \pm \frac{r-s}{r+s}\right)$

b) Liegt n als rationaler oder irrationaler Bruch in der Nähe eines der oben behandelten Stammbrüche, so sucht man ebenfalls den Ergänzungswinkel χ zum Winkel ψ, der jenem Stammbruch entspricht, also $\psi \pm \chi = \varphi$; dadurch fällt $\mathrm{tg}\,\chi$ so klein aus, dass in der Formel für $\mathrm{arc}\,\chi$ höchstens 2 oder 3 Glieder zu berücksichtigen sind.

Beispiel: $n = \sqrt{{}^1\!/_2} = 0{,}7071063\ \ldots$ Als nächsten, leicht zu ermittelnden Bruch (s. voriges Beispiel) können wir ${}^2/_3$ oder auch ${}^3/_4$ wählen.

Also $\mathrm{tg}\,\chi = \dfrac{\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\psi}{1 + \mathrm{tg}\,\varphi\cdot\mathrm{tg}\,\psi} = \dfrac{\sqrt{{}^1/_2} - {}^2/_3}{1 + \sqrt{{}^1/_2}\cdot{}^2/_3}$
$= \dfrac{0{,}0404401}{1{,}4714045} = 0{,}02748401,$

also $\mathrm{arc}\,\chi = 0{,}027484 - {}^1/_3\cdot(0{,}027484)^3$
$= \left\{\begin{matrix}0{,}027484 - \\ 0{,}000001\end{matrix}\right\} = 0{,}027483$

oder $\chi = 206264'',8\cdot 0{,}027483$
$= 5668'',8 = 1^0\,34'\,28'',8.$

Durch Verwertung der unter a) gefundenen Formel ($n = {}^2/_3$, $k = {}^1/_5$) kommt:

$\mathrm{arc}\,\psi = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}\ \ldots\right]$
$= \frac{\pi}{4} - 0{,}1973956$

$\psi = 45^0 - 40715'',8 = 45^0 - 11^0\,18'\,35'',8$
$= 33^0\,41'\,24'',2$

also schliesslich $\varphi = \psi + \chi = 35^0\,15'\,53''$

c) Ebenso wie unter b) verfährt man, wenn $n = \mathrm{tg}\,\varphi > 1$; ist n eine ganze Zahl > 1, so geht man am besten vom Complementwinkel ψ aus, dessen Tangens $= \frac{1}{n}$ ist.

Beispiel: $\mathrm{tg}\,\varphi = \pi = 3{,}14159265$;
$\mathrm{tg}\,\psi = 3$; $\mathrm{tg}\,(90^0 - \psi) = {}^1/_3$.

$\mathrm{tg}\,\chi = \mathrm{tg}\,(\varphi - \psi) = \dfrac{\pi - 3}{1 + 3\cdot\pi} = \dfrac{0{,}1415926\ldots}{10{,}424778}$
$= 0{,}01358235$

$\chi = 0{,}0135823\cdot 206264'',8$
$= 2801'',6 = 46'\,41'',6$

$\mathrm{arc\,tg}\,(90^0 - \psi)$
$= {}^1/_3 - {}^1/_3\cdot({}^1/_3)^3 + {}^1/_5\cdot({}^1/_3)^5 - \ldots$
$= [{}^1/_5 - {}^1/_3\,({}^1/_5)^3 + {}^1/_5\cdot({}^1/_5)^5\ldots]$
$+ [{}^1/_8 - {}^1/_3\cdot({}^1/_8)^3 + {}^1/_5\cdot({}^1/_8)^5\ldots]$
$= 0{,}1973956 + 0{,}1243550 = 0{,}3217506,$
oder $\psi = 90^0 - 0{,}3217506\cdot 206264'',8$
$= 90^0 - 66365'',8$

d. h. $\psi = 90^0 - 18^0\,26'\,5'',8 = 71^0\,33'\,54'',2$

folglich $\varphi = \psi + \chi \underline{= 72^0\,20'\,35'',8}$

d) Dieses Verfahren liefert auch ein sehr leichtes Mittel, die Zahl π, um deren Berechnung die früheren Mathematiker sich so viele Mühe gaben, beliebig genau zu bestimmen.

Sei $\operatorname{tg}\varphi = {}^1/_5$, also $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{{}^2/_5}{1-{}^1/_{25}} = \frac{5}{12}$,

also $\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{120}{119} = \operatorname{tg}(45^\circ + \chi)$.

Nach a) ist $\operatorname{tg}\chi = \frac{120-119}{120+119} = \frac{1}{239}$.

Es wird also

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \operatorname{arctg} {}^1/_5 - \operatorname{arctg} {}^1/_{239}$$
$$= 4\left[{}^1/_5 - {}^1/_3\,({}^1/_5)^3 + {}^1/_5\,({}^1/_5)^5 - {}^1/_7\,({}^1/_5)^7 \ldots\right]$$
$$- \left[{}^1/_{239} - \tfrac{1}{3}\,({}^1/_{239})^3 + \ldots\right].$$

Das ist die *Clausen*sche Formel. Sie kann bekanntlich für die Rechnung noch bequemer gestaltet werden. Dazu setzt man:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{10}, \text{ also } \operatorname{tg} 2\psi = \frac{20}{99}.$$

Nun wird 2ψ um x verkleinert, so dass $\operatorname{tg}(2\psi - x) = \frac{1}{5} = \operatorname{tg}\varphi$ wird. Es ist dann $\operatorname{tg} x = {}^1/_{515}$, und man hat

$$2 \operatorname{arctg} {}^1/_{10} - \operatorname{arctg} {}^1/_{515} = \operatorname{arctg} {}^1/_5.$$

Indem man diesen Wert oben einsetzt, kommt die *Meisel*sche Formel

$$\frac{\pi}{4} = 8 \operatorname{arctg} {}^1/_{10} - 4 \operatorname{arctg} {}^1/_{515} - \operatorname{arctg} {}^1/_{239}$$

Aehnlich findet man

$$\frac{\pi}{4} = 16 \operatorname{arctg} {}^1/_{20} - 8 \operatorname{arctg} {}^1/_{4030}$$
$$- 4 \operatorname{arctg} {}^1/_{515} - \operatorname{arctg} {}^1/_{239}.$$

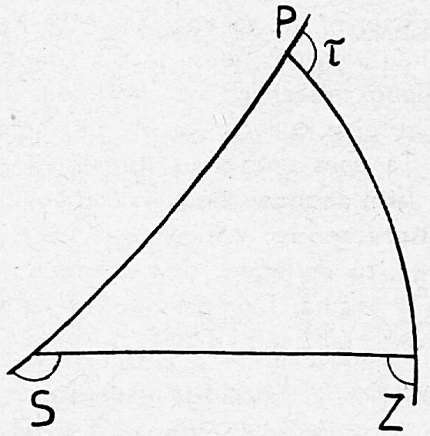
2. *Aus der austronomischen Geographie.*

Am 2. Mai 1938, $6^h\ 32^m\ 30^s$ MEZ, stand, nach der Verteilung des Schattens zu schliessen, die Sonne gerade über der Längsachse der Klosterkirche Einsiedeln ($\varphi = 47^\circ\ 7'\ 37''$, $\lambda = 8^\circ\ 45'$). Welches ist das Azimut der Kirchenachse, d. h. um welchen Winkel weicht sie von der Südrichtung ab?

Wie man durch Interpolieren in den astronomischen Jahrbüchern oder auch aus den für die Berechnung üblichen Formeln finden kann, betrug um die genannte Zeit die Deklination δ der Sonne $15^\circ\ 10'\ 36''$, wogegen die Zeitgleichung $-\ 2^m\ 59^s$ ausmachte. Um die wahre Ortszeit (WOZ) zu erhalten, ist

zur MEZ	$6^h\ 32^m\ 30^s$
die Zeitgleichung (Vorzeichen!) zu addieren	$2^m\ 59^s$
und die dem Längenunterschied (15°—$8^\circ\ 45'$) entsprechende Zeit abzuziehen	$25^m\ 00^s$
Es ist also die WOZ	$6^h\ 10^m\ 29^s$

Zu dieser WOZ gehört der direkte äussere Stundenwinkel $\tau = 92^\circ\ 37'\ 15''$. In dem sog. nautischen Dreieck Pol-Zenit-Sonne (Dreieck PZS in der Figur) sind also zwei Seiten und der von



ihnen gebildete Aussenwinkel bekannt: $PZ = 90^\circ - \varphi$, $PS = 90^\circ - \delta$ und der Aussenwinkel bei P (= Stundenwinkel τ). Um den Aussenwinkel bei Z (d. h. das Azimut der Kirchenachse) zu finden, bedienen wir uns der sog. Napierschen Analogien, aber in ihrer streng dualistischen Form, in der statt der Innenwinkel die Aussenwinkel verwendet werden. Sei S der dritte Aussenwinkel des Dreiecks, so kommt

$$\operatorname{tg}\frac{Z+S}{2} = -\operatorname{tg}\frac{\tau}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\varphi-\delta}{2}}{\cos\frac{180-(\varphi+\delta)}{2}}$$

$$\text{und } \operatorname{tg}\frac{Z-S}{2} = -\operatorname{tg}\frac{\tau}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\varphi-\delta}{2}}{\sin\frac{180-(\varphi+\delta)}{2}}$$

Die Rechnung ergibt:

$$\frac{Z+S}{2} = 2R - 62^\circ 47'\ 37''$$
$$\frac{Z-S}{2} = 2R - 18^\circ 36'\ 15''$$

Also gesuchtes

Azimut $Z = 4R - 81^\circ 23'\ 52''$

bzw. $2R - 81^\circ 23'\ 52'' = 98^\circ\ 36'\ 8''$

Das östliche Azimut der Kirche beträgt also $98^\circ\ 36'\ 8''$.

3. *Aus der Logarithmenlehre.*

Wird für ein Logarithmensystem irgend eine positive Zahl als Basis gewählt (ausser 0, 1 und ∞), so erhält jede positive reelle Zahl (Numerus oder Logarithmand) einen, und nur einen reellen Logarithmus. Alle negativen und komplexen Zahlen dagegen erhalten komplexe Logarithmen. Wird dagegen eine negative oder gar komplexe Basis gewählt, so bilden die reellen Logarithmen die seltenen Ausnahmen. Die Gauss'sche Zahlenebene nebst einer Erweiterung des Potenzbegriffes gestatten, die Verhältnisse näher zu verfolgen.

Die komplexe Zahl $a + bi$ lässt sich nach Gauss auch in den folgenden Formen darstellen:

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=e^{\ln r+(\varphi+2m\pi)i}, \text{ wobei}$$

$r=+\sqrt{a^2+b^2}$; $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$. Denn nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$e=(1+{}^1/{}_n)^n, \text{ wobei } n \rightarrow \infty$$
$$=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots$$

Nach dem gleichen Verfahren findet man auch

$$e^{\varphi}=(1+{}^1/{}_n)^{n\varphi}=\left(1+\frac{\varphi}{n}\right)^n$$
$$=1+\varphi+\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^4}{4!}+\frac{\varphi^5}{5!}+\ldots$$

Werden auch imaginäre Exponenten, etwa φi, zugelassen, so erhält man nach Scheidung des reellen und imaginären Teiles

$$e^{\varphi i}=\left(1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\frac{\varphi^6}{6!}+\ldots\right)$$
$$+i\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\frac{\varphi^5}{5!}-\frac{\varphi^7}{7!}\ \ldots\right)$$

Nun sind, wie mit den Anfängen der Differenzial-Rechnung gezeigt werden kann, diese Reihen nichts anderes als die Ausdrücke für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$. Wir setzen also

$e^{\varphi i}=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Dann ist

$$e^{\pi i}=e^{(2m-1)\pi i}=-1;$$
$$e^{2\pi i}=e^{2m\pi i}=1;\ m=1, 2, 3, \ldots$$
$$e^{{}^3/{}_2\pi i}=e^{(4m-1)/2\cdot\pi i}=-i;$$
$$e^{{}^1/{}_2\pi i}=e^{(4m+1)/2\cdot\pi i}=+i$$

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen behandeln wir die einzelnen Fälle. Im folgenden bezeichne n die Basis, N den Logarithmanden, x den Logarithmus bzw. den Exponenten.

a) n sei eine beliebige positive Zahl, N habe einen negativen Wert, also $n^x = -N = -1.N$ (N also positiv genommen). Wir bringen alles auf die Basis e, wobei ln = lognat, und erhalten:

$$e^{x\cdot\ln n}=e^{\ln N+(2m-1)\pi i};$$

also $x=\dfrac{\ln N+(2m-1)\pi i}{\ln n}$ (allg. Wert)

und $x=\dfrac{\ln N+\pi i}{\ln n}$: Hauptwert.

Da ln n konstant und reell ist, liegen die komplexen Logarithmen x in der Gauß'schen Zahlenebene auf einer Geraden, die zur Achse der imaginären Zahlen parallel ist und davon einen Abstand ${}^{\ln N}/{}_{\ln n}$ hat; die Punkte selber haben einen gegenseitigen Abstand von ${}^{2\pi}/{}_{\ln n}$.

b) Die Basis sei eine beliebige (rationale oder irrationale) negative Zahl (-n). Wir unterscheiden zwei Aufgaben.

α) Der Exponent φ durchlaufe die Gerade der reellen Zahlen: dann ist $N = f(\varphi) = (-n)^{\varphi}=e^{(\ln n+\pi i)\varphi}=n^{\varphi}\cdot e^{\pi\varphi i}$

bzw. $=e^{[\ln n+(2m-1)\pi i]\varphi}$

$$=n^{\varphi}\cdot e^{(2m-1)\pi\varphi i}$$

n^{φ} ist der eine geometrische Reihe darstellende Fahrstrahl (radius vector), $\pi\varphi$ bzw. $(2m-1)\pi\varphi$ das stetig wachsende Argument. Die im allgemeinen komplexen Werte oder Wertpunkte N als $f(\varphi)$ bilden also in der Gauß'schen Zahlenebene eine logarithmische Spirale (von der Art $r=n^{\varphi}$, um eine Formel der analytischen Geometrie der Ebene zu gebrauchen) oder entsprechend den verschiedenen Werten des Parameters m eine Schar solcher Spiralen; den ganzzahligen Werten von φ entspricht jeweils ein reelles N, gelegen auf der (horizontalen) Achse der reellen Zahlen.

β) Der Logarithmand N sei eine beliebige (rationale oder irrationale) positive oder negative Zahl; also $(-n)^x=\pm N$.

also $e^{(\ln n+\pi\cdot i)x}=e^{\ln N+\left\{ {2m \atop 2m-1} \right\}\pi i}$

also $$x=\frac{\ln N+\left\{ {2m \atop 2m-1} \right\}\pi i}{\ln n+\pi i}$$

$$=\frac{\left[\ln N\cdot\ln n+\left\{ {2m \atop 2m-1} \right\}\pi^2\right]+\left[\left\{ {2m \atop 2m-1} \right\}\ln n-\ln N\right]\pi\cdot i}{(\ln n)^2+\pi^2}$$

Einen Einblick darin, wie der Parameter m zu wählen ist, gewährt ein konkretes Beispiel; dieses gibt uns zugleich eine Vorstellung bzw. ein Bild von der durch x gebildeten Punktreihe.

Den Potenzgleichungen $(-2)^x=4$ und $(-2)^x=16$ entsprechen offenbar die Exponentialgleichungen:

$$e^{(\ln 2+\pi i)x}=e^{\ln 4+2\pi i} \text{ und}$$
$$e^{(\ln 2+\pi i)x}=e^{\ln 16+4\pi i}$$

Daraus gewinnt man ohne weiteres

$$x=\frac{2\ln 2+2\pi i}{\ln 2+\pi i}=2;\ m=1;$$
$$\text{und } x=\frac{4\ln 2+4\pi i}{\ln 2+\pi i}=4;\ m=2.$$

Wählen wir für die zwischen 4 und 16 liegenden Numeri vorerst $m = 1$. Dann wird etwa für $(-2)^x=5$ nach der vorhin abgeleiteten Formel

$$x = \frac{\ln 5 + 2\pi i}{\ln 2 + \pi i}$$
$$= \frac{[\ln 5 \cdot \ln 2 + 2\pi^2] - [\ln 5 - 2 \ln 2]\, \pi i}{[\ln 2]^2 + \pi^2}$$

Der reelle wie der imaginäre Teil haben also für $4 \leq N \leq 16$ ihren Mindestwert bei $4 + {}^1/n$, ihren Höchstwert bei $16 - {}^1/n$ $(n \rightarrow \infty)$. Die Logarithmen x bilden hiemit ein vom Punkt (2:0) a b w ä r t s laufendes Kurvenstück, das seinen Endwert erreicht im Punkt

$$\frac{4(\ln 2)^2 + 2\pi^2}{(\ln 2)^2 + \pi^2}; -\frac{2 \ln 2 \cdot \pi i}{(\ln 2) + \pi^2}$$

oder (2,093; —0,421 i)

Nehmen wir nun m = 2, so erhalten wir im obigen Beispiel $(-2)^X = 5$

$$x = \frac{\ln 5 + 4\pi i}{\ln 2 + \pi i}$$
$$= \frac{[\ln 5 \cdot \ln 2 + 4\pi^2] + [4 \ln 2 - \ln 5]\pi i}{(\ln 2)^2 + \pi^2}.$$

Also für $N = \begin{cases} 4 + {}^1/n \\ 16 - {}^1/n \end{cases}$ hat, falls $n \rightarrow \infty$, der r e e l l e Teil seinen $\left.\begin{matrix}\text{Mindest}\\ \text{Höchst}\end{matrix}\right\}$wert, der i m a g i n ä r e Teil dagegen, der p o s i t i v ist, seinen $\left.\begin{matrix}\text{Höchst}\\ \text{Mindest}\end{matrix}\right\}$wert. Das Kurvenstück beginnt mit dem Punkt

$$\frac{2(\ln 2)^2 + 4\pi^2}{(\ln 2)^2 + \pi^2}; \quad \frac{2 \ln 2 \cdot \pi i}{(\ln 2)^2 + \pi^2}$$ oder (3,902; 0,421 i) und endet im Punkt (4; 0).

Da die Basis (-n) sich darstellen lässt als $e^{\ln n + (2m' - 1)\pi i}$, so erhalten wir auch hier für denselben Numerus beliebig viele komplexe Logarithmen, die je in einem der eben beschriebenen Kurvenstücke liegen.

Nach dem eben eingeschlagenen Verfahren fassen wir also im p o s i t i v e n Bereich die Numeri in Gruppen von n^{2m} bis $n^{2(m+1)}$ zusammen, im n e g a t i v e n in Gruppen von n^{2m-1} bis n^{2m+1}, und erhalten für jede Gruppe zwei (Scharen von) Kurvenstücken.

c) Die Basis sei eine k o m p l e x e Z a h l von der Form $(a+bi) =$ $c \cdot e^{\varphi i}$, wobei $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

Sowohl der Fall, dass der Exponent x wie der Numerus N r e e l l seien, führt offenbar auf die unter b) behandelten zwei Fälle zurück; aber auch der Fall, dass Exponent oder Numerus k o m p l e x sind.

Sei z. B. $N = (a + bi)^{y + zi}$
$$= e^{(\ln c + \varphi i)(y + zi)}$$
$$= e^{(y \cdot \ln c - z\varphi) + (z \cdot \ln c + y\varphi)i}$$

Das Ergebnis ist reell, so oft $(z \cdot \ln c + y\varphi)$ null wird. Da sowohl y wie z beliebig veränderlich sind, so erhalten wir hier ∞^2 l o g a r i t h m i s c h e S p i r a l e n.

Sei endlich $(a+bi)^x = u + vi = e^{\ln w + \psi i}$.

Darin sei $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ und $\operatorname{tg}\psi = \frac{v}{u}$.

Dann ist nach dem vorigen $x = \dfrac{\ln w + \psi i}{\ln c + \varphi i}$

$$= \frac{[\ln w \cdot \ln c + \varphi \cdot \psi] + [\psi \cdot \ln c - \varphi \cdot \ln w]i}{[\ln c]^2 + \varphi^2}.$$

So oft also $w^{\varphi} = c^{\Psi}$ wird, wird der Exponent x reell. Bei konstantem u (bzw. v) bilden die den stetig wachsenden v (bzw. u) entsprechenden Werte von x wieder Kurvenstücke analog denen von b β).

Einsiedeln. *P. Theodor Schwegler O. S. B.*

Lehrerin und weibliche Erziehung

Der Pavillon der Schweizerfrau an der Landesausstellung*

Am 5. November waren die Vertreterinnen aller grossen Schweizerischen Frauenverbände und Frauenzentralen und ähnlicher Institutionen zu einer S i t z u n g in Zürich versammelt, um über das vorliegende Projekt der Mitarbeit der Frau an der Landesausstellung (LA) orientiert zu werden und um Stellung zu nehmen zu seiner Durchführung.

Erfreulich war die grosse Beteiligung aus allen Landesteilen: gemeinnützige, berufliche und weltanschaulich orientierte Organisationen, große Verbände und kleinere Gruppen waren vertreten. Nach kurzer Begrüssung durch Frau Dr. H e n r i c i (Zürich) ergriff Herr Chefarchitekt

* Eingesandt von der Redaktion des „Schweizer Frauenblatt".