

# Näherungsberechnung dreiseitig eingespannter Platten

Autor(en): **Straub, Hans**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **125/126 (1945)**

Heft 12: **Generalversammlung Schweiz. Ingenieur- und Architekten-Verein, 22. bis 24. September 1945 in Zürich**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-83725>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Der Dachstuhl

Mit seinem doppelten Sprengwerk von 15 m Spannweite stellt der Dachstuhl eine beachtenswerte handwerkliche Leistung dar. Er krankte jedoch schon zur Zeit seiner Erstellung am Ende des 17. Jahrhunderts unter der Verwendung von zu langen und zu schlanken Hölzern, schlechter Ausbildung der Binderfüsse und zu schwach bemessenen Unterzügen in der Südwestecke. Die dort durchgebrochenen Unterzüge hat man durch Hetzer-

konstruktionen ersetzt, die Dachhaut gehoben und gesichert unter Erhaltung des alten Bestandes der Dachkonstruktion.

Dass die Restaurierungsarbeiten am «Napf» zum guten Gelingen gebracht wurden, verdankt der Architekt der wertvollen Mitarbeit des Städtischen Hochbauinspektorates. Die baugeschichtlichen Angaben gehen auf Forschungen des Stadtarchivars Dr. H. Waser zurück, für die ich auch hier bestens danke.

Näherungsberechnung dreiseitig eingespannter Platten

Von Dipl. Ing. HANS STRAUB, Rom

Der im Wasser- oder Tiefbau tätige Eisenbetoningenieur hat häufig rechteckige, durch Erd- oder Wasserdruck belastete Platten zu berechnen, die längs drei Seiten eingespannt, längs der vierten jedoch frei beweglich sind. Die Aufgabe stellt sich z. B. beim Bau von offenen Behältern, Schwimmkasten, Druckluftcaissons u. dgl.

Die strenge Lösung des Problems, die auf die Integration der Differentialgleichung der elastischen Fläche

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{12(m^2 - 1)}{m^2 E h^3} p$$

hinausläuft, ist, auch bei Benützung der von Nadai<sup>1)</sup> angegebenen Differenzenmethode, zu kompliziert und zeitraubend, um in der Praxis Anwendung zu finden. Da andererseits Tafeln für diesen Lagerungsfall, soweit mir bekannt ist, nicht veröffentlicht sind<sup>2)</sup>, pflegt der Konstrukteur die für die Bemessung und Bewehrung massgebenden Biegemomente nach den beiden Richtungen auf Grund elementarer Ueberlegungen abzuschätzen, was bei einiger Uebung auch zu praktisch durchaus genügenden Ergebnissen führt.

Um jedoch bei der häufig wiederkehrenden Aufgabe nicht nur auf gefühlsmässige Schätzungen angewiesen zu sein, hat der Verfasser versucht, auf Grund eines Näherungsverfahrens zwei kleine Tafeln zu berechnen, denen die Koeffizienten zur Berechnung der Biegemomente unmittelbar entnommen werden können. Das benützte Verfahren beruht auf dem Umstand, dass «es für die näherungsweise Berechnung des Biegungs Pfeiles ziemlich gleichgültig bleibt, von welcher besonderen Annahme über die Gestalt der elastischen Fläche man dabei ausgeht, wenn sie nur einigermaßen den Umständen angemessen ist»<sup>3)</sup>.

Die Gestalt der elastischen Fläche der Platte (Abb. 1) sei durch folgenden Ansatz gegeben:

$$w = C (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) (4 - 5\eta + \eta^5) \dots (1)$$

worin  $\xi = \frac{x}{a}$ ;  $\eta = \frac{y}{b}$ ;  $C = 4 w_{max}$

Man überzeugt sich leicht, dass dieser Ansatz den Randbedingungen genügt. In der Tat werden längs der drei eingespannten Seiten Verschiebung und Neigung ( $w$  und  $w'$ ) gleich null, während längs des freien Randes in Richtung normal zur Randlinie Moment und Querkraft ( $w''$  und  $w'''$ ) den Wert null annehmen (wobei für die Querkraft allerdings der Einfluss des Scherungs-Momentes vernachlässigt wird).

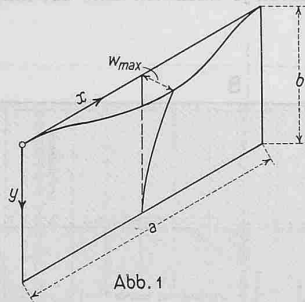


Abb. 1

Die Konstante C ergibt sich wie üblich durch Gleichsetzen der Formänderungsarbeit mit der äusseren Arbeit der Belastung.

Die Formänderungsarbeit ist durch folgenden Ausdruck gegeben<sup>4)</sup>:

$$A_f = \frac{G h^3}{12} \int \left\{ \frac{m}{m-1} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] + \frac{2}{m-1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dF$$

oder, wenn, wie für Eisenbeton zulässig,  $m = \infty$  und  $G = \frac{m E}{2(m+1)} = \frac{E}{2}$  gesetzt wird,

$$\left. \begin{aligned} M_x &= E J \frac{C}{a^2} (2 - 12\xi + 12\xi^2) (4 - 5\eta + \eta^5) \\ M_y &= E J \frac{C}{b^2} (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) 20\eta^3 \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

<sup>1)</sup> Nadai, «Elastische Platten». Springer, Berlin.  
<sup>2)</sup> Vgl. Dr. H. Bleich, «Die Berechnung schmaler, dreiseitig gelagerter Platten» in Bd. 114, S. 141\* der SBZ (16. Sept. 1939), wo der Verfasser einleitend feststellt: «Während der Ingenieur zur Berechnung vierseitig gelagerter Platten in jedem Handbuch Zahlentafeln vorfindet, ... sind entsprechende Tafeln für die Berechnung dreiseitig gelagerter Platten nicht veröffentlicht worden, obwohl solche Platten häufig genug vorkommen».  
<sup>3)</sup> A. und L. Föppl, «Drang und Zwang», 3. Aufl., 1. Bd., § 20 (S. 145).  
<sup>4)</sup> Föppl, 1. c., S. 131.

worin  $h$  die Plattendicke bedeutet. Mit dem durch Gl. (1) gegebenen Wert von  $w$  erhält man nach Durchführung der Differenzierungen

$$A_f = \frac{E h^3}{24} C^2 \int \left\{ \frac{1}{a^4} (2 - 12\xi + 12\xi^2)^2 (4 - 5\eta + \eta^5)^2 + \frac{1}{b^4} (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4)^2 (20\eta^3)^2 + \frac{1}{a^2 b^2} 2 (2\xi - 6\xi^2 + 4\xi^3)^2 (5\eta^4 - 5)^2 \right\} dF$$

und über die Plattenfläche  $a b$  integriert

$$A_f = \frac{E h^3}{24} C^2 \left( \frac{800}{231 a^4} + \frac{40}{441 b^4} + \frac{128}{189 a^2 b^2} \right) \dots (3)$$

Die äussere Arbeit der Belastung  $p$  beträgt

$$A_a = \int \frac{p w}{2} dF \dots (4)$$

Es sollen die beiden Fälle einer gleichmässig verteilten und einer linear von null am freien bis  $p_{max}$  am gegenüberliegenden, eingespannten Rand wachsenden Belastung betrachtet werden.

Für die gleichmässig verteilte Belastung  $p$  ergibt sich nach den Gl. (4) und (1)

$$A_a = \frac{p}{2} C \int (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) (4 - 5\eta + \eta^5) dF = \frac{p C}{36} (5)$$

Für die dreieckförmig verteilte Belastung  $p = \frac{y}{b} p_{max} = \eta p_{max}$  hingegen

$$A_a = \frac{p_{max}}{2} C \int (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) (4 - 5\eta + \eta^5) \eta dF = \frac{p_{max} C}{126} (6)$$

Da die elastische Fläche nach der getroffenen Näherungs-Annahme für beide Belastungsfälle bis auf den Koeffizienten C die selbe Gestalt besitzt, unterscheiden sich auch die Biegemomente in beiden Fällen nur durch einen konstanten Faktor, und wir können uns im folgenden auf die Behandlung eines von beiden beschränken. Wir wählen dazu den Fall der dreieckförmig verteilten Last.

Der Wert von C ergibt sich wie gesagt durch Gleichsetzen der Ausdrücke für  $A_f$  und  $A_a$ , in unserm Fall somit der rechten Seiten der Gl. (3) und (6):

$$\frac{E h^3}{24} C^2 \left( \frac{800}{231 a^4} + \frac{40}{441 b^4} + \frac{128}{189 a^2 b^2} \right) = \frac{p_{max} C}{126} (7)$$

woraus

$$C = p_{max} \frac{a^2 b^2}{E h^3} \frac{693 \lambda^2}{330 \lambda^4 + 2464 \lambda^2 + 12600} \dots (8)$$

wenn das Seitenverhältnis  $\frac{a}{b}$  mit  $\lambda$  bezeichnet wird.

Mit der Bestimmung von C ist die Gestalt der elastischen Fläche vollständig festgelegt und die Biegemomente ergeben sich ohne weiteres nach den bekannten Ausdrücken

$$\frac{M_x}{E J} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \frac{M_y}{E J} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Durch Differenzieren des Ausdrucks für  $w$  aus Gl. (1) erhält man

$$\left. \begin{aligned} M_x &= E J \frac{C}{a^2} (2 - 12\xi + 12\xi^2) (4 - 5\eta + \eta^5) \\ M_y &= E J \frac{C}{b^2} (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) 20\eta^3 \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

Nach Einsetzen des Ausdrucks für C aus Gl. (8) und kürzen von J gegen  $\frac{h^3}{12}$  ergibt sich schliesslich

Tabelle 1

$\lambda$	$c_1$	$c_3$	$\lambda$	$c_1$	$c_3$
1,4	0,309	1,187	2,6	0,130	5,953
1,6	0,274	1,796	2,8	0,111	6,800
1,8	0,240	2,521	3,0	0,094	7,605
2,0	0,208	3,331	3,2	0,080	8,360
2,2	0,179	4,194	3,4	0,068	9,050
2,4	0,153	5,077	3,6	0,058	9,704

Tabelle 2

$\xi \rightarrow$ $\eta \downarrow$	0		0,1		0,2		0,3		0,4		0,5	
	$c_2$	$c_4$	$c_2$	$c_4$	$c_2$	$c_4$	$c_2$	$c_4$	$c_2$	$c_4$	$c_2$	$c_4$
0	8,00	0	3,68	0	0,32	0	-2,08	0	-3,52	0	-4,00	0
0,2	6,00	0	2,76	0	0,24	0	-1,56	0,01	-2,64	0,01	-3,00	0,01
0,4	4,02	0	1,85	0,01	0,16	0,03	-1,05	0,06	-1,77	0,07	-2,01	0,08
0,5	3,06	0	1,41	0,02	0,12	0,06	-0,80	0,11	-1,35	0,14	-1,53	0,16
0,6	2,16	0	0,99	0,03	0,09	0,11	-0,56	0,19	-0,95	0,25	-1,08	0,27
0,8	0,66	0	0,30	0,08	0,03	0,26	-0,17	0,45	-0,29	0,59	-0,33	0,64
1,00	0,00	0	0,00	0,16	0,00	0,51	0,00	0,88	0,00	1,15	0,00	1,25

$$M_x = p_{\max} a^2 \frac{231}{1320 \lambda^4 + 9856 \lambda^2 + 50400} \times \left. \begin{aligned} &\times (2 - 12 \xi + 12 \xi^2) (4 - 5 \eta + \eta^5) \\ &\times (\xi^2 - 2 \xi^3 + \xi^4) 20 \eta^3 \end{aligned} \right\} (10)$$

$$M_y = p_{\max} b^2 \frac{231 \lambda^4}{1320 \lambda^4 + 9856 \lambda^2 + 50400} \times \left. \begin{aligned} &\times (\xi^2 - 2 \xi^3 + \xi^4) 20 \eta^3 \end{aligned} \right\}$$

Tabelle 1 enthält die nur vom Seitenverhältnis  $\lambda = \frac{a}{b}$  abhängigen Koeffizienten  $c_1$  und  $c_3$ ;  $c_2$  und  $c_4$ , die die Veränderlichkeit der Momente über die Plattenfläche in Funktion der Koordinaten  $\xi = \frac{x}{a}$  und  $\eta = \frac{y}{b}$  spiegeln, sind in Tabelle 2 zusammengestellt, wobei die Koeffizienten der massgebenden Momente  $M_x$  für  $\xi = 0, \eta = 0$  und für  $\xi = 0,5, \eta = 0$ , sowie  $M_y$  für  $\xi = 0,5, \eta = 1$  fett gesetzt sind.

Für den Fall der gleichmässig verteilten Belastung wird an Stelle von Gl. (7) die rechte Seite des Ausdrucks (5) dem Ausdruck für  $A_f$  nach Gl. (3) gleichgesetzt, wodurch man für  $C, M_x$  und  $M_y$  einen  $\frac{126}{36} = 3\frac{1}{2}$  mal grösseren Wert erhält (wobei an Stelle von  $p_{\max}$  ganz einfach  $p$  gesetzt wird).

Zur grösseren Bequemlichkeit sind die Koeffizienten  $c_1$  und  $c_3$  auch in einem Diagramm dargestellt (Abb. 2, S. 124).

Die Koeffizienten der Ausdrücke (10) können ein für allemal ausgewertet und in Zahlentafeln zusammengestellt werden, mit deren Hilfe sich dann die Berechnung der Biegemomente äusserst rasch und einfach gestaltet. Wir setzen zu diesem Zweck

Durch Gleichsetzen der Ausdrücke für die Einspannmomente in den Punkten  $\xi = 0, \eta = 0$  und  $\xi = 0,5, \eta = 1,0$  ( $c_2 = 8$  und  $c_4 = 1,25$ ) erhält man das Seitenverhältnis  $\lambda = \frac{4}{5} \sqrt{10} = 2,53$ , für das die grössten Einspannmomente in beiden Richtungen gleich werden, und zwar

$$\left. \begin{aligned} \frac{23100}{1320 \lambda^4 + 9856 \lambda^2 + 50400} &= c_1 \\ \frac{23100 \lambda^4}{1320 \lambda^4 + 9856 \lambda^2 + 50400} &= c_3 \\ (2 - 12 \xi + 12 \xi^2) (4 - 5 \eta + \eta^5) &= c_2 \\ (\xi^2 - 2 \xi^3 + \xi^4) 20 \eta^3 &= c_4 \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

$$M_{x \max} = M_{y \max} = -0,0110 p_{\max} a^2$$

für dreieckförmig verteilte Last und

$$M_{x \max} = M_{y \max} = -0,0386 p a^2$$

für gleichmässig verteilte Last.

Dann erhält man für die Momente folgende einfache Ausdrücke

Es ist offensichtlich, dass an die Genauigkeit vorstehenden Näherungsverfahrens keine zu strengen Ansprüche gestellt werden dürfen. Während bei vierseitig gelagerten Platten analoge Näherungslösungen sehr gute Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der strengen Theorie zeigen (Beispiele bei Föppl, l. c.), ist es für die dreiseitig gelagerte und erst recht für die auf drei Seiten eingespannte, doch längs der vierten frei bewegliche Platte viel schwieriger, einen der Wirklichkeit sich nähernden, einfachen Ansatz für die Form der elastischen Fläche zu finden. Die rohe Anschauung zeigt schon, dass diese bei verhältnismässig langen, schmalen Platten eine grundsätzlich verschiedene Gestalt besitzt, je nachdem eine der langen oder eine der kurzen Seiten

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{c_1 c_2}{100} p_{\max} a^2 \\ M_y &= -\frac{c_3 c_4}{100} p_{\max} b^2 \end{aligned} \right\} \text{für dreieckförmige Belastung}$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{3,5 c_1 c_3}{100} p a^2 \\ M_y &= -\frac{3,5 c_3 c_4}{100} p b^2 \end{aligned} \right\} \text{für gleichmässig verteilte Belastung}$$

(Das Minuszeichen wurde lediglich beigefügt, weil es in der Praxis üblich ist, die Einspannmomente als negativ zu bezeichnen).



Abb. 6a. Staumauer Schöllenen, Längsschnitt 1:3000

Urseren-Kraftwerke, Projekt 1943/44

des Rechtecks frei beweglich ist. Für die Grenzwerte  $\lambda = 0$  und  $\lambda = \infty$  geht die Aufgabe in den Fall des beidseitig, bzw. einseitig eingespannten Balkens über, und daraus ergeben sich ohne weiteres zwei Grenzen, jenseits derer die Näherungsformeln auf keinen Fall mehr verwendet werden dürfen. Für gleichmässig verteilte Belastung müssen nämlich auf alle Fälle die Einspannmomente

$$M_x \leq \frac{p a^2}{12} \text{ und } M_y \leq \frac{p b^2}{2}$$

bleiben. Mit den Bezeichnungen der Formeln (12) gehen diese Bedingungen in folgende Ausdrücke über:

$$\frac{3,5 c_1 c_2}{100} \leq \frac{1}{12} \text{ und } \frac{3,5 c_3 c_4}{100} \leq \frac{1}{2}$$

woraus sich die beiden erwähnten Grenzen zu  $\lambda = 1,46$  und  $\lambda = 4,25$  ergeben. Praktisch wird es ratsam sein, den Anwendungsbereich der auf den gewählten Ansatz (1) aufgebauten Näherungslösung etwa auf das Gebiet  $1,6 < \lambda < 3,5$  zu beschränken, das übrigens ungefähr demjenigen entspricht, für das kreuzweise Bewehrung überhaupt in Frage kommt.

Es wäre von Interesse, vorstehende Näherungslösung mit Versuchsergebnissen zu vergleichen.

## Das Projekt 1943/44 der Urseren-Kraftwerke

Bautechnischer Bericht, erstattet im Auftrag des Studiensyndikats für die Urseren-Kraftwerke

Von Prof. Dr. E. MEYER-PETER und Dipl. Ing. TH. FREY, Zürich

(Fortsetzung von Seite 110)

### IV. BESCHREIBUNG DER ANLAGEN

#### A) Akkumulieranlage

##### 1. Staumauer Schöllenen

Nachdem sich auf Grund der geologischen und geotechnischen Untersuchungen ergeben hat, dass die Staumauer ohne Bedenken zum Teil auf Aargranit und zum Teil auf dessen Gneishülle fundiert werden kann, hängt die Wahl der Sperrstelle und der damit zusammenhängende Mauertyp in erster Linie von der Topographie der Schöllenschlucht, insbesondere von der Tiefe und Breite der mit Schutt erfüllten alten Talrinne ab. Mit Rücksicht auf den letzten Umstand musste der erste, sehr eingehend verfolgte Gedanke, am eigentlichen Schluchteingang, südlich des Urnerlochs, eine kombinierte Gewichtsbogenmauer zu erstellen, fallen gelassen werden. Will man einen sehr bedeutenden, kostspieligen und zeitraubenden Schuttauahub vermeiden, muss die Sperre mit ihrer wasserseitigen Flucht etwa 20 m südlich des oberen Ausgangs des Urnerlochs zu stehen kommen, wo der Fundamentaushub nur noch etwa 30 m Tiefe umfasst (Abb. 6). Die Form der Talhänge erlaubt hier aber nur eine Gewichtsbogenmauer, deren Fuss etwas oberhalb des ersten Absturzes des Teufelfalles liegt, deren linkes Widerlager sich gegen eine sehr steile und talabwärts etwas ausweichende Felswand anlehnt und deren rechtes Widerlager zum Teil in der «Grossen Kehle» liegt und sich gegen deren nördliche Seitenwand abstützt. Da der tiefste Punkt des Cañons im Bereich der Foundation auf etwa Kote 1388 liegt, während die Mauerkrone im Vollausbau Kote 1633 erreichen soll, beträgt also die maximale Sperrhöhe 245 m.

Für die Dimensionierung der Talsperre war der Nachweis der Vermeidung von Zugspannungen auf der Wasserseite bei

vollem Becken unter Annahme eines 100%igen Auftriebes (mit vollem Wasserdruck auf der Wasserseite und Druck Null auf der Luftseite) massgebend. Weiter wurde mit Rücksicht auf absolute Sicherheit auch gegen äussere Angriffe eine Mauerkrone von 20 m Breite gewählt. Der Anzug auf der Wasserseite nimmt von oben, wo er 5% beträgt, gegen den Fuss auf 20% zu; auf der Luftseite erfährt er eine allmähliche Steigerung von 75% auf 78%. Die Basisbreite auf dem ungefähr auf Höhe der heutigen Talsohle liegenden Mauersockel (Kote 1425) beträgt 176,9 m. Das Verhältnis von Mauerbreite zu Mauerhöhe wird somit an der Basis zu 0,85. Die Kronenlänge (Abb. 7) misst 550 m, die erforderliche Betonkubatur 4 700 000 m<sup>3</sup>; der Aushub bis zur Felsrinne erfordert nur eine Kubatur von 100 000 m<sup>3</sup> gegenüber mehr als 1 Mio m<sup>3</sup> bei einer weiter nach Süden angeordneten Gewichtsbogenmauer. Der Felsaushub wird auf 900 000 m<sup>3</sup> geschätzt. Auf der Luftseite soll die Sperre mit Granit verkleidet werden.

Die Sperre wird unter Offenhalten von Dilatationsfugen in Blöcke von 15 m Breite unterteilt, was auch zur Sicherung guter Auflagerbedingungen notwendig ist.

Die Maximalwerte der berechneten Hauptspannungen betragen: bei vollem Becken auf der Luftseite 50,7 kg/cm<sup>2</sup>, bei leerem Becken auf der Wasserseite 44,3 kg/cm<sup>2</sup>. Bei Anwendung eines hochwertigen Betons, dessen Prismendruckfestigkeit im Minimum zu 400 kg/cm<sup>2</sup> angenommen wird, ist somit ausreichende Sicherheit gewährleistet. Dazu kommen die vorzüglichen Fundationsverhältnisse, die durch Hochdruckinjektionen bis in grosse Tiefe unter dem Fundament noch verbessert werden sollen, sodass das projektierte Bauwerk trotz seiner aussergewöhnlichen Höhe unbedenklich erstellt werden darf.

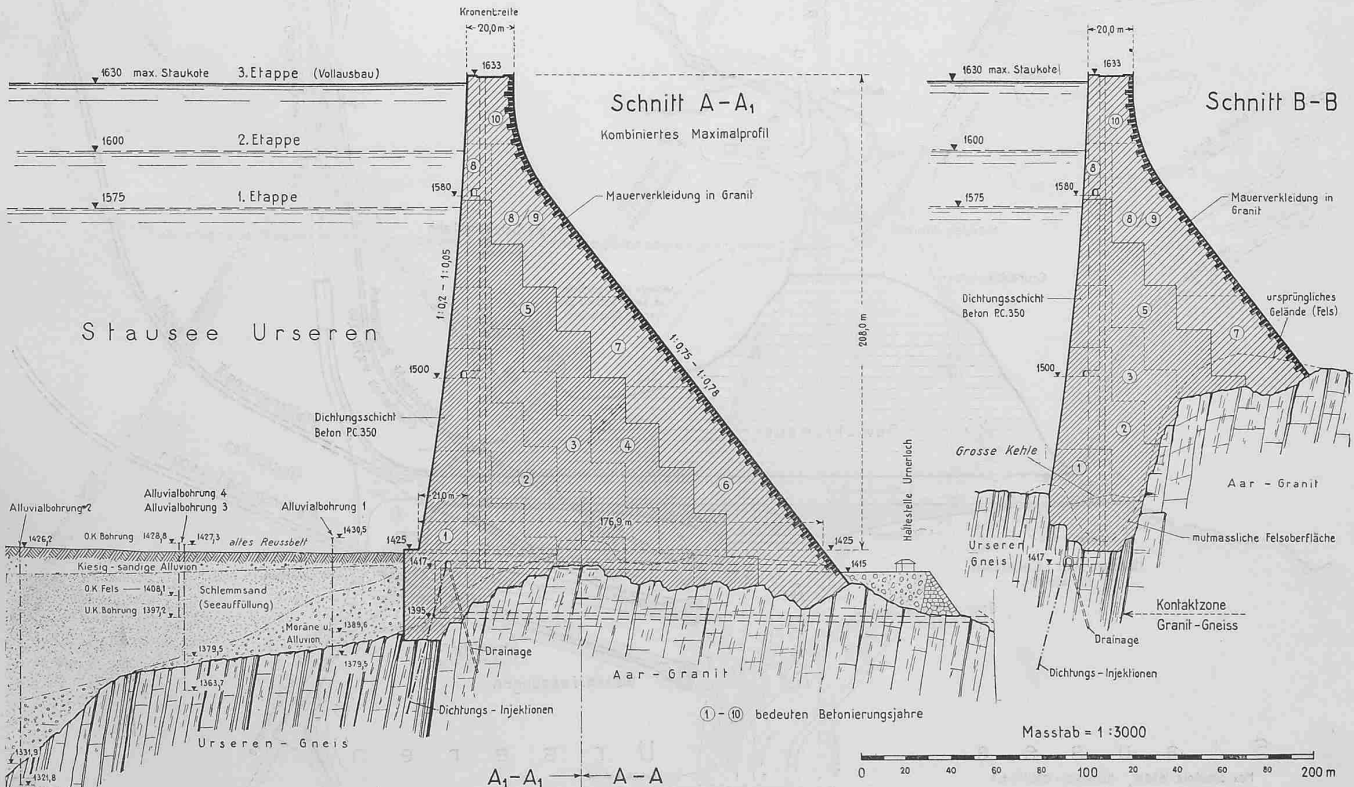


Abb. 6b. Staumauer Schöllenen, Querschnitte 1:3000