Band 89. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 20

Wärmeübergang in Grenzschichten bei grossen Temperatur-Unterschieden zwischen Wand und Flüssigkeit.

Von Prof. Dr. A. STODOLA, Zürich.

Bei grossen Temperaturunterschieden zwischen Flüssigkeit und Wand darf weder die Zähigkeit noch der Rauminhalt innerhalb der Grenzschicht als unveränderlich vorausgesetzt werden, wodurch alle Formeln höchst verwickelt werden, indessen im Sonderfall der Strömung längs einer Platte dennoch auf die im nachfolgenden mitzuteilende einfache Beziehung führen.

Mit den Bezeichnungen meiner Aufsätze vom 30. Oktober 1926 und 9. April 1927 in der „Schweiz. Bauzeitung" (und fortlaufender Nummerierung) lauten die hydrodynamischen Gleichungen für zweidimensionale Beharrungsströmung:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

Die Wärmegleichung lautet bei Vernachlässigung der Wärmeleitung in Richtung der Strömung

$$\frac{dq}{ay} = \gamma\, c_p \left(u\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

Im Sinne der turbulenten Wärmeleitungstheorie ist stets

$$q = \frac{\gamma\, c_p\, \tau}{\varrho}\,\frac{\partial\vartheta/\partial v}{\partial u/\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87a)$$

Setzen wir c_p als wenig veränderlich voraus, so geht (da $\gamma/\varrho = g$) Gl. 87 in

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial y}\left[\tau\frac{(\partial\vartheta/\partial y)}{(\partial u/\partial y)}\right] = u\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + v\frac{\partial\vartheta}{\partial y} \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

über. Der Vergleich von (85) und (88) zeigt, dass wie immer u und v von y abhängen mögen, die Sonderlösung

$$\vartheta = a\,u + a' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

wo a, a' Konstanten bedeuten, beide Gleichungen erfüllt. In der Tat reduziert sich (88) auf

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau\frac{a\,u'}{u'}\right) = \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)a \quad . \quad . \quad (88a)$$

welche Gleichung nach Kürzung mit a mit (85) identisch ist. Sollte der Versuch auf das Gesetz

$$u = U\left(\frac{y}{\varDelta}\right)^{\frac{1}{n}} = U\eta^{\frac{1}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

führen, so muss der Temperaturverlauf bei rein turbulenter Grenzschicht das Gesetz

$$\vartheta = \Theta\left(\frac{y}{\varDelta}\right)^{\frac{1}{n}} = \Theta\,\eta^{\frac{1}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90a)$$

befolgen, wo Θ den Unterschied zwischen der Temperatur des ungestörten Flüssigkeitsstromes und der Temperatur an der Wand bedeutet.[1])

Als Ausdruck der Schubspannung an der Wand darf man die klassische Form von Prandtl-Karmán wählen mit den Werten von ϱ und ν, die an der Wand vorhanden sind, d. h.

$$\tau_w = \psi\,\varrho_w\,U^2\left(\frac{\nu_w}{U\varDelta}\right)^{1/4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

da ja nach der Theorie die Schubspannung nur von der Verteilung der Geschwindigkeit in unmittelbarer Nachbarschaft der Wand abhängen soll. Daraus kann die Grenzschichtdicke in Abhängigkeit von der Länge bestimmt werden, indem man die Differentialgleichung der Grenzschicht, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\varDelta}\varrho\,u^2\,dy - U\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\varDelta}\varrho\,u\,dy = -\tau_w \quad . \quad . \quad (92)$$

integriert. Bezeichnen wir *für Gase* mit T_w, T_0, ϱ_w, ϱ_0 die absoluten Temperaturen und Dichten an der Wand und im ungestörten Strom, so ist mit $p =$ konst:

$$\varrho = \varrho_w\ \varrho/\varrho_w = \varrho_w\,T_w/T = \varrho_w T_w\,(T_w + \Theta\,\eta^{1/7}) = \varrho_w/(1 + \chi\,\eta^{1/7})$$

mit

$$\chi = \frac{\Theta}{T_w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

Die Integrale in (92) nehmen die Form

$$\int_0^1 \varrho_w\,U\ \frac{\eta^{1/7}\,d\eta}{1 + \chi\,\eta^{1/7}} = \varrho_w\,U\,\psi_1\,(\eta_1\,\chi)\Big|_0^1 = \varrho_w\,U\ \ \psi_{11} \quad . \quad (93a)$$

$$\int_0^1 \varrho_w\,U^2\,\frac{\eta^{2/7}\,d\eta}{1 + \chi\,\eta^{1/7}} = \varrho_w\,U\,\psi_2\,(\eta_1\,\chi)\Big|_0^1 = \varrho_w\,U^2\,\psi_{21} \quad . \quad (93b)$$

an, wo ψ_{11} ψ_{21} graphisch oder analytisch bestimmt werden können. Gl. (92) lautet dann

$$\varDelta' = \frac{\partial\varDelta}{\partial x} = \frac{\tau_w}{(\psi_{11} - \psi_{21})\,\varrho_w\,U^2} \quad . \quad . \quad . \quad (93c)$$

Mit $\tau_w = \psi\,\varrho_w\,U^2\left(\frac{\nu_w}{U\varDelta}\right)^{1/4}$ und $\psi = 0{,}0225$ . . (94)

erhält man durch Integration von (93c):

$$\varDelta = \psi_0\,(\chi)\left(\frac{\nu_n}{Ux}\right)^{1/5} x \qquad \text{mit } \psi_0\,(\chi) = \left(\frac{4}{5}\,\frac{\psi}{\psi_{11} - \psi_{21}}\right)^{4/5} \quad . \quad (95)$$

folgende Abhängigkeit des ψ_0 von χ

$\chi =$	0	1	3	5
$\psi_0 =$	0,370	0,587	0,975	1,355

oder angenähert

$$\psi_0 = 0{,}370 + 0{,}198\,\chi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

Die an die Wand übergehende Wärme ist nach (87a) durch Gleichung

$$q = \gamma_w\,c_p\,\frac{\tau_w}{\varrho_w}\,\frac{(\partial\vartheta/\partial y)}{(\partial u/\partial y)_{y=0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

gegeben. Mit Gl. (90a) und $n = 7$ entsteht

$$q = \psi\,\gamma_w\,c_p\,U\,\Theta\left(\frac{\nu_w}{U\varDelta}\right)^{1/4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97a)$$

Die grosse Veränderlichkeit des γ und ν in der Nähe der Wand legt es nahe, den Einfluss der *laminaren „Endschichte"* zu untersuchen. In dieser darf man, wie in der „S. B. Z." vom 30. Oktober 1926 erläutert

$$\vartheta_I = a\,\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

setzen und deren Dicke $\varDelta_1 = \varDelta\,\eta_1$ aus der Gleichheit der Schubspannungen in der Uebergangsebene bei $\eta = \eta_1$ bestimmen. Dabei kommt die Veränderlichkeit der Temperatur dadurch zur Geltung, dass man für die Zähigkeit nicht den Wert ν_w bei $\eta = 0$, sondern einen Mittelwert zwischen ν_w und $\nu_{\eta=\eta_1}$ nehmen muss.

Die Nachrechnung mit den vollständig integrierten Gleichungen der rein turbulenten Schicht weist nach, dass die Schubspannung in der Nähe der Wand schlimmstenfalls mit dem Abstand verhältnisgleich abnimmt. Da nun $\varDelta_1/\varDelta = \eta_a$ im allgemeinen sehr klein sein wird (aber auch nur für solche Fälle), darf man als Wert der Schubspannung im Abstande $\varDelta_1$ den Betrag annehmen, den die Schubspannung bei Fortsetzung des zwischen $\varDelta$ und $\varDelta_1$ bestehenden Temperaturverlaufes an der Wand annehmen würde. Für die Temperatur innerhalb des turbulenten Bereiches gilt das Gesetz

$$\vartheta_{II} = \Theta_1\,\eta^{1/7} + \Theta_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98a)$$

[1]) Die Beziehung (90a) findet sich zum ersten Male für $\varrho =$ konst. in meinem Aufsatz vom 30. Oktober 1926 in „S. B. Z." abgeleitet. Für veränderliches ϱ wurde sie von meinem Assistenten Herrn Ing. Herzog durch vollständige Ausrechnung der Grundgleichungen unter der Annahme $u = U\eta^{1/7}$ festgestellt. Sie ist, wie aus obigem erhellt, allgemein, für jeden Geschwindigkeitsverlauf gültig.