Dynamische Theorie des Indicators.

Von Prof. *A. Fliegner.*

(Fortsetzung.)

§ 3. *Der eigentliche indicirte Druck.*

Das erste Glied in Glchg. (9), nämlich die Reihe

$$p_i' \equiv \sum_{n=o}^{n=\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad . \quad . \quad (15)$$

ist das einzige, dessen Coefficienten von denjenigen des Druckes p, Glchg. (2), abhängig sind. Man muss daher p_i' als den *eigentlichen indicirten Druck* ansehen, da der Indicator diesen anzeigt, wenn die Feder keine Schwingungen macht und keine Reibung vorhanden ist.

Die Coefficienten der Reihe p_i', A_n und B_n, haben aber andere Werthe als die Coefficienten a_n und b_n der Reihe für p_i. Der Indicator gibt also *nicht den wirklichen Verlauf der Druckänderung* wieder. Zur Erkennung der Art und Grösse der Abweichungen ist es am besten, die Höhen der den verschiedenen Werthen von n entsprechenden Wellen, h_n und H_n, sowie die Lage des ersten Wellenberges, $\varphi = \vartheta_n$ und Θ_n, zu berechnen. Dabei erhält man für die Reihe p:

$$h_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \operatorname{tang.} \vartheta_n = \frac{b_n}{a_n}, \quad . \quad . \quad (16)$$

für die Reihe p_i':

$$\left.\begin{aligned} H_n &= \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma - Mn^2\omega^2)^2 + (\mu n \omega)^2}}\, h_n, \\ \operatorname{tang.} \Theta_n &= \frac{\sigma - Mn^2\omega^2 + \mu n \omega \operatorname{cotang.} \vartheta_n}{\sigma - Mn^2\omega^2 - \mu n \omega \operatorname{tang.} \vartheta_n} \operatorname{tang.} \vartheta_n \end{aligned}\right\} (17)$$

Bei beiden Reihen wird der wesentliche Verlauf des Druckes durch die ersten Glieder, mit den kleineren Werthen von n, bedingt. Die späteren Glieder mit grösserem n gleichen nur die von den früheren noch übrig gelassenen Wellen immer mehr und mehr aus.

Nun ist bei den Indicatoren σ stets sehr gross gegenüber M und ω. Bei den entscheidenden ersten Gliedern bleibt daher $\sigma > Mn^2\omega^2$. Dann folgt aber aus der zweiten der Glchgn. (17), dass, mag dort tang. ϑ_n positiv oder negativ sein, doch stets

$$\text{für } \sigma > Mn^2\omega^2: \ \Theta_n > \vartheta_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

werden muss. Die Phasen der entscheidenden Wellen treten also für p_i' bei grösseren Werthen von φ auf, als für p, d. h. *später*. Wenn für höhere Werthe von n $\sigma - Mn^2\omega^2$ negativ geworden ist, so lässt sich nicht mehr allgemein entscheiden, ob Θ_n grösser wird als ϑ_n, oder kleiner. Da aber diese Glieder nur noch zur Ausgleichung der Curve dienen, so muss man den übrigens selbstverständlichen Schluss ziehen, dass die Angaben des Indicators der wirklichen Druckänderung stets *nacheilen*, dass also bei abnehmendem Drucke $p_i' > p$ ausfällt, bei zunehmendem dagegen $p_i' < p$.

Was die Höhe der Wellen anbetrifft, so zeigen die Glchgn. (17) oder (9), dass das *constante Glied* für $n = o$ in beiden Reihen *denselben Werth* annimmt. Der weitere Verlauf von H_n gegenüber h_n hängt von dem Ausdrucke unter der Wurzel im Nenner ab, also von

$$f(n) \equiv (\sigma - Mn^2\omega^2)^2 + (\mu n \omega)^2. \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Die beiden ersten Derivirten dieses Ausdruckes nach n sind:

$$f'(n) = 2\omega^2 n \left[2M^2n^2\omega^2 - (2M\sigma - \mu^2)\right], \quad . \quad (20)$$

$$f''(n) = 12 M^2\omega^4 n^2 - 2\omega^2(2M\sigma - \mu^2). \quad . \quad . \quad (21)$$

Der erste Differentialquotient, $f'(n)$, verschwindet für:

$$n_o = o \text{ und } n_m = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{\sigma}{M} - \frac{\mu^2}{2M^2}} = \frac{1}{M\omega\sqrt{2}}\sqrt{2M\sigma - \mu^2}, \quad (22)$$

während der zweite, $f''(n)$, gleichzeitig die Werte annimmt:

$$f''(n_o) = -2\omega^2(2M\sigma - \mu^2) \text{ u. } f''(n_m) = 4\omega^2(2M\sigma - \mu^2). \quad (23)$$

Das Verhalten von H_n gegenüber h_n erscheint hiernach wesentlich abhängig von dem Vorzeichen der Differenz $2M\sigma - \mu^2$. Wäre dieselbe *negativ*, was vielleicht gelegentlich bei den schwächsten Federn mit kleinem σ der Fall sein könnte, so würde n_m imaginär, $f''(n_o) > o$ werden; dann läge bei $n = n_o = o$ ein Minimum der Function $f(n)$. Mit wachsendem n nähme sie ununterbrochen zu, H_n/h_n also ununterbrochen ab. H_n bliebe daher für alle Werthe von n grösser als Null, aber kleiner als h_n, und p_i' müsste sich rascher ausgleichen als p. Practisch dürfte dieser Fall aber kaum vorkommen.

Wenn dagegen bei den stärkeren Federn die Differenz $2M\sigma - \mu^2$ *positiv* ausfällt, so wird n_m reell, $f''(n_o) < o$, $f''(n_m) > o$. Dann hat $f(n)$ bei n_o ein Maximum, bei n_m ein Minimum. H_n/h_n wächst daher von $n_o = o$ an bis n_m, um weiterhin ununterbrochen abzunehmen. H_n ist also anfangs grösser als h_n und wird erst bei Werthen von $n > n_m$ schliesslich kleiner.

Ergibt sich der Werth von n_m zufällig als *ganze Zahl*, so kommt in dem zugehörigen Gliede der Reihe p_i' unter Sinus und Cosinus die Bogenzahl

$$n_m \omega t = t\sqrt{\frac{\sigma}{M} - \frac{\mu^2}{2M^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

zu stehen. Eine Vergleichung mit dem zweiten Gliede der Glchg. (9) unter Berücksichtigung von (9^c) lässt erkennen, dass man es hier mit einer Theilschwingung zu thun hat, die sich nur durch einen verdoppelten Einfluss der Widerstände von den oben besprochenen Federschwingungen unterscheidet. Wäre μ gleich Null, so würden beide Arten von Schwingungen sogar ganz übereinstimmen, nur würde dann H_n *unendlich gross*, während es unter Beibehaltung von μ endlich bleibt.

Unabhängig davon, ob n_m ganzzahlig ausfällt oder nicht, ist der Quotient H_n/h_n in der Nähe von n_m grösser als weiter weg, so dass die betreffenden Wellen verhältnissmässig mehr Einfluss ausüben als die umgebenden, wenn sie auch die letzteren nicht immer überragen. Man müsste aber hiernach doch erwarten, dass sich gelegentlich ausser den früher besprochenen abnehmenden auch noch *bleibende* Schwingungen zeigen. Solche beobachtet man aber nicht. Man wird daher annehmen dürfen, dass sie sich nur dann einstellen könnten, wenn längere Zeit ein vollkommen gleichförmiger Beharrungszustand herrschen würde, bei welchem immer genau gleiche Druckänderungen mit genau denselben Phasen der Bewegung der Feder zusammentreffen würden. Da ein solcher Beharrungszustand aber in Wirklichkeit unmöglich eintreten kann, so können sich auch keine derartigen bleibenden Schwingungen ausbilden.

Die Glieder in der Nähe von n_m werden daher bei einer Untersuchung der Abweichung der Reihe p_i' von p im Allgemeinen nicht mehr berücksichtigt werden dürfen; man wird bei früheren Gliedern stehen bleiben müssen.

Während hiernach die entwickelten Formeln anzugeben gestatten, wie der eigentliche indicirte Druck gegenüber dem wirklichen Drucke verläuft, ist es nicht mehr möglich mit ihrer Hülfe allein auch den numerischen Betrag der Abweichungen zu ermitteln. Um doch zu sehen, wie gross der letztere etwa zu erwarten ist, habe ich ein besonderes Zahlenbeispiel nachgerechnet. Der Rechnung habe ich ein Indicatordiagramm zu Grunde gelegt, welches gelegentlich an der Versuchs-Dampfmaschine des hiesigen Polytechnikums abgenommen worden ist, und zwar bin ich dabei von der Annahme ausgegangen, dass dieses Diagramm die wirkliche Druckänderung anzeige.

Zuerst musste ich nun die Coefficienten der Reihe p, Glchg. (2), bestimmen. Dabei bin ich *Kirsch**) gefolgt. Der

*) *Kirsch*, „Die Bewegung der Wärme in den Cylinderwandungen der Dampfmaschine", S. 23 u. folgende.