

L'idée de dimension

Autor(en): **Eckmann, Beno**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Revue de Théologie et de Philosophie**

Band (Jahr): **31 (1943)**

Heft 127

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-380431>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

L'IDÉE DE DIMENSION

1. L'idée de dimension, bien qu'elle soit une des plus intuitives et anciennes de la géométrie, n'a été l'objet d'une théorie exacte et satisfaisante que depuis vingt ou trente ans, et ce n'est que ces derniers temps qu'elle a atteint une certaine perfection. La question, touchée déjà dans les *Eléments* d'Euclide, a été reprise autour de 1900 sous un nouvel aspect, entre autres par le célèbre mathématicien français Henri Poincaré, et ses idées sont à la base des recherches ultérieures qui ont donné lieu à une des plus belles théories géométriques.

Si je vais essayer de vous présenter quelques résultats et idées simples à ce sujet — dans la forme plus ou moins incomplète que le cadre de cette leçon m'impose et que mes collègues mathématiciens voudront bien excuser — c'est parce que je crois qu'il s'agit là d'une chose dont on parle assez souvent en disant que l'espace a trois dimensions, qu'une surface en a deux, que le temps a une dimension, en faisant allusion, avec un sous-entendu mystérieux, à la quatrième dimension — sans bien se rendre compte de ce qu'on entend par là, et sans savoir qu'il s'agit d'une question d'importance fondamentale pour la géométrie et pour toutes les sciences.

Toutefois, je ne considère tout ceci que comme un exemple, et le but de mon exposé sera atteint, si j'arrive à vous donner une idée

N. B. — Leçon inaugurale prononcée à la Faculté des Sciences de l'Université de Lausanne, le 5 février 1943.

des relations assez délicates qui existent entre l'intuition, l'expérience et l'abstraction, et qui sont caractéristiques de la façon de penser et de travailler en géométrie moderne.

2. Venons en à notre problème : Que notre espace soit à trois dimensions, qu'une courbe soit à une dimension, etc., qu'est-ce que cela veut dire ? Quelles sont les raisons et les conséquences de ce fait ?

Avant tout : Qu'est-ce que l'espace ? Il nous faut bien distinguer deux choses : l'espace de notre intuition et expérience, où nous vivons — je veux l'appeler dans ce qui suit *l'espace réel* (seulement à titre d'abréviation, car il y a plusieurs sortes ou gradations de réalité) — et *l'espace géométrique* qui est une création abstraite de l'esprit.

L'espace réel — je ne veux pas essayer d'en donner une définition fermée ; ses propriétés sont plus ou moins imprécises ; car les objets considérés ne sont pas des points, droites, etc., mais des arêtes d'un corps, des rayons lumineux, des réticules, des plans plus ou moins rugueux, des figures dessinées d'une manière un peu inexacte ; et si on essayait de rendre plus exactes les propriétés de ces objets par approximations successives, on n'y arriverait pas, même théoriquement ; comment arriver, par exemple, à une droite précise, la matière étant composée d'atomes, ou de molécules en mouvement thermique ? Et un rayon lumineux, dès qu'on essaie de le rendre suffisamment fin, commence à se disperser ! On peut même dire que les propriétés de tous ces objets changent de temps en temps — suivant nos moyens et nos possibilités expérimentales. Sans trop en discuter, nous voulons admettre que tout ce qu'on dit de l'espace réel est vrai dans un sens naïf et pas tout à fait définitif.

Dans *l'espace géométrique*, les choses sont bien différentes. Ses objets ont des propriétés tout à fait exactes : ce sont ou bien des axiomes qu'on ne démontre pas, ou bien des théorèmes qu'on démontre à l'aide des axiomes et de la déduction logique. Mais que sont ces objets ? On n'en dit rien ; ce ne sont en tout cas pas les objets inexacts de l'espace réel, mais des êtres abstraits qui ont seulement les propriétés qu'on leur a attribuées sous forme d'axiomes. Ces axiomes ne sont donc sûrement ni vrais ni faux ni évidents, mais tout simplement des postulats, des conventions qu'on impose à des êtres abstraits appelés points, droites, etc. Ces conventions sont naturellement inspirées par le réel ; elles idéalisent des choses qu'on a constatées dans le réel d'une manière assez grossière. Mais

elles dépassent tout ce que le réel peut nous donner : si l'on dit, par exemple, que deux droites se coupent en un point, ou si l'on parle du comportement à l'infini, l'espace réel ne nous donne jamais de renseignements précis et directs là-dessus. Il y a donc une part d'arbitraire dans les axiomes ; l'espace géométrique serait-il ainsi une construction purement logique qui se base sur des conventions arbitraires ? Heureusement il est plus que cela, plus qu'un simple jeu logique : il est une image schématique de l'espace réel, extrêmement utile d'ailleurs ; on s'en sert à tout instant dans notre vie, dans la technique, dans les sciences.

En conclusion : l'espace géométrique est une construction logique dont la base est formée par les axiomes, c'est-à-dire des conventions arbitraires du point de vue logique, mais inspirées par le réel et en conséquence justifiées. L'espace géométrique n'est pas identique à l'espace réel, mais il en est — pour employer une expression due à M. Gonseth — un schéma simple et efficace.

On peut naturellement créer d'autres géométries, en choisissant comme base de la construction logique des axiomes un peu différents, et on l'a fait. C'est alors l'expérience qui nous amène à prendre l'une de ces géométries plutôt qu'une autre comme schéma de l'espace réel. La géométrie ordinaire ou euclidienne est considérée comme la plus simple et la plus efficace pour les besoins ordinaires ; mais il se peut que, pour des cas extraordinaires, en astronomie ou en atomistique, par exemple, on se voie contraint de préférer un autre schéma.

3. Maintenant que nous avons bien distingué deux choses, l'espace réel, d'une part, et l'espace géométrique, d'autre part, nous pouvons préciser notre question :

A quelles propriétés de l'espace géométrique abstrait fait-on appel en disant que l'espace réel est à 3 dimensions ?

Une méthode très simple pour y répondre est la suivante : Tout point de l'espace géométrique peut être caractérisé par trois nombres réels, appelés coordonnées ; remarquons que d'une manière analogue on fixe un point sur une droite par un nombre (on fait cela sur chaque règle) et un point dans le plan par deux nombres (on le fait sur toute carte topographique). Les 3 coordonnées d'un point P dans l'espace sont par exemple les 3 distances de P à 3 plans perpendiculaires deux à deux, ou bien les 2 coordonnées de la projection de P dans le plan horizontal et la hauteur au-dessus de ce plan (fig. 1).

Si on fait varier ces trois nombres indépendamment les uns des autres, on obtient tous les points de l'espace. Connaissant les coordonnées de deux points de l'espace, on peut calculer leur distance par une formule simple ; à l'aide des coordonnées, on peut calculer des angles, déduire des propriétés géométriques par de simples calculs, etc. — c'est la méthode bien connue sous le nom de *géométrie analytique*. Dans cette géométrie, un point c'est *trois nombres*, et l'espace c'est l'ensemble obtenu en faisant varier ces trois nombres indépendamment. C'est pourquoi l'on dit que l'espace géométrique

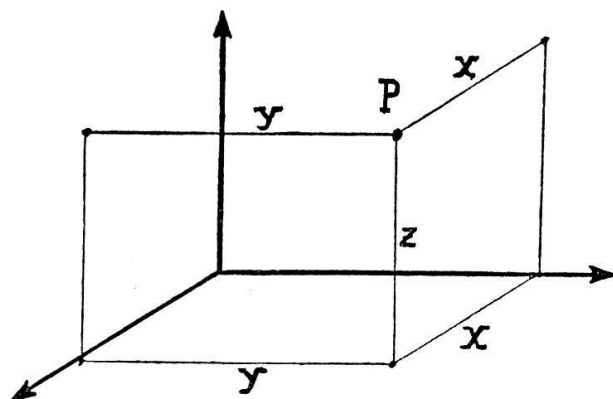


Fig. 1.

a trois dimensions, en entendant par nombre des dimensions le nombre des coordonnées variant indépendamment.

4. Oublions maintenant pour un instant la signification extérieure de l'espace géométrique, oublions qu'il est le schéma de l'espace réel. Alors on ne comprend plus le rôle extraordinaire du nombre 3 dans cette construction ; car il est clair que la même construction logique peut se faire avec 4 ou 5 ou un nombre quelconque n de coordonnées ; on obtient alors l'espace à n coordonnées ou à n dimensions.

Un point de cet *espace à n dimensions*, c'est n nombres réels, et on obtient tout l'espace, si on les fait varier indépendamment. On peut y faire de la *géométrie analytique* : la distance de deux points se calcule à partir des coordonnées à l'aide d'une formule analogue au cas des trois dimensions, etc.

Inutile de demander si cet espace à 4 ou à 5 ou à n dimensions existe ou non — il est simplement une construction logique qui ne prétend pas donner des renseignements sur quelque chose de réel — l'espace à 3 dimensions ne le fait pas non plus ; il peut servir comme

schéma de l'espace réel, voilà son rôle particulier ! (D'ailleurs l'espace à deux dimensions est, d'une manière analogue, le schéma du plan, et celui à une dimension de la droite.)

On va se demander : Ne pourrait-on pas prendre comme schéma de l'espace réel l'espace à 4 ou 5 ou à un autre nombre de dimensions aussi bien que celui à 3 dimensions ? Cela nous donnerait une géométrie bien différente de la nôtre !

Mais parmi toutes ces possibilités, l'expérience nous en a fait choisir une : 3 dimensions sont, comme on l'a toujours constaté, juste ce qu'il faut pour décrire (d'une manière schématique, mais efficace) les points de notre espace réel. Et même si l'on a essayé,

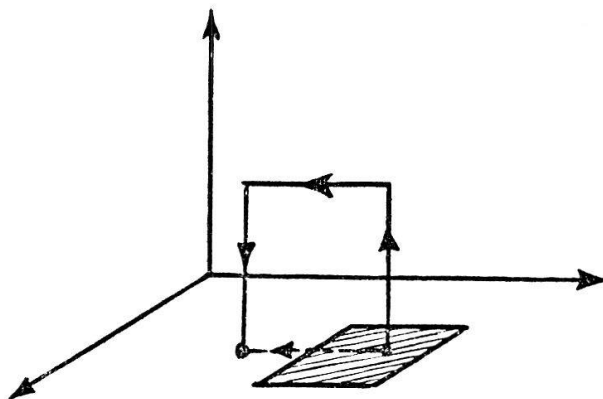


Fig. 2.

comme je l'ai déjà dit, de modifier un peu notre géométrie (par exemple en prenant une autre formule pour la distance), on n'a jamais été amené à changer ce nombre 3 des dimensions, des coordonnées variant indépendamment.

Mais il y a une autre possibilité qui reste plus ou moins ouverte : Il se pourrait que notre espace réel fit partie d'un espace réel à 4 dimensions (c'est-à-dire de quelque chose dont le schéma devrait être l'espace abstrait à 4 dimensions), comme un plan qui fait partie de l'espace ordinaire, qui est « plongé » dans cet espace. Certaines propriétés géométriques diffèrent essentiellement suivant qu'on reste dans l'espace ou qu'on en sort dans l'espace à 4 dimensions.

Pour mieux comprendre ceci, examinons la situation pour le plan. Comparons la géométrie dans le plan, selon qu'on reste dans le plan en faisant abstraction de l'espace qui l'entoure, ou qu'on n'y reste pas.

Considérons un rectangle, et un point à l'intérieur (fig. 2) ; dans

le plan, il est impossible de faire sortir le point de l'intérieur du rectangle sans qu'il traverse un des côtés ; donc, s'il lui est défendu de les traverser, s'il est « enfermé », il ne peut pas sortir sans qu'on « n'ouvre une porte » ! Or, à travers l'espace, cela est bien possible : on élève le point dans la direction d'un troisième axe, perpendiculaire au plan, on le déplace parallèlement au plan, on le fait retomber dans le plan.

Considérons la situation analogue dans l'espace : si un objet est enfermé dans une armoire (dans un cube), il est impossible de l'en faire sortir sans « ouvrir la porte », sans traverser les faces, sans y percer un trou. Or, si notre espace était plongé dans un espace à 4 dimensions ou plus, cela serait bien possible. On peut le vérifier aisément et rigoureusement dans la géométrie analytique de l'espace

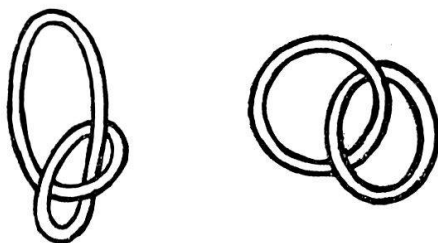


Fig. 3.

à 4 dimensions, en y donnant par formules le mouvement nécessaire : on déplace le point dans la direction d'un quatrième axe, on le transporte parallèlement à l'espace, et on le fait retomber dans l'espace, dans notre monde.

On peut indiquer d'autres phénomènes de ce genre qui pourraient se produire, si notre espace était plongé dans l'espace à 4 dimensions : On pourrait transformer par un simple mouvement un gant droit en un gant gauche, on pourrait résoudre un nœud fermé sans couper la ficelle (fig. 3), on pourrait séparer deux anneaux enlacés, sans les ouvrir (fig. 3), et ainsi de suite.

Si de tels phénomènes se produisaient régulièrement et qu'ils fussent confirmés par des expériences physiques, le moyen le plus simple et clair pour s'en rendre compte et pour les formuler et expliquer serait le schéma d'un espace à 4 dimensions dans lequel se trouverait notre espace. Or, excepté quelques trucs de prestidigitiation, ces phénomènes, désignés comme surnaturels, n'ont jamais été observés. C'est un résultat empirique (comme, par exemple, la

non-existence du mouvement perpétuel de première ou de seconde espèce). Pour la description de notre espace et de ses phénomènes, l'hypothèse d'une quatrième dimension est superflue.

5. Ce qui, naturellement, ne nous empêche pas, nous autres mathématiciens, de parler de l'espace à quatre dimensions ou plus, considéré uniquement comme système logique, et d'examiner ses propriétés. On garde le même langage géométrique et on parle de points, de droites, de plans, d'angles, etc., bien qu'en général ces choses ne puissent pas être mises en correspondance avec des objets de l'espace réel ! Néanmoins cette construction est très importante et efficace, pour les raisons suivantes :

Elle permet au mathématicien de traduire en langage géométrique des faits et problèmes analytiques ou algébriques, ce qui simplifie parfois énormément la solution et suggère des méthodes et résultats ; on peut presque dire qu'en pratiquant cette géométrie, on arrive à une certaine intuition de l'espace à n dimensions — je ne sais pas si c'est la grande analogie avec l'espace à 3 dimensions (qui naturellement peut aussi nous tromper !) ou tout simplement l'habitude de penser à ces choses.

Plus importante encore est l'application que voici : il y a, soit dans le monde de l'expérience et de l'intuition, soit en physique, soit dans les différentes branches mathématiques, des objets et phénomènes pour lesquels il y a grand avantage à prendre l'espace à n dimensions comme « schéma », dans ce sens qu'ils peuvent être décrits par n nombres réels variant indépendamment comme les coordonnées dans l'espace à n dimensions. On appelle alors ceci *un continu à n dimensions ou à n degrés de liberté*.

On en trouve des exemples dans tous les domaines de la science :

a) *Une courbe est un continu à une dimension* ; on peut « numérotter » ses points par un nombre variable, à savoir par la longueur de l'arc de courbe à partir d'un certain point fixe. En d'autres termes, on peut faire correspondre aux points de la courbe les points d'une droite (espace à une dimension !) de telle sorte qu'à deux points distincts correspondent deux points distincts, et qu'à des points voisins correspondent des points voisins. On parle dans ce cas d'une correspondance bi-univoque (c'est-à-dire univoque dans les deux sens) et continue.

b) Autre exemple : *le temps* est un continu à une dimension, car on fixe les instants divers par *un* nombre.

c) *Un morceau de surface*, par exemple d'une sphère, est un continu à 2 dimensions : on peut en décrire les points par 2 nombres, les 2 coordonnées d'une carte topographique de la surface (soit la longitude et la latitude).

d) *Les mouvements dans le plan* (par exemple d'un segment) forment un continu à 3 dimensions : tout mouvement est donné par 2 déplacements indépendants et par une rotation. On dit qu'un corps possède pour les mouvements dans le plan 3 degrés de liberté, et on peut représenter ces mouvements par 3 nombres, donc par les points de l'espace à 3 dimensions.

e) D'une manière analogue, *les mouvements d'un corps dans l'espace* ont 6 degrés de liberté : 3 translations indépendantes et une rotation qui est donnée par trois nombres. Les mouvements dans l'espace, donnés par 6 nombres, peuvent donc être représentés par des points de l'espace à 6 dimensions. (Si on fixe un point du corps en mouvement, il n'a que 3 degrés de liberté, ceux de la rotation. Si on fixe 2 points, il ne reste qu'un degré de liberté, celui de la rotation autour de la droite qui joint les 2 points.)

Les physiciens se souviennent bien de l'importance toute particulière du nombre de ces degrés de liberté, par exemple dans la théorie de la chaleur spécifique.

f) Pour fixer le lieu et le temps d'un point qui se déplace, ou d'une observation, il nous faut 4 nombres : *le continu espace-temps* est à 4 dimensions, on peut le représenter par les points de l'espace à 4 dimensions, et cela est même d'une grande importance dans la théorie de la relativité.

g) *L'état d'une molécule* en mouvement peut être donné par 6 nombres : les 3 coordonnées du lieu, et les 3 composantes de sa vitesse. Dans la théorie cinétique des gaz, l'état d'un gaz constitué par N molécules sera donc donné par $6N$ nombres et les états divers du gaz peuvent être représentés par les points de l'espace à $6N$, disons 10^{24} dimensions. Cela semble assez drôle, mais c'est très pratique dans la théorie statistique des molécules.

Je ne veux pas parler des nombreux exemples que le mathématicien rencontre en géométrie algébrique et dans l'analyse.

6. En résumé :

A la question : « Pourquoi dit-on que notre espace a 3 dimensions », on répondra : Parce qu'il a pour schéma l'espace géométrique à 3 dimensions ou coordonnées.

Et à la question : « Pourquoi tel et tel continu a-t-il n dimensions

ou n degrés de liberté » : Parce qu'il peut être décrit par n nombres variant indépendamment comme les n coordonnées dans l'espace à n dimensions, autrement dit : parce que les éléments de ce continu peuvent être représentés par les points de cet espace, ou *mis en correspondance avec les points de cet espace à n dimensions*.

Tout cela semble très simple, et c'est bien ce qu'on a longtemps regardé comme définition de la dimension, sans bien préciser ce qu'on entend par cette *correspondance* (en pensant peut-être surtout à des correspondances données par des formules simples). Mais c'est en ce moment que de graves *difficultés* s'élèvent, difficultés qui sont de caractère mathématique, c'est-à-dire interviennent dans la construction logique, et qu'on doit surmonter avant que la définition de la dimension ne soit justifiée.

7. Ces difficultés, les voici :

Si l'on arrive à décrire un continu, disons par 2 nombres, ne pourrait-on pas le faire aussi bien par 3 (ou 4 ou 1) — naturellement en procédant d'une tout autre manière ? Y a-t-il en somme une différence entre les espaces à différentes dimensions, par exemple entre celui à 2 et celui à 3 ? Ne pourrait-on pas établir une *correspondance* entre les points de ces deux espaces qui permettrait de remplacer tout simplement l'un par l'autre, surtout pour la description d'un continu ?

Vous le voyez : La notion de dimension qui semble si simple et qui est si importante pour maintes applications, on ne sait pas si elle a un sens !

Vous me répondez : Ce qu'on peut décrire par 2 nombres variant indépendamment, on ne le peut pas par 3, car dans le plan il n'y a pas autant de points que dans l'espace !

Or, cela n'est pas vrai dans un certain sens (bien que, si on pense à un plan plongé dans l'espace, il y ait des points en dehors du plan !) En effet, deux faits extrêmement surprenants, découverts vers la fin du XIX^e siècle, l'ont bien mis en évidence.

Premièrement, l'école de Cantor a trouvé des correspondances entre deux espaces à différentes dimensions (par exemple entre plan et espace, ou droite et espace à 4 dimensions, etc.), correspondances qui sont bi-univoques, c'est-à-dire qu'à deux points différents correspondent deux points différents. On pourrait dire que de cette manière les deux espaces contiennent « le même nombre de points », et on pourrait, en effet, remplacer l'un de ces espaces par l'autre !

Et maintenant ? Faut-il pour cela abandonner l'idée de dimen-

sion comme nous l'avons formulée ? Non. Car cette correspondance de Cantor, bien qu'elle soit bi-univoque, *n'est pas continue*, c'est-à-dire qu'à des points voisins correspondent des points éloignés dans l'autre espace, ou dans le continu qu'on veut décrire, et dont la connexion serait ainsi complètement détruite ! Or, pour définir la dimension, on n'a sûrement pas envisagé de telles correspondances ; elles sont à exclure.

Le second fait, c'est la célèbre *courbe de Péano*. C'est une courbe, en ce sens que c'est l'ensemble des points parcourus par un point qui se déplace dans le plan ; on peut numéroter ces points à l'aide du temps, donc d'un nombre, c'est-à-dire on peut les mettre en correspondance avec les points de la droite. Or, cette courbe de Péano a la propriété de remplir complètement un carré, donc un continu à 2 dimensions, et elle établit ainsi une correspondance entre droite et plan. Cette fois, la correspondance est continue — mais *elle n'est pas bi-univoque*, car il y a des points du carré qui sont parcourus plusieurs fois, et pour cela elle est aussi à exclure.

8. Si ces résultats vous semblent un peu étranges, n'oubliez pas qu'on parle des espaces géométriques abstraits ; il ne s'agit donc pas de l'intuition, mais de la construction logique qui, bien qu'elle soit inspirée par le réel, dépasse — même dans son fondement axiomatique ! — les possibilités de notre intuition et expérience. Et comme cette construction est à la base de l'idée de dimension exprimée dans la définition, on voit maintenant ce qu'il nous faut pour *savoir* cette idée de dimension : il faut démontrer qu'il est impossible d'établir une correspondance qui soit en même temps bi-univoque et continue entre deux espaces à différentes dimensions. En d'autres termes : qu'il est impossible de construire une image bi-univoque et continue de l'espace à n dimensions dans un espace à dimension inférieure, par exemple d'un plan dans une droite.

On peut démontrer cela. Cette fois l'intuition ne nous trompe pas. La première démonstration a été donnée en 1911 par Brouwer ⁽¹⁾ ; en 1913, il en a donné une autre, plus profonde que la première, en précisant des idées énoncées en 1912 par Poincaré dans son célèbre mémoire : « Pourquoi l'espace a trois dimensions » ⁽²⁾. Les recherches de Brouwer et l'importance de ses résultats ne furent guère connues pendant plusieurs années. En 1922, les mêmes idées furent reprises

(1) Voir la note bibliographique à la fin de cette conférence.

indépendamment par Menger et Urysohn ⁽¹⁾ et bien approfondies. C'est alors qu'une belle théorie a été créée avec la collaboration d'un grand nombre de mathématiciens. On peut dire que le point final de ce développement, bien que maints problèmes y restent ouverts, c'est le livre de Hurewicz et Wallmann, *Dimension Theory*, paru en 1941 à Princeton ⁽¹⁾.

9. Un des principaux résultats de toutes ces recherches — mais non le seul ! — c'est donc que l'ancienne définition commune de la dimension, comme nous l'avons formulée, subsiste, qu'elle a un sens. Quelle est au fond la signification de ce fait ? A quel ordre d'idées appartient-il ?

Le point essentiel, nous l'avons vu, c'étaient les correspondances ou images bi-univoques et continues. Considérons, par exemple, un cercle, et un cercle mal dessiné, c'est-à-dire une *déformation* du premier. C'est bien une image bi-univoque et continue du cercle. On constate que presque toutes les propriétés géométriques se sont perdues, longueur, angles, directions, la courbe n'a plus de centre, etc. Il y a pourtant quelque chose qui subsiste : la courbe est toujours un continu à une dimension, et elle est fermée (non ouverte). Ces propriétés qui n'ont pas changé sont d'un autre ordre que celles qu'on considère en géométrie ordinaire, on dirait d'un ordre plus élémentaire. La discipline qui s'occupe de telles propriétés, s'appelle *analysis situs* ou *topologie*.

Par exemple, il n'y a pas de différence topologique entre une sphère et un œuf ou un ellipsoïde ou une surface fermée de ce genre, mais bien entre une sphère et un tore. Et c'est une propriété topologique de dire que deux courbes fermées dans l'espace soient enlacées (fig. 3) ou non. Le célèbre théorème d'Euler sur les polyèdres (la somme des sommets et des faces moins la somme des arêtes est égale à 2) est de caractère topologique ; car il faut seulement que le polyèdre ait la connexion, le genre d'une sphère ; la forme, les angles, les côtés des faces n'y jouent aucun rôle.

Et le sens de ce théorème de Brouwer qui était nécessaire pour sauver l'idée de dimension (qui dit qu'il est impossible d'altérer le nombre des dimensions par une simple déformation) — c'est que *la dimension d'un espace est une propriété topologique*, bien qu'on

(1) Voir la note bibliographique à la fin de cette conférence.

l'ait définie à l'aide des coordonnées, donc d'éléments non-topologiques, à savoir des angles, des longueurs, des droites, etc.

On peut dire — les exemples vous l'ont bien montré — que les propriétés topologiques sont suggérées par l'expérience et l'intuition purement géométriques, tandis qu'en géométrie ordinaire on fait appel à des notions arithmétiques et analytiques d'un tout autre ordre. Autrement dit : Pour arriver à la géométrie ordinaire, il faut restreindre le domaine des correspondances envisagées jusqu'ici ; par exemple si, au lieu de considérer des déformations bi-univoques et continues, on considère seulement les mouvements dans l'espace, alors les longueurs et les angles, etc., restent invariants, donc les choses, dont on s'occupe en géométrie élémentaire métrique. Ainsi les différents points de vue géométriques sont caractérisés par les correspondances admises ; le cas le plus général, c'est la topologie ; le cas le plus restreint, la géométrie métrique, et il y a des cas intermédiaires.

10. On a donc constaté que l'idée de dimension est d'un caractère topologique ; aussi devrait-on chercher une *définition* qui le mette en évidence, c'est-à-dire une définition n'utilisant que des notions topologiques.

Pour cela, laissons-nous inspirer tout simplement par l'espace réel. Dans les *Eléments* d'Euclide, on trouve l'idée suivante : L'extrémité d'une courbe, c'est un point, le bord d'une surface, c'est une courbe, la frontière d'un corps, c'est une surface. Dans le mémoire que j'ai cité, Poincaré propose de caractériser la dimension par de telles propriétés, ou des propriétés très voisines. La définition de Menger et Urysohn, admise aujourd'hui comme étant la meilleure, n'en diffère presque pas.

On prend un point du continu en question et un voisinage entier de ce point, et on essaie d'extraire le voisinage hors de ce continu (fig. 4). Pour cela, on est obligé de couper ou de déchirer le continu en certains points qu'on appelle points *frontières du voisinage*.

S'il s'agit d'un continu à *une* dimension — pensons à une courbe ou un fil de fer — il suffit de le couper en quelques points isolés (qui ne forment donc eux-mêmes aucun continu).

S'il s'agit d'un continu à 2 dimensions — pensons à une surface — il ne suffit pas de la couper en quelques points isolés, on doit la couper suivant une courbe (donc un continu à une dimension).

S'il s'agit d'un continu à 3 dimensions — pensons à l'espace — ni

des points isolés ni des courbes ne suffisent ; la frontière d'un voisinage (par exemple d'une boule solide) est formée par une surface (donc un continu à 2 dimensions) — et ainsi de suite.

On dira donc *qu'un continu est à n dimensions, lorsque les points frontières d'un voisinage forment un continu à $n - 1$ dimensions.*

On peut alors démontrer que l'espace abstrait à n coordonnées jouit précisément de cette propriété ; ceci montre que l'ancienne et la nouvelle définitions sont équivalentes. Mais la nouvelle n'utilise ni longueurs, ni angles, ni droites, seulement les voisinages, qui sont de caractère purement topologique (leur forme ne joue aucun rôle !) C'est peut-être la meilleure méthode pour mettre en évidence ce fait

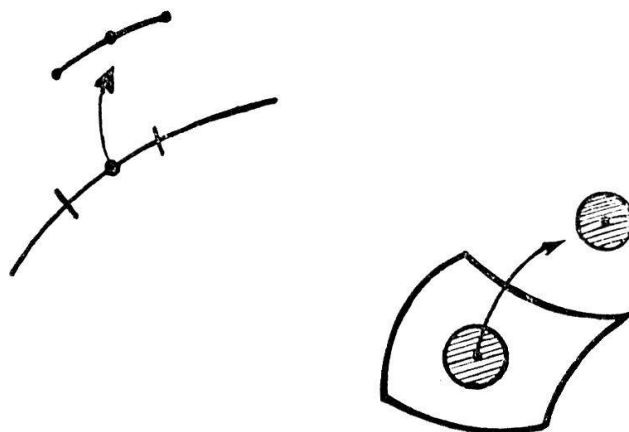


Fig. 4.

que la dimension, le nombre des degrés de liberté, exprime une propriété topologique d'un continu.

11. Je pourrais encore vous parler d'autres méthodes qui permettent de caractériser la dimension d'une manière topologique, par exemple celle proposée par Lebesgue utilisant la notion de recouvrement ; elle était très importante pour le développement de la théorie. Je pourrais aussi attirer votre attention sur les espaces à une infinité de dimensions, ou sur des espaces (abstraits) plus généraux encore que ceux donnés par des coordonnées ; ce sont les *espaces topologiques*, où on n'a presque qu'une seule notion géométrique, celle du voisinage ; mais comme nous l'avons vu, ces voisinages nous permettent de parler de la dimension, et on a même trouvé le résultat intéressant qu'en principe tous ces espaces généralisés sont des parties des espaces donnés à l'aide de coordonnées. Je pourrais encore vous parler des problèmes non résolus, des applications à

l'algèbre et à l'analyse — mais cela me conduirait trop loin, et il est temps de conclure.

12. Vous avez sûrement constaté que toutes ces méthodes géométriques sont caractérisées par une collaboration tout à fait particulière entre l'intuition, l'expérience et l'abstraction, où l'on distingue toujours strictement entre le réel et la théorie qui peut être son schéma. C'est d'ailleurs typique pour tout travail mathématique et même pour les sciences, surtout pour la physique théorique.

Cela ne fut pas toujours le cas. Autrefois on pensait que l'espace géométrique et l'espace réel, qu'une théorie et son objet, c'était la même chose. Et tout au fond, disons d'une manière inofficielle, on le pense peut-être aujourd'hui encore.

Si l'on fut obligé d'abandonner cette idée, si l'on dit sans ambiguïté que tout ce qu'une théorie énonce ne concerne pas la réalité, mais seulement son schéma abstrait — n'est-ce pas faire de nécessité vertu ? L'intelligence n'est-elle pas ainsi plus modeste qu'elle ne voudrait l'être ?

Peut-être devrait-on formuler la chose un peu différemment. Car ce qu'on appelle la réalité, on ne peut au fond la voir et décrire qu'à travers un certain schéma abstrait. Sans l'idée préexistante d'un continu, toute expérience serait impossible, elle se réduirait à des sensations isolées sans relations. Des concepts simples, considérés comme appartenant à l'expérience et à l'intuition — comme par exemple celui de la dimension — supposent au fond déjà une théorie abstraite. Souvent même les mathématiques, avec leurs constructions et formalismes abstraits, ont permis de concevoir de nouvelles idées intuitives ou de découvrir de nouveaux faits expérimentaux ; l'histoire des sciences nous en donne bien des exemples.

Vous me permettez donc de voir dans les mathématiques non seulement un instrument très utile pour les sciences et la technique, non seulement le langage qui nous permet de mettre en relations les phénomènes, de formuler des lois et d'en tirer les conséquences, mais beaucoup plus : *J'y vois l'expression de notre façon de penser*. Et si le mathématicien, comme un géographe qui ne se contente pas de connaître la géographie de son village natal, semble s'éloigner de plus en plus des schémas ordinaires et ose aller d'une abstraction et généralisation à l'autre, il ne s'éloigne pas plus pour cela du réel ; au contraire, il crée de nouvelles possibilités de penser, et de voir et comprendre notre monde.

BENO ECKMANN.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

Nous n'avons pas indiqué les mémoires et livres qui traitent les questions mathématiques abordées dans cette conférence. On les trouve cités dans les deux livres suivants consacrés à la théorie de la dimension :

K. MENGER, *Dimensionstheorie* (Leipzig, 1928).

W. HUREWICZ et H. WALLMANN, *Dimension Theory* (Princeton, 1941).

Voir aussi le livre de P. ALEXANDROFF et H. HOPF, *Topologie I* (Berlin, 1935), dont plusieurs chapitres sont consacrés à la notion de dimension.

Ces questions sont traitées d'une manière plutôt générale dans H. POINCARÉ, *Dernières pensées* (Paris, 1913), le chapitre intitulé « Pourquoi l'espace a trois dimensions », p. 57-97 ;

Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften (Leipzig und Wien, 1933), cinq conférences, dont en particulier :

H. HAHN, *Die Krise der Anschauung*, p. 42-64.

G. NÖBELING, *Die vierte Dimension und der krumme Raum*, p. 66-92.
