

Le pouvoir séparateur des instruments astronomiques d'observation, traité par l'analyse de Fourier

Autor(en): **Berger, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Orion : Zeitschrift der Schweizerischen Astronomischen Gesellschaft**

Band (Jahr): - **(1955)**

Heft 47

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-900421>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le pouvoir séparateur des instruments astronomiques d'observation, traité par l'analyse de Fourier

Par L. BERGER, Rolle

(Manuscrit reçu en date du 1er décembre 1954)

1. Introduction

Le rôle des *instruments astronomiques d'observation* est, par définition, de nous faire connaître la forme et la disposition des astres brillants placés sur la sphère céleste.

Ainsi que je le montrerai, l'analyse harmonique de Fourier, si familière en radio-électricité, est avantageuse quand il s'agit d'étudier le «pouvoir séparateur» de ces instruments et d'arriver à des conclusions d'une portée très générale. Cette méthode s'applique, par exemple, aux lunettes et télescopes, à l'interféromètre astronomique de Michelson, ainsi qu'aux radio-télescopes et radio-interféromètres de la radio-astronomie. Elle semble atteindre même, ainsi qu'on le verra, n'importe quel instrument astronomique d'observation, quelle qu'en puisse être la structure.

2. Définitions générales

Repérons les points de la sphère céleste à l'aide d'un système de coordonnées commode.

Si nous nous bornons à une petite portion de la sphère céleste, ne dépassant pas cinq degrés sur cinq degrés, nous pourrions y définir des coordonnées x_1 , y_1 , approximativement cartésiennes. Un exemple est celui des coordonnées célestes équatoriales (sphériques), pour une petite portion du ciel à cheval sur l'équateur céleste.

Etudions les phénomènes lumineux en lumière monochromatique, de fréquence ν et de longueur d'onde λ .

Soit C_1 le nombre complexe qui est la *densité de source* au point P_1 (x_1 , y_1) placé sur la sphère céleste. Cette densité de source est telle que $C_1 dS_1$ représente par son module et son argument l'amplitude et la phase de la source de lumière (émise ou diffusée) qui occupe le petit élément de surface dS_1 autour du point P_1 (x_1 , y_1).

On peut mettre en évidence la *densité d'amplitude* E_1 et la phase φ_1 de la lumière:

$$(1) \quad C_1 = E_1 \cdot e^{i\varphi_1}$$

E_1 et φ_1 sont des nombres réels. Nous appellerons $e^{i\varphi_1}$ la *fonction de phase*. Comme la lumière est monochromatique, E_1 est indépendant du temps t , et φ_1 varie linéairement en fonction du temps.

Remarquons que E_1^2 est la brillance au point P_1 . Dans le cas de lumière émise, ou de lumière diffusée par un corps qui est éclairé par une source étendue (Soleil), on sait que les C_1 en deux points,

même très voisins, de la sphère céleste sont «*incohérents*». Ce mot signifie qu'à tout instant donné la phase φ_1 varie d'un point à un autre tout à fait au hasard, et de manière presque discontinue. L'image du nombre complexe $e^{i\varphi_1}$, pour différents points de la sphère céleste, est sur le cercle trigonométrique exactement comme la bille du jeu de roulette pour différents tirages successifs. De même, pour des fréquences ν même très voisines, φ_1 a aussi des valeurs complètement incorréllées.

La connaissance de la phase φ_1 en fonction de x_1 et de y_1 ne présente aucun intérêt; la phase φ_1 ne fournit aucun renseignement sur la structure des astres qui émettent la lumière ou la diffusent.

Par contre, tant qu'on reste à l'échelle humaine ou à l'échelle astronomique, l'amplitude E_1 (ou la brillance E_1^2) varie d'une manière plus régulière en fonction de x_1 ou de y_1 et en fonction de la fréquence ν , et nous fournit beaucoup de renseignements au sujet de la structure géométrique et physique des astres. Le rôle des instruments astronomiques d'observation est de nous faire connaître la brillance E_1^2 en fonction de x_1 et y_1 .

Aucun appareil optique ne reçoit la lumière d'une seule et unique fréquence ν ; nous ferons une théorie presque monochromatique. Il faut alors caractériser l'émission de lumière, par les sources célestes, par: *a*) La distribution de brillance $E_1^2(x_1)$, qui est pratiquement la même pour toutes les fréquences du petit intervalle spectral $\Delta\nu$. *b*) La distribution de phase $\varphi_1(x_1)$ pour chaque fréquence de lumière de $\Delta\nu$.

3. Réduction à une seule dimension

La brillance E_1^2 est une fonction de deux variables x_1, y_1 . Cependant, dans un but de simplification de l'exposé, nous considérerons E_1^2 comme une fonction d'une seule variable x_1 , comme si les astres, tels qu'ils se peignent sur la sphère céleste, n'avaient qu'une dimension et non deux. *Que l'on soit cependant bien persuadé que tous les théorèmes énoncés dans la suite s'étendent très facilement et sans modification profonde au cas de deux dimensions.*

4. Théorie de Fourier des répartitions de brillance Le théorème de la borne supérieure

Soit une fonction $y = y(x)$ de la variable x ; cette fonction y peut être, par exemple, la brillance $E_1^2(x_1)$ sur la sphère céleste, ou l'éclairement sur une image.

L'échelle des détails, souvent de l'ordre de la seconde d'arc, qui nous intéressent dans la répartition des valeurs de la fonction $y(x)$, est toujours très petite par rapport à l'intervalle total de 5 degrés (égale 18 000 secondes d'arc) que nous prenons sur la voûte céleste; nous pouvons donc considérer cet intervalle de 5 degrés comme pratiquement infini. Sous certaines conditions de régularité pour $y(x)$,

on pourra alors définir, par la formule suivante, la transformée de Fourier $A = A(\Omega)$ de cette fonction y :

$$(2) \quad A(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(x) \cdot e^{-i\Omega x} \cdot dx$$

On sait que l'on a alors en retour:

$$(3) \quad y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\Omega) \cdot e^{i\Omega x} \cdot d\Omega$$

La grandeur $\Omega/2\pi$ joue tout à fait le rôle d'une fréquence de vibration sinusoïdale, quoique l'unité avec laquelle elle s'exprime soit le (radian)⁻¹. Aussi l'appellerons-nous *fréquence d'image*; Ω sera la *pulsation d'image*. On voit que l'on peut remplacer la considération de la fonction $y(x)$ par celle de sa transformée de Fourier $A(\Omega)$; c'est ce que l'on fait en Optique pour l'onde lumineuse, et en Acoustique pour l'onde sonore. Nous ferons ainsi pour la distribution de brillance $E_1^2(x_1)$. $A(\Omega)$ représentera désormais la distribution des «*amplitudes de Fourier*» A pour les diverses pulsations d'image Ω . Il conviendra seulement de ne pas confondre la fréquence d'image $\Omega/2\pi$ avec la fréquence ν de la vibration lumineuse elle-même!

Donnons ce que nous appellerons *le théorème de la borne supérieure*, qui est un pur théorème de mathématiques; il nous sera utile dans la suite.

Supposons que les pulsations d'image Ω supérieures en valeur absolue à un nombre M soient absentes de la t. F. de $y(x)$, aient une amplitude $A(\Omega)$ nulle:

$$A(\Omega) = \text{pour: } |\Omega| > M$$

Nous dirons alors que la t. F. de $y(x)$ est *limitée* (fig. 1).

(3) donne alors:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} A(\Omega) \cdot \Omega^n \cdot e^{i\Omega x} \cdot d\Omega$$

$$\left| \frac{d^n y}{dx^n} \right| \leq \int_{-M}^{+M} |A(\Omega)| \cdot |M|^n \cdot d\Omega$$

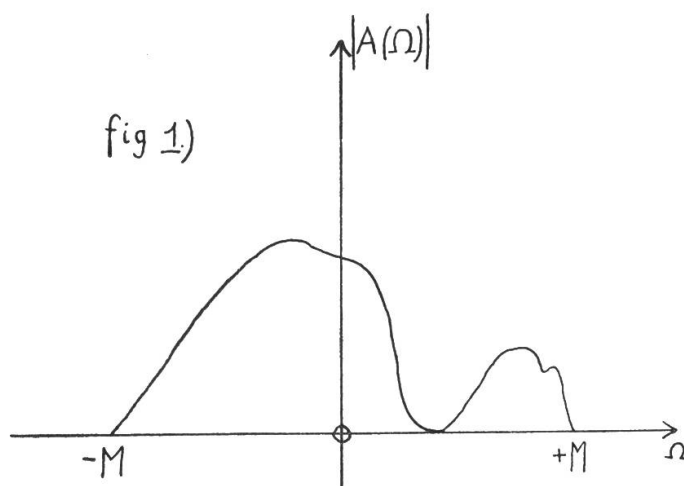
Or (2) donne:

$$|A(\Omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |y(x)| \cdot dx$$

Donc :

$$\left| \frac{d^n y}{dx^n} \right| \leq 2 M^{n+1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |y(x)| \cdot dx$$

(Théorème de la borne supérieure)



On voit donc que, à «norme» donnée pour $y(x)$, plus la fonction $y(x)$ sera à t. F. limitée, et plus elle devra présenter de contours arrondis. Les «petits détails», les variations brusques, y manqueront. On verra l'intérêt de cela au paragraphe 8.

5. Définition de la prise primaire. Les hypothèses fondamentales et la formule fondamentale. Le théorème fondamental

Passons maintenant à la considération des instruments astronomiques d'observation eux-mêmes.

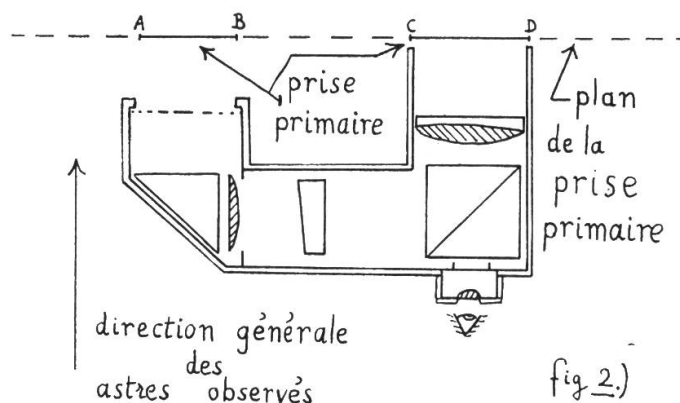
Ce n'est que par l'intermédiaire du champ ondulatoire de lumière, qui règne là-même où se trouve un tel instrument, que nous pouvons avoir des renseignements au sujet des astres; et nous devons donc admettre que la réponse fournie par l'instrument doit être déterminée par ce champ de lumière. Appelons *prise d'onde* toute région, tout domaine de l'espace, tel que le champ de lumière qui règne dans ce domaine détermine de manière univoque la réponse de l'instrument. Alors, d'après ce que nous venons de dire, le domaine de l'espace occupé par l'instrument-même est une telle prise d'onde. Mais nous savons par le principe de Huygens-Fresnel (pour sa forme rigoureuse donnée par Kirchhoff, voir p. ex. [1], que

le champ lumineux qui règne dans un volume est déterminé par le champ qui règne sur la surface-frontière de ce volume. La seule surface-frontière du domaine occupé par l'instrument est donc aussi une prise d'onde de cet instrument.

Nous appellerons *prise primaire* d'un instrument une prise d'onde (fig. 2) qui satisfait aux trois conditions suivantes:

- a) La prise d'onde est contenue tout entière dans un plan.
- b) Ce plan est perpendiculaire à la direction générale des astres observés à l'aide de l'instrument.
- c) Le champ lumineux sur la prise d'onde n'est perturbé ni par l'instrument ni par tout autre corps; c'est à dire que ce champ lumineux est celui qui régnerait sur la prise d'onde si cette dernière surface se trouvait en face des astres dans le vide, loin de tout corps matériel.

Nous admettrons sans démonstration le principe suivant: *Tout instrument astronomique d'observation admet une prise primaire.*

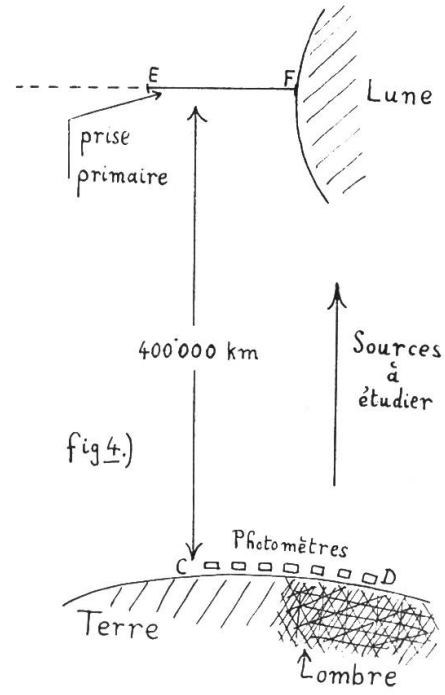
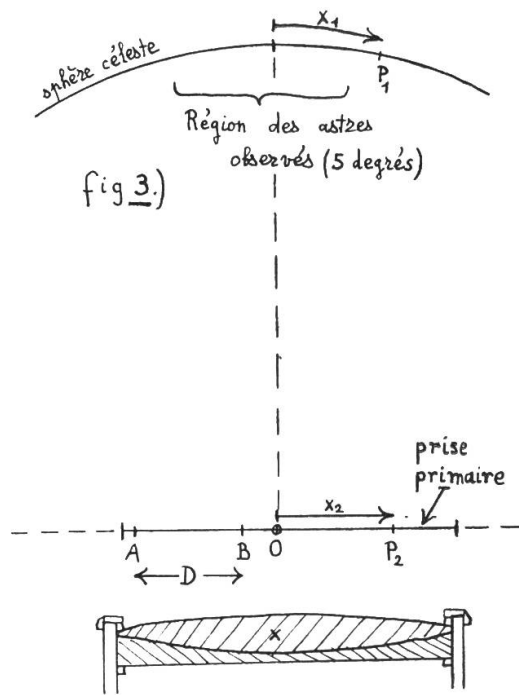


En particulier, il semble bien que tous les télescopes et interféromètres, optiques ou radioélectriques, admettent comme prise primaire une portion de surface plane placée devant leur ouverture libre et la recouvrant complètement.

Calculons le champ lumineux sur la prise primaire, ce qui est facile parce que ce champ n'est perturbé par rien.

Supposons que le centre O de la sphère céleste se trouve (fig. 3) dans le plan de la prise primaire (il serait facile de voir qu'un écart de O hors de ce plan n'a pas d'importance). Soit x_2 l'abscisse, à partir de O, d'un point P_2 de la prise primaire (théorie à une dimension). Le champ lumineux C_2 , de longueur d'onde λ , en P_2 est donné d'une manière générale par:

$$(5) \quad C_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_1(x_1) \cdot e^{-2\pi i \frac{x_1 x_2}{\lambda}} \cdot dx_1$$



Nous appellerons *couple* l'ensemble de deux points A et B quelconques pris dans la prise primaire (fig. 3). La distance D de ces deux points est l'*écartement* du couple. Nous appellerons *pulsation de résonance* du couple AB la quantité ϱ définie par:

$$(6) \quad \varrho = 2\pi \frac{D}{\lambda} \text{ (rad}^{-1}\text{)}$$

Et nous appellerons *période de résonance* du couple la quantité T définie par:

$$(7) \quad T = \frac{2\pi}{\varrho} = \frac{\lambda}{D} \text{ (rad)}$$

Soit C_2' et C_2'' les champs à un moment donné en les deux points d'un couple AB de la prise primaire.

Considérons le produit $C_2' \overline{C_2''}$ où $\overline{C_2''}$ désigne le conjugué complexe de C_2'' . Pour chaque fréquence ν de l'intervalle spectral $\Delta\nu$, les champs C_2' et C_2'' en A et B sont différents; et il en est de même en général pour le produit $C_2' \overline{C_2''}$. Prenons la valeur moyenne de ce produit sur les fréquences de l'intervalle $\Delta\nu$.

Notre *formule fondamentale* du couple affirme que *cette valeur moyenne est égale, pour un écartement D donné du couple, à l'amplitude de Fourier A (ϱ) de la distribution de brillance $E_1^2(x_1)$. La définition de ϱ est donnée par (6).*

$$(8) \quad \frac{1}{\Delta\nu} \sum_{\nu} C_2' \cdot \overline{C_2''} = A(\varrho) \text{ (formule fondamentale)}$$

Je n'indiquerai ici que le principe de la démonstration de la formule fondamentale. On peut la démontrer de deux manières, à ma connaissance: *a)* Considérant $C_2(x_2)$ comme une fonction aléatoire stationnaire de x_2 , dont chaque fréquence ν de l'intervalle $\Delta\nu$ fournit un exemplaire différent, on obtient une démonstration purement mathématique. Le membre gauche de (8) est la «covariance» de la fonction aléatoire. Voir [2] et [3]. *b)* Considérant les points A et B comme constituant la prise primaire d'un interféromètre astronomique Michelson, on démontre facilement que les franges d'interférence, produites dans le plan focal de cet instrument, ont pour profondeur l'amplitude $A(\varrho)$ de la pulsation de résonance de la prise primaire de l'interféromètre; et, d'autre part, que cette profondeur est aussi égale à la valeur moyenne du produit $C_2 \cdot \overline{C_2}$ sur les diverses fréquences de $\Delta\nu$.

Nous verrons bientôt l'intérêt de notre formule fondamentale.

Dans tout instrument astronomique, il existe des organes matériels récepteurs (œil, plaque photographique, cellule photoélectrique, ampèremètre haute-fréquence, etc.) qui mesurent l'état du champ de lumière, qui font ainsi le passage lumière-matière pour l'information concernant les objets célestes. Nous ferons les hypothèses fondamentales suivantes:

Hypothèses fondamentales:

a) La réponse de chaque récepteur ne dépend que du carré $E_3^2 = C_3 \cdot \overline{C_3}$ de l'amplitude E_3 du champ C_3 au point P_3 où est placé le récepteur; ainsi chaque récepteur ne peut mesurer que la densité d'énergie électromagnétique au point où il est.

b) Et même, le récepteur ne peut mesurer que la valeur moyenne

$$\frac{1}{\Delta\nu} \sum_{\nu} E_3^2$$

de E_3^2 sur le petit intervalle spectral $\Delta\nu$; la mesure sur une seule et unique fréquence est impossible.

c) Les équations de propagation de la lumière dans l'instrument sont linéaires. Si bien que le champ C_3 en un point P_3 s'exprime linéairement en fonction des champs $C_2(x_2)$ sur la prise primaire de l'instrument, selon l'expression suivante, où $F(x_2)$ est une fonction convenable qui dépend bien du point P_3 considéré mais qui ne dépend pratiquement pas de la fréquence sur $\Delta\nu$; $F(x_2)$ s'annule en dehors de la prise primaire.

$$(9) \quad C_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_2) \cdot C_2(x_2) \cdot dx_2$$

d) Il n'y a pas d'effet Doppler-Fizeau (produit par des miroirs mobiles, etc.) changeant la fréquence de la lumière entre la prise

primaire et le récepteur matériel. Ainsi la fréquence du champ C_3 est égale à la fréquence ν des champs C_2 qui lui donnent naissance.

Des deux dernières hypothèses fondamentales l'on tire:

$$\frac{1}{\Delta\nu} \sum_{\nu} E_3^2 = \frac{1}{\Delta\nu} \sum_{\nu} C_3 \cdot \overline{C_3} =$$

$$\frac{1}{\Delta\nu} \sum_{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_2') \cdot \overline{F(x_2'')} \cdot C_2(x_2') \cdot \overline{C_2(x_2'')} \cdot dx_2' \cdot dx_2''$$

Ou encore:

$$(10) \quad \frac{1}{\Delta\nu} \sum_{\nu} E_3^2 =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_2') \cdot \overline{F(x_2'')} \cdot \left[\frac{1}{\Delta\nu} \sum_{\nu} C_2(x_2') \cdot \overline{C_2(x_2'')} \right] \cdot dx_2' \cdot dx_2''$$

La formule (10), jointe aux deux premières hypothèses fondamentales, montre que la réponse de l'instrument d'observation ne dépend que de l'ensemble des produits qui ont la forme du membre gauche de (8) et qui se rapportent à des couples de points quelconques de la prise primaire.

En employant la formule fondamentale (8), on a alors l'intéressant: *Théorème fondamental: La réponse d'un instrument astronomique d'observation ne dépend que de ces amplitudes de Fourier $A(\Omega)$ pour lesquelles Ω est la pulsation de résonance ϱ d'un couple AB extrait de la prise primaire. Ces amplitudes de Fourier sont donc les seuls caractères de la distribution de brillance qu'un tel instrument puisse nous faire connaître.*

Une importance conséquence particulière du théorème fondamental est la suivante: *Si la prise primaire d'un instrument est toute entière contenue à l'intérieur d'un cercle de son plan, dont le diamètre Δ sera le diamètre de prise primaire, cet instrument ne pourra nous transmettre des pulsations d'image supérieures à: $\Omega = M$, avec:*

$$(11) \quad M = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} \text{ (rad}^{-1}\text{)}$$

Notre théorème fondamental repose sur notre formule fondamentale, ainsi que sur nos quatre hypothèses fondamentales a), b), c) d), dont il est temps de dire quelque mots. On peut sans aucun doute imaginer certains instruments qui mettent en défaut l'hypothèse a), l'hypothèse d), ou même l'hypothèse c). Par manque de place, je ne donne pas plus d'indications ici. Mais j'ignore actuellement si les possibilités, qui semblent ainsi ouvertes, sont réelles; c'est à dire s'il peut exister des instruments de performances notables, basés essentiellement sur la suppression de ces restrictions. Il est à remarquer que le champ de lumière est considéré ici comme étant scalaire, et non vectoriel. (A suivre)