

# Ein Modell zur Tarifierung der Betriebsunterbrechungsversicherung

Autor(en): **Menn, Christoph S.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Schweizerische Vereinigung der Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries**

Band (Jahr): - **(1989)**

Heft 1

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967206>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

---

CHRISTOPH S. MENN, Zürich

## Ein Modell zur Tarifierung der Betriebsunterbrechungsversicherung\*

### 1 Einleitung

Die Betriebsunterbrechungsversicherung (oder kurz BU-Versicherung, wie ich sie künftig nennen will) hatte ihre Anfänge in Frankreich und den USA. Ab zweiter Hälfte des 19. Jahrhunderts wurden in Frankreich erste Verträge zu einer sogenannten Chômage-Versicherung, d. h. Betriebsstillstandsversicherung abgeschlossen. Der Versicherte erhielt zur Feuerentschädigung einen Zuschlag als Ausgleich für den durch den Sachschaden entstandenen Gewinnentgang. In den USA führte man 1860 in der Textilindustrie eine Art Einkommensversicherung ein, und ab 1880 versicherte man auch den Produktionsausfall infolge eines Feuerschadens. Allerdings wurde die BU-Versicherung über lange Zeit nur als Zusatzdeckung zur Feuerversicherung verstanden und nur in dieser Form angeboten. Erst in neuerer Zeit entwickelte sie sich zunehmend als eigenständige Sparte.

Der moderne Betrieb ist gegen die Gefahren der Betriebsunterbrechung aus mannigfaltigen Gründen anfälliger geworden. So sind der technologische Fortschritt und die Komplexität betrieblicher Einrichtungen dafür verantwortlich, dass es heutzutage nicht mehr genügt, die unmittelbaren Folgen eines Sachschadens zu vergüten, um die betriebswirtschaftliche Zukunft eines Unternehmens zu sichern. Heute kann ein Sachschaden an einer zentralen Produktionseinheit infolge Wiederbeschaffungsschwierigkeiten den Betrieb oder zumindest Teile davon über längere Zeit, bis zu zwei oder drei Jahren, lahmlegen, was zu entsprechenden Folgekosten führt.

Nach dieser Einführung sollen zwei moderne Definitionen zur BU-Versicherung zitiert werden, welche aufzuzeigen vermögen, wie die BU-Versicherung heutzutage zu verstehen ist.

- a) Die Version von *P. Schranz* aus "Feuer-Betriebsunterbrechungs-Versicherung, eine kurze Einführung", Herbst 1987: "Unter BU-Versicherung

\* Auszug aus einer Diplomarbeit an der ETH Zürich bei PD Dr. A. Dubey und Prof. Dr. H. R. Künsch, erstellt im Frühling 1988. Diese Arbeit wurde am 6. Februar 1989 mit dem Walter Saxer Versicherungshochschulpreis ausgezeichnet.

versteht man die Versicherung der finanziellen Auswirkungen eines Schadens auf den Unternehmensertrag. Es geht dabei um die fortlaufenden Kosten (Zinsen, Löhne usw.), aber auch um den entgangenen Gewinn, der infolge des versicherten Schadens nicht erwirtschaftet werden kann.”

- b) Die Version von *D. Farney* aus “Das Betriebsunterbrechungsrisiko und seine Versicherung in BFuP”, Sept. 1980: “Unter Betriebsunterbrechung versteht man jede ungeplante vorübergehende Nichtbenutzbarkeit von Produktionsfaktoren, die dazu führt, dass Produktionsergebnisse ausfallen, die als Deckungsbeiträge für nicht abwendbare Kosten und Gewinne bestimmt waren.”

Wie teilweise bereits angetönt, ist die BU-Versicherung eine Versicherungssparte, welche neben den rein versicherungstechnischen Aspekten noch weitere Charakteristika aufweist. Fast ebenso entscheidend für diese Sparte sind die Gebiete Technik und Betriebswirtschaft. Technik in dem Sinne, als für die individuell korrekte Risikoeinschätzung, d. h. die Beurteilung neuer Technologien, Herstellungsverfahren, technischer Betriebsstrukturen usw., technisches Wissen und Verständnis notwendig sind. Die Betriebswirtschaft ist insofern eine massgebliche Komponente der BU-Versicherung, als es bei Vertragsabschluss aus den verschiedenen betriebswirtschaftlichen Faktoren des zu versichernden Betriebes die angemessene Versicherungssumme zu errechnen gilt, und andererseits im Schadenfalle der gedeckte Schaden daraus zu ermitteln ist.

Obwohl man mittlerweile die BU-Versicherung geraume Zeit kennt und betreibt, herrscht weltweit noch keine Angleichung der verschiedenen Systeme. Fast jedes Land kennt seine eigene Nomenklatur, Normen usw. Neben vielen kleineren Unterschieden ist hauptsächlich die Frage, wann ein Betriebsunterbruch als beendet anzusehen ist, noch nicht einheitlich gelöst. In Europa betrachtet man einen Betriebsunterbruch dann als behoben, wenn der Betrieb wieder ungestört arbeitet und die zu erzielende Ertragshöhe das gleiche Ausmass wie vor dem Schaden erreicht hat (kaufmännische Betriebsbereitschaft). In den USA gilt ein Betriebsunterbruch dann als beendet, wenn die betroffenen Anlagen wieder produktionsbereit sind (technische Betriebsbereitschaft).

Dass das Kind BU-Versicherung gegenüber der Feuerversicherung noch nicht volljährig geworden ist, zeigen die Methoden, mit welchen noch heute das BU-Risiko tarifiert wird. Ganz allgemein wird der BU-Prämiensatz dadurch bestimmt, dass der Feuer-Prämiensatz mit einem Korrekturfaktor multipliziert wird, welcher von der Haftzeit abhängig ist. Diese Tarifierungsidee nimmt keine Rücksicht auf die Besonderheiten der BU-Versicherung, ist aber oft

einzigem Ausweg aus dem Dilemma, welches dadurch entsteht, dass vielerorts separate BU-Zahlen fehlen. Das Hauptproblem dieser Tarifierungsmethode liegt darin, dass sie auf eine Grosszahl von BU-spezifischen Fragen keine Antwort kennt. Einige dieser Fragen wären z. B.:

- Wie tarifiert man verschiedene, auch überjährige Haftzeiten?
- Welchen Rabatt gewährt man für zeitliche Selbstbehalte?
- Wie werden technische Eigenschaften eines Betriebes erfasst?

Um Antworten auf die erwähnten Themenkreise zu erhalten, aber auch um auf BU-Spezifitäten vermehrt Rücksicht zu nehmen, versucht diese Arbeit einen neuen Ansatz zur Tarifierung der BU-Versicherung aufzuzeigen.

## **2. Entwurf eines Modells zur BU-Tarifierung**

In diesem Kapitel geht es darum, die Faktoren zu analysieren, die einerseits die Schadenhäufigkeit und andererseits das Schadenausmass beeinflussen, wenn ein einzelner Betrieb von einem BU-Schadenfall betroffen ist.

### *2.1 Der zeitliche Aspekt*

Im folgenden wollen wir bei einem Betrieb zwei verschiedene Betriebszustände unterscheiden: einmal die sogenannten Produktionsperioden, die Zeit also, während der ein Betrieb ungestört produzieren kann, andererseits die Unterbrechungsperioden, die Zeit also, während der einem Betrieb infolge eines Schadenfalles nur Teile der gesamten Produktionskapazität zur Verfügung stehen. Ein Schadenereignis (mit BU-Schaden als Folgeschaden) beendet also die letzte Produktionsperiode und leitet eine Unterbrechungsperiode ein. Zu den Unterbrechungsperioden sei eine erste Annahme getroffen:

Annahme A 1: Die Möglichkeit eines weiteren Schadens während einer Unterbrechungsperiode soll vernachlässigt werden.

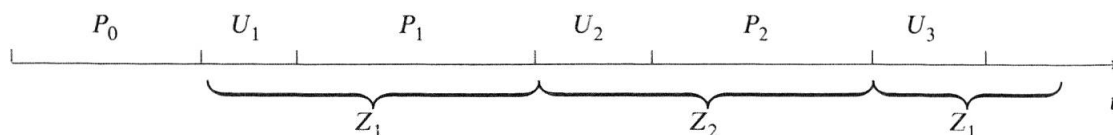
Das Ende einer Unterbrechungsperiode werde durch die wiedererlangte technische Betriebsbereitschaft charakterisiert, welche ihrerseits entsprechend die nächste Produktionsperiode einleitet. Somit stellt sich der Risikoverlauf als Prozess von sich ablösenden Produktions- und Unterbrechungsperioden dar. Der Prozess beginne mit einer ersten Produktionsperiode  $P_0$ . Mit  $P_i$

bezeichnen wir die Dauer der  $i$ -ten Produktionsperiode, mit  $U_i$  die Dauer der  $i$ -ten Unterbrechungsperiode. Die entsprechenden Unterbrechungs- und Produktionsperioden fassen wir zusammen zu einem Zyklus, d. h.  $U_i + P_i = Z_i$  mit  $i = 1, 2, \dots$ . Dazu die nächste Annahme:

Annahme A 2: Die Grössen  $Z_i, U_i, P_i$  sind als Realisationen von Zufallsvariablen mit folgenden Voraussetzungen zu verstehen:

- i) Die  $P_i$  und  $U_i$  seien untereinander und gegeneinander unabhängig.
- ii) Die  $P_i$  seien identisch verteilt mit Verteilungsfunktion  $F_P(x) = P[P_i \leq x]$ . Die  $U_i$  seien identisch verteilt mit Verteilungsfunktion  $F_U(x) = P[U_i \leq x]$ .
- iii) Die  $Z_i$  seien entsprechend unabhängig und identisch verteilt mit  $F_Z(x) = P[Z_i \leq x] = F_P^* F_U(x)$ .

Skizze 1: Der eingeführte Zeitprozess



Neben diesen Zufallsgrössen seien zwei weitere zeitliche Grössen betrachtet, welche für jedes Risiko einzeln im Versicherungsvertrag als Konstante festgelegt werden. Da ist einmal die Haftzeit  $H$  zu nennen, welche die Zeitspanne begrenzt, während der die Versicherungsgesellschaft für einen Unterbrechungsschaden aufzukommen hat. Für gewöhnlich beträgt  $H$  12 Monate, doch dies muss nicht notwendigerweise der Fall sein, denn je länger je mehr (nicht zuletzt wegen der individuell verschiedenen Probleme bei Wiederbeschaffung von Anlagen oder Maschinen) sind auch über- oder unterjährige Haftzeiten von Interesse. Allgemein gilt natürlich  $0 < H < \infty$ , wobei  $H$  die Grenze von 36 Monaten in der Realität kaum übersteigen dürfte. Als zweites wollen wir eine zeitliche Franchise  $W$  in unser Modell einbauen. Dies ist in der BU-Versicherung eine durchaus übliche Form eines Selbstbehaltes. Sie sei als Abzugsfranchise konzipiert, dies nicht zuletzt wegen der moralischen Bedenken gegenüber der Integralfranchise. Allgemein gilt natürlich  $0 \leq W < H$ .

Damit können wir nun die Zeit, während der die Versicherung für den  $i$ -ten Schaden aufzukommen hat, in der Form  $D_i = \min(U_i, H) - \min(U_i, W)$  für  $i = 1, 2, \dots$  ausdrücken. Zusätzlich sei noch die Grösse  $N_t$  eingeführt, wobei

$N_t$  die Anzahl Schäden des betrachteten Betriebes bezeichnen soll bis zum Zeitpunkt  $t$ . Natürlich ist  $N_t \in \mathbb{N}$  und es gilt  $N_t \geq 0 \forall t$ .

## 2.2 Der Schadenverlauf während einer Unterbrechungsperiode

Die Deckung in der BU-Versicherung umfasst den Ertragsausfall, d. h. die nicht erwirtschafteten, fortlaufenden Kosten und den entgangenen Betriebsgewinn. Zur Festsetzung der Versicherungssumme  $V$  geht man von der Betriebsleistung aus. Man benützt dazu ein Schema, dessen wesentlichste Elemente der Nettjahresumsatz abzüglich nichtversicherbare Geschäftsauslagen sowie die Veränderungen der Lagerbestände sind. Die Versicherungssumme  $V$  wird in der Regel in "Franken/Jahr" ausgedrückt. Dieser Normierung entsprechend soll in dieser Arbeit als Zeiteinheit 1 Jahr angenommen werden. Die Versicherungssumme  $V$  ist somit das Mass, wieviel der Versicherer bei einem Totalschaden pro Zeiteinheit (= 1 Jahr) bezahlen müsste. Zum Schadenverlauf, nämlich zur Entwicklung des Schadens während der Zeit, sei folgende vereinfachende Annahme getroffen:

Annahme A 3: Der Schaden entwickle sich linear in der Zeit, d. h. falls die Betriebsunterbrechung die Zeit  $t_0$  dauert, so bestimme sich der Unterbrechungsschaden des Unternehmens bei Totalschaden in der Form  $V \cdot t_0$ .

Wie das Studium echter BU-Schadenverläufe zeigt, ist Annahme A 3 eine sehr starke Idealisierung der Realität. Da man aber über den Schadenverlauf kaum mehr aussagen kann, als dass er stückweise stetig und monoton wachsend verläuft, soll Annahme A 3 in Kombination mit der späteren Annahme A 5 der Vereinfachung unseres Modells dienen.

## 2.3 Zerstörungsgrad und EML-Faktor

Bis dahin haben wir den Wert eines Betriebes durch die Versicherungssumme  $V$  ausgedrückt und stillschweigend angenommen, ein Schadenfall werde den betroffenen Betrieb zu 100 % lahmlegen. Dies ist natürlich in der Realität aus vielerlei Gründen (Brandmauern, Sprinkler-Anlagen, mehrere dezentrale Produktions- und Lagergebäude) nur in Katastrophenfällen wie z. B. nach Erdbeben der Fall. Deshalb drängt es sich auf, eine Grösse  $F$  einzuführen, welche den Zerstörungsgrad eines Betriebes beschreibt.  $F$  ist natürlich eine

Zufallsvariable mit Realisationen  $F_i$  im  $i$ -ten Schadenfall, was bedeuten soll, dass  $F_i$  % der gesamten Produktionskapazität stillliegt. Man beachte, dass  $F$  eine sehr betriebsspezifische Grösse ist, d. h.  $F$  wird eher hohe Werte annehmen bei Betrieben mit nur einer Produktionsanlage. Bei Betrieben mit mehreren dezentralen Produktionseinheiten wird  $F$  hingegen eher klein ausfallen.

Dies führt zur Überlegung, ob im Hinblick auf Tarifierung und Schätzbarkeit die Wahl der Grössen  $F$  und  $V$  optimal gewesen sei. Ausserdem besteht vielleicht die Möglichkeit, A-priori-Wissen über den zu versichernden Betrieb zu nutzen. Analog zur Sachversicherung könnten wir auch in der BU-Versicherung einen *EML*-Faktor (Estimated Maximum Loss) einführen, ausgedrückt in Prozent an  $V$ , welcher zusammen mit der Versicherungssumme  $V$  den realistisch exponierten Wert des zu versichernden Betriebes ausdrückt. Der *EML*-Faktor eines zu versichernden Betriebes wird durch einen Experten geschätzt, wobei die individuellen technischen Aspekte eines Betriebes zu berücksichtigen sind. Dies beinhaltet Brandschutzfaktoren (Brandmauern), die Unterteilung eines Betriebes in verschiedene dezentrale Produktionsstätten inklusive der internen Warenströme mit entsprechender Wertschöpfung, Möglichkeiten zur Schadenminderung (Mieten von Ersatzanlagen) oder auch die Verflechtung mit weiteren Betrieben (Zulieferverträge, Absatzgarantien).

Dieser technischen Schätzmethode zur Bestimmung des *EML*-Faktors (sie orientiert sich an der Realisierbarkeit) sei eine mathematische Definition gegenübergestellt, welche auch die Frage der Grossschäden anspricht. Demnach wäre der *EML*-Faktor so zu bestimmen, dass  $P[F > EML] \leq \varepsilon$ , wobei  $\varepsilon$  in der Grössenordnung von 0,01 anzusetzen wäre, je nach Risikopolitik der entsprechenden Versicherungsgesellschaft.

Mit der Einführung der Schranke  $\varepsilon$  verbindet sich auch die Frage nach der Grossschaden- oder Katastrophenschaden-Politik. Analog zur Definition des *EML*-Faktors könnten auch Katastrophenschäden definiert werden: Katastrophenschäden sind demnach Schäden, bei denen  $F > EML$ . Gängiges Stichwort im Zusammenhang mit Grossschadenpolitik ist in der Regel das Stutzen besonders grosser Einzelschäden. Entsprechend unserer Definition von Grossschäden würde sich die Stutzwelle nicht absolut (orientiert an der Schadenhöhe), sondern relativ (orientiert am Zerstörungsgrad) bestimmen.

Dieses Thema sei nicht weiter ausgeführt. Im Gegenteil; durch die Annahme A4 wollen wir sogar die Möglichkeit von Katastrophenschäden in dieser Arbeit bewusst ausklammern:



Annahme A 4:  $P[F > EML] = 0$

Wir wollen demnach sämtliche Überlegungen nur für den Normalfall der Schäden mit  $F \leq EML$  durchführen. Es gilt, sich demnach immer daran zu erinnern, dass das Problem der Katastrophenschäden ausgeklammert bleibt, d. h. dass zu der später errechneten "reinen" Risikoprämie noch ein Zuschlag für Katastrophenschäden zu addieren wäre.

Dies erlaubt uns jetzt, eine normierte Grösse  $\bar{F}$  einzuführen, definiert als Quotient von  $F$  über  $EML$ , d. h.  $\bar{F} = F/EML$ .  $\bar{F}$  ist ebenfalls (wie  $F$ ) eine Zufallsvariable mit Realisationen  $\bar{F}_i$  im  $i$ -ten Schadenfall, aber im Gegensatz zu  $F$  ist  $\bar{F}$  weniger betriebsspezifisch mit Wertebereich  $0 \leq \bar{F} \leq 1$ .  $\bar{F}$  ersetze in unserem Modell  $F$  als Zerstörungsgrad. Damit haben wir folgendes gewonnen: Durch die Einführung des  $EML$ -Faktors können individuelle Aspekte des zu versichernden Betriebes in der Tarifierung berücksichtigt werden. Der Zerstörungsgrad  $\bar{F}$  wird normiert und betriebsunabhängiger und deshalb statistisch leichter schätzbar. In Komplettierung der Annahme A 3 nehmen wir jetzt für  $\bar{F}$  an:

Annahme A 5:  $\bar{F}$  bleibe konstant während eines Schadenfalles.

Diese Annahme entspricht der Linearität des Schadenverlaufes, jetzt auf dem Niveau von  $(EML \cdot \bar{F}) \%$ , statt auf dem Niveau von 100 % (Totalschaden).

#### 2.4 Modellerweiterungen, der Unterbrechungschaden

Wir haben in Kapitel 2.1 die wiedererlangte technische Betriebsbereitschaft als Charakteristikum für das Ende einer Unterbrechungsperiode herangezogen. Damit haben wir uns natürlich bei der Definition des Zyklusprozesses stark an das US-Deckungssystem angelehnt. Das UK-Deckungssystem deckt aber noch zusätzlich die betriebswirtschaftlichen Folgekosten eines technischen Unterbrechungsschadens. Diese Zusatzdeckung, aber auch weitere für die BU-Versicherung charakteristische Grössen wie Lagerbestände oder versicherungstechnische Grössen wie eine Loss-Limite liessen sich noch einfach in das skizzierte Modell einbauen. Wir wollen uns aber einstweilen mit dem US-Deckungssystem ohne Loss-Limite bescheiden.

Somit lässt sich jetzt einfach darstellen, wie sich die Schadenhöhe eines Unterbrechungsschadens ausdrücken lässt. Die Schadenhöhe  $X_i$  des  $i$ -ten Schadenfalles lässt sich demnach darstellen in der Form:

$$X_i = V \cdot EML \cdot \bar{F}_i \cdot D_i, \quad \text{wobei} \quad D_i = \min(U_i, H) - \min(U_i, W)$$



Der erwartete mittlere Schaden pro Zeiteinheit, stammend aus einem Betrieb, beträgt demnach:

$$C = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \left[ \sum_{i=1}^{N_t} X_i \right]$$

Dies ist gleichzeitig die reine Risikoprämie für ein Jahr.

### 3 Berechnung der erwarteten Kosten pro Zeiteinheit

In diesem Kapitel geht es darum, den in Kapitel 2 für die erwarteten Kosten pro Zeiteinheit gefundenen Ausdruck auszurechnen.

#### 3.1 Ein spezieller Zyklusprozess

Voraussetzung:

Zyklusprozess gemäss Annahme A 2 mit der Besonderheit  $P_0 = 0$ , d. h. wir nehmen an, der erste Schadenfall ereigne sich zu Beginn des Zyklusprozesses. Der  $i$ -te Schadenfall entspricht damit der  $i$ -ten Erneuerung. Für die Grösse  $N_t$  der Anzahl Schäden bis zum Zeitpunkt  $t$  gilt demnach in diesem Spezialfall:

$$N_0 = 1, \quad [N_t \geq k] = \left[ \sum_{j=1}^{k-1} Z_j \leq t \right] \quad \text{für } k > 1.$$

Behauptung:

$$E \left[ \sum_{i=1}^{N_t} U_i \right] = E[U] \cdot I(t),$$

wobei  $I(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_Z^{*n}(t)$  die Erneuerungsfunktion des Zyklusprozesses ist.

Notation:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i \quad \text{mit } S_0 = U_1 \quad \text{und } S_t = 0 \quad \text{für } t < 0.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 E[S_t] &= \int_U \int_P E[S_t/U_1 = u, P_1 = p] dF_U(u) dF_p(p) \\
 &= \int_U \int_P (u + E[S_t - u/U_1 = u, P_1 = p]) dF_U(u) dF_p(p) \\
 &= \int_U \int_P (u + E[S_{t-u-p}]) dF_U(u) dF_p(p) \\
 &= E[U_1] + \int_Z E[S_{t-z}] dF_Z(z), \quad \text{da } F_Z = F_U * F_p.
 \end{aligned}$$

Dies ist eine Erneuerungsgleichung für  $E[S_t]$  bezüglich des Zyklusprozesses  $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Die Lösung dieser Gleichung ist aus der Erneuerungstheorie bekannt:

$$E[S_t] = \int_0^t E[U_1] dI(y) = E[U] \cdot I(t).$$

Bemerkung:

$I(t)$  entspricht der erwarteten Anzahl Erneuerungen in  $[0, t]$ , d. h.  $I(t) = E[N_t]$ .

Beweis:

$$1_{[A_n \leq t]} := \begin{cases} 1, & \text{falls } n\text{-te Erneuerung in } [0, t] \\ 0, & \text{falls } n\text{-te Erneuerung nicht in } [0, t] \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1_{[A_n \leq t]} = \text{Anzahl Erneuerungen in } [0, t]$$

$$E[N_t] = E \left[ \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[A_n \leq t]} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} E[1_{[A_n \leq t]}] = \sum_{n=0}^{\infty} F_Z^{*n}(t) = I(t).$$

### 3.2 Grenzwertüberlegung

Voraussetzung:

Zyklusprozess gemäss Annahme A 2.

Behauptung:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E[S_t] = \frac{E[U]}{E[Z]} \quad \text{mit} \quad S_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i.$$

Beweis:

a)  $P_0 = 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E[S_t / P_0 = 0] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \cdot E[U] \cdot I(t) = E[U] \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \cdot I(t)$$

Der Erneuerungssatz gibt die gesuchte Antwort über das asymptotische Verhalten der Erneuerungsfunktion für  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) \sim \frac{1}{\mu} \cdot t \quad \text{mit} \quad \mu = \int_0^{\infty} (1 - Z(x)) dx = E[Z]$$

Also:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E[S_t / P_0 = 0] = \frac{E[U]}{E[Z]}$$

b)  $P_0 = x > 0$  mit  $x$  beliebig aber fest:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E[S_t / P_0 = x] &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E[S_{t-x} / P_0 = 0] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \cdot E[U] \cdot I(t-x) = \frac{E[U]}{E[Z]} \end{aligned}$$

c)  $P_0$  als Zufallsvariable:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E[S_t] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} E[S_t / P_0 = x] dF_P(x)$$

Es gilt:

$$E[S_t/P_0 = x] \leq E[S_t/P_0 = 0] \quad \forall x \geq 0.$$

Somit existiert eine integrierbare Majorante, entsprechend dürfen  $\int_0^\infty$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty}$  vertauscht werden:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E[S_t] &= \int_0^\infty \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E[S_{t-x}/P_0 = 0] dF_P(x) \\ &= \int_0^\infty \frac{E[U]}{E[Z]} dF_P(x) = \frac{E[U]}{E[Z]} \end{aligned}$$

Bemerkung:

Eigentlich müssen wir  $\lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) \cdot E[\sum_{i=1}^{N_t} \bar{F}_i \cdot V \cdot EML \cdot D_i]$  berechnen. Dieses Problem löst sich ganz analog des obigen Problemes, und man erhält das folgende Resultat:

$$C = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \left[ \sum_{i=1}^{N_t} \bar{F}_i \cdot V \cdot EML \cdot D_i \right] = V \cdot EML \cdot E[D \cdot \bar{F}] \cdot E[Z]^{-1}.$$

### 3.3 Die Schadenfrequenz

Wir haben die Grösse  $N_t$  eingeführt als die Anzahl Schäden bis zum Zeitpunkt  $t$ . Es bezeichne  $\lambda$  die Schadenfrequenz unseres Betriebes.  $\lambda$  könnten wir folgendermassen ausdrücken:  $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) E[N_t]$ . Analog den bereits gefundenen Resultaten in diesem Kapitel finden wir:  $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) E[N_t] = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) I(t) = (1/\mu) \cdot t \cdot (1/t) = 1/\mu = E[Z]^{-1}$ . Damit haben wir die Grösse  $E[Z]^{-1}$  identifiziert als die Schadenfrequenz  $\lambda$  unseres Betriebes.

Man beachte, dass gemäss unserem Modell die Schadenfrequenz eine betriebsspezifische Grösse ist, d. h. sie ist charakteristisch für einen speziellen Betrieb. Weiter ist zu bemerken, dass hinter der Idee des in Kapitel 2.1 eingeführten Zeitprozesses im Grunde genommen die Annahme stand, wonach

wir es bei unserem Modellbetrieb mit einem Betrieb mit lediglich einer einzigen Produktionsanlage zu tun haben. Mit der Einführung des *EML*-Faktors und des normierten Zerstörungsgrades  $\bar{F}$  versuchten wir, unser Modell etwas der Realität anzupassen. Dies hatte nur einen Einfluss darauf, wie sich die Schadenhöhe erklären lässt. Quasi in Ergänzung jener ersten Modellerweiterung ist folgendes zu sehen:

Die Versicherungssumme  $V$ , welche den gesamten Wert des zu versichernden Betriebes beschreibt, könnte man als betriebspezifisches Mass für die betriebspezifische Schadenfrequenz ansehen. Mathematisch ausgedrückt: Erwartungswert und Varianz der Anzahl Schäden sind proportional zu  $V$ . Damit findet man:  $\lambda = \lambda_0 \cdot V$ , wobei  $\lambda_0$  eine Art normierte Schadenfrequenz mit der Dimension  $(F_r)^{-1}$  ist und  $V$  die Grösse des Betriebes und entsprechend dessen Anfälligkeit auf Schäden widerspiegelt. Somit finden wir jetzt für die erwarteten Kosten pro Zeiteinheit  $C$  eines einzelnen Betriebes:

$$C = \lambda_0 \cdot V \cdot V \cdot EML \cdot E[\bar{F} \cdot D]$$

Der Anschaulichkeit halber folgende Notationsänderung:

Der absolute erwartete maximale Schaden *AEML* sei definiert als Produkt aus  $V$  und dem *EML*-Faktor. Damit findet man:

$$C = \underbrace{\lambda_0 \cdot V}_{\text{Schadenfrequenz}} \cdot \underbrace{AEML \cdot E[\bar{F} \cdot D]}_{\text{Schadenhöhe}}$$

Man beachte, dass die Grösse des Betriebes, repräsentiert durch die Versicherungssumme, lediglich auf die Schadenfrequenz einen Einfluss hat. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit geht es hauptsächlich darum, den Einfluss der Unterbrechungsdauer  $U$  auf die Tarifierung etwas näher zu analysieren. In einem ersten Schritt wird aufgezeigt, wie man  $U$  mit Hilfe von Kreditabilitätsmethoden schätzen könnte; in einem zweiten Schritt interessiert dann die Frage der Rabattierung bei zeitlichen Franchisen bzw. die Prämienzuschläge bei überjährigen Haftzeiten.

#### 4 Kreditabilitätsschätzungen der Unterbrechungsdauer $U$

In diesem Kapitel geht es darum, die Verteilungsfunktion der Unterbrechungsdauer  $U$  mit Kreditabilitätsmethoden zu schätzen. Da auf diese

Grösse auch der individuelle *EML*-Faktor einen Einfluss hat, wäre eigentlich  $F_{EML_i}(x) = P[U \leq x/EML_i]$  zu schätzen. Da aber über den *EML*-Faktor noch keine auswertbaren Daten vorliegen, entwickeln wir in diesem Kapitel Formeln zur Schätzung der Grösse  $F(x) = P[U \leq x]$  und wenden diese dann in Kapitel 4.6 im Rahmen einer Beispielsrechnung an.

#### 4.1 Unser Kreditibilitätsmodell

Für die Berechnungen dieser Arbeit wollen wir ein Kreditibilitätsmodell verwenden, welches sich weitgehendst am altbekannten Bühlmann/Straub-Modell mit Volumen orientiert. Wir wollen annehmen, dass unser Modellportefeuille in  $N$  Tarifklassen aufgeteilt ist. Weiter nehmen wir an, dass aus jeder Tarifklasse  $n_i$  Beobachtungen von Unterbrechungsdauern  $U_{ij}$  ( $1 \leq i \leq N$ ,  $1 \leq j \leq n_i$ ) vorliegen. Man beachte, dass erstens die Unterbrechungsdauern  $U_{ij}$  in der Regel keinen verzerrenden Einflüssen wie z. B. Inflation unterliegen, d. h. sie müssen nicht weiter korrigiert werden, und dass es sich zweitens bei den Daten  $U_{ij}$  bereits um relative Daten handelt, d. h. dass die Volumina  $V_{ij}$  des Bühlmann/Straub-Modelles  $\equiv 1$  sind  $\forall ij$ . Somit hat unser Modell folgendes Aussehen:

- i) Jede Risikoklasse werde charakterisiert durch einen Risikoparameter  $\vartheta_i$ , d. h. es gilt  $P[U_{ij} \leq x/\vartheta_i = \vartheta] = F_\vartheta(x)$ . Gegeben die  $\vartheta_i$  seien die  $U_{ij}$  unabhängig. Weiter gebe es zwei Funktionen  $\mu(\cdot)$  und  $\sigma^2(\cdot)$  mit  $E[U_{ij}/\vartheta_i] = \mu(\vartheta_i)$  und  $\text{var}(U_{ij}/\vartheta_i) = \sigma^2(\vartheta_i)$ .
- ii) Die Zufallsvariablen  $(\vartheta_1, U_{11}, \dots, U_{1n_1}), \dots, (\vartheta_N, U_{N1}, \dots, U_{Nn_N})$  seien unabhängig.
- iii) Die Risikoparameter  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_N$  seien unabhängig und identisch verteilt.

Gleichzeitig sollen noch die drei wichtigen Kreditibilitäts-Parameter eingeführt werden:  $v = E[\sigma^2(\vartheta)]$ ,  $w = \text{var}(\mu(\vartheta))$ ,  $m = E[\mu(\vartheta)]$ .

Die Unterteilung des Portefeuilles in Risikoklassen basiert auf der Zugehörigkeit der einzelnen Risiken zu einer Unternehmenssparte, d. h. es wird gemäss eines Industrie-Risk-Management-Sparten-Codes das Versicherungs-Portefeuille in möglichst homogene Teile aufgespalten.

## 4.2 Der Risikoparameter

Wie schon angedeutet, benutzt das Credibility-Modell Bühlmann/Straub einen Risikoparameter  $\vartheta_i$ , um damit die  $i$ -te Risikoklasse zu charakterisieren. Mathematisch gesehen handelt es sich dabei um Realisationen einer Zufallsvariablen  $\vartheta$ . Allgemein ausgedrückt beschreiben diese Risikoparameter die Schadenanfälligkeit der einzelnen Tarifklassen. Entsprechend der Gefahrenpalette, gegen die man sich in der BU-Versicherung schützen kann, könnte man den Risikoparameter  $\vartheta_i$  als  $M$ -dimensionalen Vektor  $\vartheta_i = (\vartheta_{i1}, \dots, \vartheta_{iM})$  darstellen. Dabei repräsentieren  $M$  die Anzahl der verschiedenen Gefahren, gegen die man sich versichern kann, während  $\vartheta_{ik}$  die Anfälligkeit eines Unternehmens aus Tarifklasse  $i$  auf die Gefahr  $k$  beschreibt. Analog versteht sich auch die Schadenfrequenz  $\lambda_0$  als Vektor  $\lambda_0 = (\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0M})$ . Dies bedeutet insofern eine  $M$ -Fachheit des Modelles, als sich der Schadenbedarf pro Jahr eines Unternehmens aus Tarifklasse  $i$  jetzt in der Form  $C_{ik} = \lambda_{0ik} \cdot V \cdot AEM L \cdot E[\bar{F} \cdot D / \vartheta_{ik}]$  darstellen lässt mit  $1 \leq k \leq M$  und  $1 \leq i \leq N$ . Entsprechend ist das Resultat der ganzen Tarifierung nicht einfach eine Prämie  $P$ , sondern ein Prämienvektor  $P = (P_1, \dots, P_M)$ , wobei  $P_k$  die Teilprämie für Deckung der Gefahr  $k$  bedeutet. Stellt man sich einen Vertragsabschluss als  $M$ -dimensionalen 0-1-Vektor vor – wobei eine 1 an Stelle  $k$  Deckung gegen die  $k$ -te versicherbare Gefahr bedeutet –, so erhält man die Schlussprämie als Skalarprodukt aus dem Prämienvektor und dem Vertragsabschlussvektor.

Wir haben das Versicherungsportefeuille aufgrund der Zugehörigkeit der Risiken zu verschiedenen Berufssparten in Tarifklassen aufgeteilt. Es stellt sich nun die Frage, ob es nicht noch weitere Merkmale gibt, gemäss welchen ein Portefeuille unterteilt werden müsste. Eine Idee wäre z. B. die Unterteilung des Portefeuilles nach Ländern, d. h. gemäss den Standorten der versicherten Unternehmen. Dies liesse sich z. B. dadurch rechtfertigen, dass auf diese Art und Weise den unterschiedlichen Sicherheitsnormen oder Rechtssystemen einzelner Länder Rechnung getragen würde. Dies führt nun allerdings zu einer echten Mehrdimensionalität des Modelles. Der Schadenbedarf eines Unternehmens aus Tarifklasse  $i$  und Land  $h$  lässt sich somit in der Form  $C_{hik} = \lambda_{0hik} \cdot V \cdot AEM L \cdot E[\bar{F} \cdot D / \vartheta_i, \zeta_h]$  darstellen.

Ein solcher mehrdimensionaler Ansatz führt zu einem hierarchischen Kreditibilitätsmodell. In dieser Arbeit sollen aber alle Credibility-Überlegungen der Einfachheit halber eindimensional bleiben. Der weiteren Risikoidentifikation gemäss Standort soll insofern Rechnung getragen werden, als wir den Schadenbedarf pro Jahr eines Unternehmens aus Tarifklasse  $i$  und Land



$h$  in der Form  $C_{ih} = \lambda_{0i} \cdot V \cdot AEM L \cdot E[\bar{F} \cdot D / \vartheta_i] \cdot g_h$  schreiben. Auf die Indizes  $k$  wollen wir in Zukunft verzichten, die Standortfaktoren  $g_h$  sind separat zu schätzen.

### 4.3 Kreditabilitätsschätzung des Erwartungswertes der Unterbrechungsdauer $U$

In diesem Abschnitt soll die "wahre" Unterbrechungsdauer der Risikoklasse  $i$  bestimmt werden, d. h. es soll  $E[U_{ij}/\vartheta_i]$  geschätzt werden. Dabei handelt es sich mathematisch gesehen um ein längst bekanntes Problem. Entsprechend gut bekannt sind Ansatz und Lösung dieses Problems; sie sollen entsprechend nur kurz erwähnt werden.

Problemformulierung:

Zu schätzen ist  $E[U_{ij}/\vartheta_i] = \mu(\vartheta_i)$  für die Tarifklassen  $1 \leq i \leq N$ . Gesucht ist ein Schätzer  $\hat{\mu}_i$ , welcher linear ist in den Beobachtungen, d. h. die Form  $\hat{\mu} = \sum_{kj} a_{kj} \cdot U_{kj}$  aufweist, welcher erwartungstreu ist, d. h. die Gleichung  $E[\hat{\mu}_i] = E[\mu(\vartheta_i)] = m$  erfüllt, und welcher in dem Sinne optimal ist, als  $E[(\hat{\mu}_i - \mu(\vartheta_i))^2]$  minimal werden soll.

Lösung:

Das Resultat ist eine gewichtete Mittelung der rein individuellen Erfahrung aus Tarifklasse  $i$  und der allgemeinen Erfahrung aus dem gesamten Datenbestand.

$$\hat{\mu} = \gamma_i \cdot U_i + (1 - \gamma_i) \cdot m,$$

wobei

$U_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} U_{ij}$  die rein individuelle Schätzung bezüglich der Tarifklasse  $i$ ,

$\gamma_i = \frac{n_i}{n_i + (v/w)}$  der Kreditabilitätsfaktor der rein individuellen Schätzung aus Tarifklasse  $i$ ,

$m = E[\mu(\vartheta_i)]$  die Erfahrung bezüglich des gesamten Portefeuilles.

Parameterschätzungen:

Auch wie die drei Parameter  $m, v, w$  in diesem Fall optimal geschätzt werden können, ist hinlänglich bekannt. Hier die Lösung:

$$\begin{aligned}\widehat{v} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (U_{ij} - U_i)^2 \\ \widehat{m} &= \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N n_i \cdot U_i \quad \text{mit} \quad V = \sum_{i=1}^N n_i \\ \widehat{w} &= \frac{\sum_{i=1}^N (n_i/V)(U_i - m)^2 - (N-1)(v/V)}{\sum_{i=1}^N (n_i/V)(1 - n_i/V)}\end{aligned}$$

#### 4.4 *Kredibilitätsschätzung einer Wahrscheinlichkeit der Unterbrechungsdauer $U$*

Wenn es darum geht, den Einfluss von Wartefristen oder variablen Haftzeiten auf die Prämie abzuschätzen, ist es notwendig zu wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Unterbrechungsschaden länger als eine bestimmte Zeitschwelle  $c$  dauert, d. h. es interessiert der Wert der Grösse  $P[U_{ij} > c/\vartheta_i]$ . Dieses Problem lässt sich leicht auf das Problem aus Abschnitt 4.3 zurückführen. Man führt nämlich eine Zufallsvariable  $X_{ij}^c$  ein mit

$$X_{ij}^c = \begin{cases} 1, & \text{falls } U_{ij} > c \\ 0, & \text{falls } U_{ij} \leq c. \end{cases}$$

Man sieht sofort, dass  $P[U_{ij} > c/\vartheta_i] = E[X_{ij}^c/\vartheta_i]$  ist. Damit haben wir unser neues Problem auf den Standardfall zurückgeführt. Als neue Notation sei noch eingeführt:

$$p(c, \vartheta_i) = P[U_{ij} > c/\vartheta_i] = E[X_{ij}^c/\vartheta_i]$$

Problemformulierung und Lösung bleiben praktisch gleich wie oben:

$$\widehat{p}(c, \vartheta_i) = \gamma_i^c \cdot X_i^c + (1 - \gamma_i^c) \cdot m(c)$$

mit

$$X_i^c = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}^c, \quad \gamma_i^c = \frac{n_i}{n_i + [v(c)/w(c)]}, \quad m(c) = E[p(c, \mathcal{G})]$$

Parameterschätzung:

Wie man leicht sieht, sind in diesem Spezialfall die drei Parameter  $m(c)$ ,  $v(c)$ ,  $w(c)$  nicht mehr unabhängig, sondern abhängig voneinander. Dies kann insofern ausgenutzt werden, als nur noch 2 aus Daten geschätzt werden müssen, der dritte Parameter lässt sich aus den beiden anderen berechnen.

Beweis:

$$m(c) = E[p(c, \mathcal{G})]$$

$$w(c) = \text{var}(\mu(\mathcal{G})) = E[p^2(c, \mathcal{G})] - (m(c))^2$$

$$v(c) = E[\sigma^2(\mathcal{G})] = \dots = m(c) - E[p^2(c, \mathcal{G})]$$

$$\Rightarrow w(c) = m(c) - v(c) - (m(c))^2$$

$$\hat{m}(c) = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N n_i \cdot X_i^c \quad \text{mit} \quad V = \sum_{i=1}^N n_i$$

$$\hat{v}(c) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij}^c - X_i^c)^2$$

$$\hat{w}(c) = \max(0, m(c) - v(c) + (m(c))^2)$$

#### 4.5 Ein Vergleich der beiden unterschiedlichen Methoden der Parameterschätzung

Leider bestand innerhalb dieser Arbeit keine Zeit, die Unterschiede der beiden Schätzmethoden für den Parameter  $w$  genauer zu analysieren. Die Resultate eines gerechneten Beispielles lassen höchstens vermuten, inwiefern sich die beiden Methoden unterscheiden könnten. Die beiden Schätzer hatten dabei folgendes Aussehen:

$$w(B/S) = \frac{\sum_{i=1}^N (n_i/V)(U_i - m)^2 - (N-1)(v/V)}{\sum_{i=1}^N (n_i/V)(1 - n_i/V)}$$

$$w \text{ (speziell)} = \max(0, -v + m(1 - m))$$

Da es unmöglich war, echte Daten, d. h. eine Kollektion von verschiedenen Unterbrechungsdauern, zur Analyse zu erhalten, benutzte ich an ihrer Stelle die Schadenzahlen von BU-Schäden, welche mit Hilfe einiger Annahmen zu fiktiven Unterbrechungsdauern transformiert wurden. Damit erhielt ich folgende Resultate:

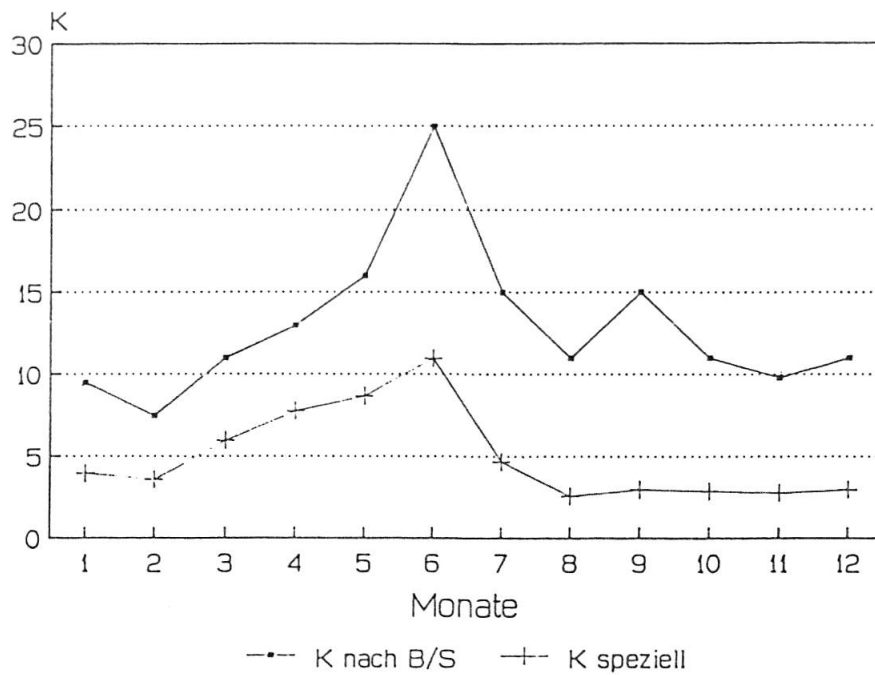
$c[Mt]$	$w(B/S)$	$w$ (speziell)	$K(B/S)$	$K$ (speziell)
1	0,017	0,041	9,5	4,0
2	0,026	0,054	7,5	3,6
3	0,020	0,035	11,0	6,0
4	0,015	0,026	13,0	7,8
5	0,012	0,022	16,0	8,7
6	0,007	0,010	25,0	11,0
7	0,010	0,031	15,0	4,7
8	0,011	0,045	11,0	2,6
9	0,007	0,037	15,0	3,0
10	0,009	0,030	11,0	2,9
11	0,009	0,032	9,8	2,8
12	0,008	0,030	11,0	3,0

Eine kurze Diskussion der beiden Schätzmethoden:

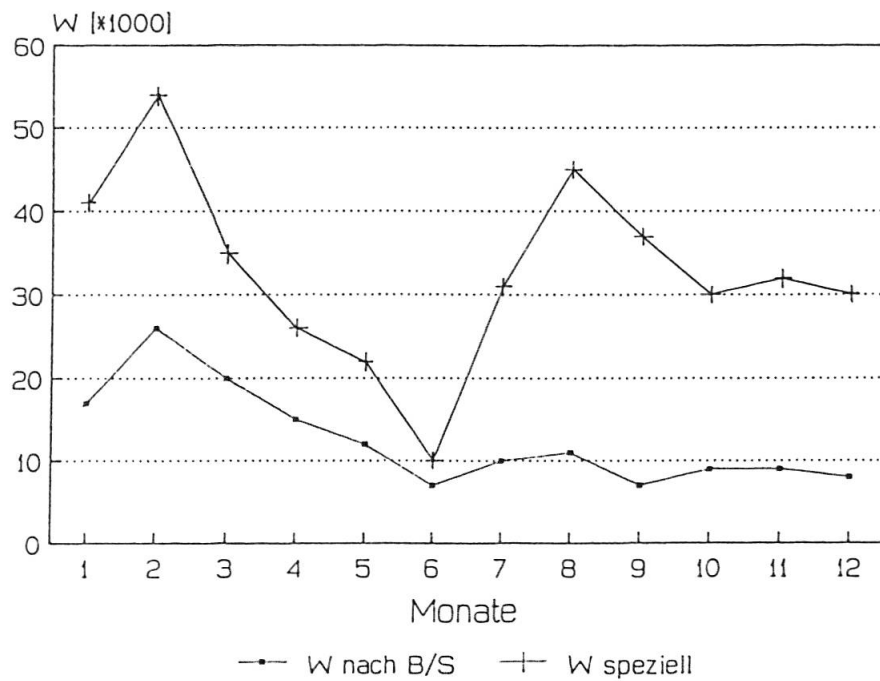
Wie aus den Graphiken gut ersichtlich ist, stimmen die beiden Schätzmethoden für die Parameter  $w$  und  $K = v/w$  dem Trend nach ziemlich gut überein. Die spezielle Schätzung ergibt für den Parameter  $w$  durchwegs höhere Werte als die gewöhnliche Schätzmethode. Auch die Amplitudenausschläge sind stärker bei der speziellen Schätzmethode. Es scheint daher, dass diese weniger robust ist als die gebräuchlichere Schätzmethode. Ob diese ersten Beobachtungen auch substantielle Eigenschaften dieser beiden Schätzer für  $w$  sind, lässt sich hier natürlich nicht abschliessend feststellen. Zur Untermauerung einer solchen Behauptung wären zahlreichere und umfangreichere Beispielsrechnungen nötig gewesen, als dies im Rahmen dieser Arbeit möglich war.

Die oben erwähnten Beobachtungen der Eigenschaften der Schätzmethode für den Parameter  $w$  gelten in umgekehrter Art und Weise auch für  $K$ , da  $K$  ja definiert ist als Quotient von  $v$  über  $w$ . Dies hat nun den folgenden Einfluss auf den Kreditibilitätsfaktor  $\gamma_k = V_k/(V_k + K)$  der rein individuellen Schätzung:  $\gamma_k$  ist durchwegs kleiner bei der Schätzmethode nach Bühlmann/Straub und entsprechend grösser bei der speziellen Methode. Dies bedeutet, dass die

## Vergleich der Schätzmethoden für "K"



## Vergleich der Schätzmethoden für "W"



spezielle Schätzmethode die Individualität der Tarifklassen stärker betont als die gebräuchlichere Schätzung. Aber auch hier ist natürlich anzufügen, dass diese Beobachtungen lediglich auf einer Beispielsrechnung beruhen und deshalb noch keine allgemeine Gültigkeit beanspruchen können.

#### 4.6 *Kredibilitätsschätzung der Verteilungsfunktion der Unterbrechungsdauer $U$*

In diesem Abschnitt soll der Frage nachgegangen werden, wie die Verteilungsfunktion  $F_{\vartheta_i}(x) = 1 - P[U_{ij} > c/\vartheta_i] \forall i$  geschätzt werden könnte. Da gilt es einmal die Möglichkeit einer eigentlichen Kredibilitätsschätzung der Verteilungsfunktion zu erwähnen, wie dies *W.S. Jewell* in einem Artikel aufgezeigt hat. Eine andere Möglichkeit ist, basierend auf dem Kapitel 4.4 dieser Arbeit, die Grösse  $p(c, \vartheta_i) = P[U_{ij} > c/\vartheta_i]$  nicht nur für ein festes  $c$ , sondern unabhängig voneinander für verschiedene  $c$  zu schätzen. Resultat solcher Schätzungen wäre eine Punktwolke. Unter Anwendung der Regressionstheorie könnte jetzt versucht werden, die Verteilungsfunktion  $F_{\vartheta_i}(x) = 1 - P[U_{ij} > c/\vartheta_i]$  zu berechnen, wobei die Regression natürlich ausgleichend wirkt bezüglich der zufälligen Schwankungen, die dadurch entstehen, dass die einzelnen Beobachtungen ihrerseits bereits Schätzergebnisse sind.

#### 4.7 *Abhängigkeit der Parameter und Schätzformeln von der Schranke $c$*

Im obigen Abschnitt haben wir die Möglichkeit angedeutet, die Verteilungsfunktion der Unterbrechungsdauer dadurch zu schätzen, dass die Grösse  $p(c/\vartheta_i)$  für verschiedene  $c$  unabhängig berechnet wird. In diesem Abschnitt soll untersucht werden, ob die Kredibilitätsparameter abhängig sind von der Schranke  $c$  und ob die Parameterschätzungen diesen Abhängigkeiten auch gerecht werden, d. h. ob die Schätzformeln aus Kapitel 4.4 ohne weiteres übernommen werden können oder ob diese Formeln durch zusätzliche Randbedingungen getrimmt werden sollten. Die Idee dabei ist, nachträgliches Ausgleichen durch Regression dadurch überflüssig werden zu lassen, dass schon bei den einzelnen Punktschätzungen gewissen Trends oder Abhängigkeiten Rechnung getragen wird.

I) Die kollektive Erfahrung  $m(c)$ 

Die kollektive Erfahrung  $m(c) = E[E[X_{ij}^c/\mathcal{G}_i]] = E[X_{ij}^c]$  ist monoton fallend mit wachsendem  $c$ . Gleiches gilt auch für den Schätzer  $\hat{m}(c) = (1/V) \sum_{i=1}^N n_i \cdot X_i^c$ , welcher ebenfalls monoton fallend ist mit wachsendem  $c$ , da  $X_i^c$  bereits diese Eigenschaft besitzt. In diesem Falle stimmen also Abhängigkeit von Parameter und Schätzer schon von Anfang an überein.

II) Der Parameter  $K(c) = v(c)/w(c)$ 

Um die Abhängigkeit der Grösse  $K(c)$  bzw. des Kreditibilitätsparameters  $\gamma_i^c = n_i/(n_i + K(c))$  von der Schranke  $c$  zu bestimmen, sei Zuflucht zu einem Beispiel genommen:

Annahme B:

- a) Die  $U_{ij}$  seien exponential verteilt, d. h.  $P[U_{ij} > c/\mathcal{G}_i] = e^{-c\mathcal{G}_i}$   
 b) die  $\mathcal{G}_i$  seien Gamma-verteilt mit Dichte  $(\beta^\alpha/\Gamma(\alpha)) \cdot e^{-\beta\mathcal{G}} \cdot \mathcal{G}^{\alpha-1}$

Mit dieser Hilfe lässt sich die Grösse  $K(c)$  explizit berechnen:

$$w(c) = \left(\frac{\beta}{\beta + 2c}\right)^\alpha - \left(\frac{\beta}{\beta + c}\right)^{2\alpha}$$

$$v(c) = \left(\frac{\beta}{\beta + c}\right)^\alpha - \left(\frac{\beta}{\beta + 2c}\right)^\alpha$$

$$K(c) = \frac{(\beta + c)^\alpha(\beta + 2c)^\alpha - (\beta + c)^{2\alpha}}{(\beta + c)^{2\alpha} - (\beta + 2c)^\alpha \cdot \beta^\alpha}$$

Im Spezialfall  $\alpha = 1$  findet man entsprechend für  $K(c)$  :  $K(c) = (\beta + c)/c$ . Somit ist  $K(c)$  für  $\alpha = 1$  stetig, streng monoton fallend und konvex. Die Anwendung dieser Erkenntnis auf den Kreditibilitätsfaktor  $\gamma_i^c$  ergibt ein sehr überraschendes Resultat. Man findet nämlich, dass dann die Glaubwürdigkeit der rein individuellen Stichprobenverteilung aus der Risikoklasse  $i$  mit wachsendem  $c$  steigt, obwohl immer weniger Daten die Zeitschranken  $c$  überschreiten, d. h. die wenigen Grossschäden aus Klasse  $i$  gewinnen mit wachsendem  $c$  an individueller Glaubwürdigkeit gegenüber der kollektiven Erfahrung  $m(c)$ .

Dieses Resultat lässt sich allerdings nicht auf den allgemeineren Fall  $\alpha \neq 1$  übertragen. Man findet nämlich:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} K(c) = 2^\alpha - 1 \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} +\infty$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} K(c) = +\infty$$



Dazwischen gibt es, je nach Grösse von  $\alpha$ , lokale Maxima oder Minima. Entsprechend ist auch kein eigentlicher Trend bezüglich des Verhaltens von  $K(c)$  oder  $\gamma_i^c$  in Abhängigkeit von  $c$  erkennbar.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Formeln zur Schätzung der Parameter, so, wie sie in Kapitel 4.4 präsentiert wurden, auch dann durchaus benützt werden können, wenn die Grösse  $P[U_{ij} > c/g_i]$  für mehrere  $c$  berechnet werden soll.

Im Verlaufe dieser Arbeit zeigte sich allerdings, dass die Datenbasis zu diesen Überlegungen noch weitgehend fehlt. So wird in der Regel die Unterbrechungsdauer von den Versicherungs-Gesellschaften noch nicht in den Datenbanken erfasst und ist somit auch nicht auswertbar. Entsprechend war es auch nicht möglich, mit echten Daten ein Beispiel zu diesen Überlegungen durchzurechnen. Es bleibt zu hoffen, dass diese Arbeit vielleicht dazu beitragen kann, dass die entsprechenden Datenbanken um eine Position "Unterbrechungsdauer" erweitert werden, damit in Zukunft solche Überlegungen nicht mehr ganz im "luftleeren" Raum geschehen müssen.

Christoph S. Menn  
Viktoriastrasse 23  
8057 Zürich

## Literatur

- Aven, Terje/Myre, Hanne*: A Rating Model of Loss of Profits Insurance. Storebrand Actuarial Research Report 5, August 1987.
- Gisler, A.*: Optimales Stutzen von Beobachtungen im Credibility-Modell; Diss. ETH Nr. 6556, Zürich 1980.
- Jewell, W.S.*: The Credible Distribution. Astin Bulletin Vol. 7.3, 1974, 237–269.
- Schranz, P.*: Feuer-Betriebsunterbrechungs-Versicherung, eine kleine Einführung. SR-Publikationen, Herbst 1987.
- Summer School of the Association of Swiss Actuaries 1987*: Unterlagen (speziell die Lektionen Nr. 5, 6 und 7 von H. Bühlmann bzw. E. Straub).

## Zusammenfassung

Die Methoden, die heute bei der Tarifberechnung der Betriebsunterbrechungsversicherung Anwendung finden, sind noch oft geprägt durch Ideen aus der Zeit, als die BU-Versicherung nur als Zusatzdeckung zur Feuer-Versicherung verstanden wurde. Entsprechend können diese Modelle heutigen Anforderungen bzgl. Integration und Berechenbarkeit von speziellen Tarifelementen (wie z. B. zeitliche Franchisen) kaum gerecht werden. Im vorliegenden Artikel wird versucht, ausgehend von der Zeit als einem Grundelement der BU-Versicherung, ein Modell zu entwickeln, welches sich für solche Bedürfnisse besser eignet. In einem zweiten Teil wird aufzuzeigen versucht, wie speziell mit Kreditibilitätsmethoden aus Datensätzen zeitabhängige Faktoren geschätzt werden können, welche Hinweise darauf geben, welchen Einfluss Franchisen oder verschiedene Haftzeiten auf die BU-Prämie haben sollten.

## Résumé

Les méthodes appliquées de nos jours pour tarifer les assurances des pertes d'exploitation sont plus ou moins les mêmes qu'à l'époque où ce risque était couvert simplement par une police étendue d'assurance-incendie. Par conséquent, elles ne peuvent pas tenir compte d'éléments spéciaux (tels que les délais de carence). Dans le présent article, un modèle plus réaliste est développé, basé sur le fait que le temps joue un rôle primordial dans l'assurance des pertes d'exploitation. Il est montré, dans la seconde partie, comment il est possible, avec les méthodes de crédibilité en particulier, d'estimer les paramètres qui dépendent du temps. Ces paramètres nous montrent alors quelle est l'influence sur la prime d'une franchise donnée ou de la longueur de la période de couverture.

## Summary

The methods applied nowadays to rate business interruption insurances are still more or less the same as during the times when business interruption was merely an extended coverage to a fire policy. As a consequence of this they cannot cope with special elements (such as for instance time deductibles). In the present article a more realistic model is developed, based on the fact that time plays a fundamental role in business interruption insurance. In a second part it is shown how it is possible, particularly with credibility methods, to estimate time-dependent parameters which in turn indicate how much influence a given deductible or cover period may have on the premium.

