

Ueber eine Verallgemeinerung des Lagrangeschen Lehrsatzes, für die der Beweis noch gefordert wird

Autor(en): **Schläfli, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1848)**

Heft 121-122

PDF erstellt am: **20.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-318263>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

MITTHEILUNGEN
DER
NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT
IN BERN.

Nr. 121 und 122.

Ausgegeben den 10. April 1848.

L. Schläfli, Ueber eine Verallgemeinerung des Lagrangeschen Lehrsatzes, für die der Beweis noch gefordert wird.

(Mitgetheilt am 4. März 1848.)

In den Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich Nro. 16 vom Dec. 1847 giebt Herr Prof. Raabe einen Beweis für den Lagrangeschen Satz, in dem zusammengesetzten Falle, wenn die Entwicklung nach den aufsteigenden Potenzen zweier unabhängiger Variabeln fortschreitet, und zeigt dann die Brauchbarkeit des gefundenen Ergebnisses für die Theorie der Störungen der Planeten. Für diese Anwendung reicht es hin, wenn man die Werthe der Differentialcoefficienten, mit denen die Produkte der Potenzen der beiden Variabeln multiplicirt sind, nur für den Fall darstellt, wo diese Variabeln selbst, nach denen entwickelt wird, verschwinden. Der Beweis des Herrn Prof. Raabe ist aber von dieser Beschränkung frei, so dass man aus demselben ersieht, dass die Form der Werthe jener Differentialcoefficienten selbst dann noch

ihre Geltung behält, wenn die beiden Variabeln, nach deren Potenzenprodukten die Umkehrungsformel fortschreitet, nicht verschwinden. Diese Ausdehnung der ursprünglichen Lagrangeschen Umkehrungsreihe auf den Fall zweier Variabeln führt auf den Gedanken, dass eine ähnliche nach den Potenzenprodukten einer beliebigen Zahl von Variabeln fortschreitende Umkehrungsreihe vorhanden sein müsse. Nun gibt wirklich Laplace in seiner *Mécanique céleste*, T. 1 pag. 175, einen Beweis, der auch in dieser Ausdehnung noch seine volle Geltung behält, dagegen der Beschränkung unterworfen ist, dass man in den Werthen jener Differentialcoefficienten die Variabeln selbst, nach denen sie genommen sind, verschwinden lassen muss, wenn der für die Identität geführte Beweis in Kraft bleiben soll. Aber auch in diesem allgemeinsten Fall einer beliebigen Anzahl unabhängiger Variabeln gelten höchst wahrscheinlich die symbolisch gefassten Ausdrücke Laplace's selbst dann noch, wenn die Variabeln nicht verschwinden. Meines Wissens hat indess noch Niemand diese grosse Wahrscheinlichkeit zur Gewissheit erhoben, obgleich die ursprüngliche Lagrangesche Umkehrungsformel in allen Lehrbüchern der Differentialrechnung eine Stelle einnimmt. Herrn Prof. Raabes Abhandlung selbst zeugt davon, dass ihm trotz seiner ausgedehnten Bekanntschaft mit der mathematischen Litteratur eine derartige Leistung unbekannt gewesen sein muss. Vorigen Sommer habe ich mich vergeblich angestrengt, einen allgemeinen Beweis zu finden; namentlich der so oft angewandte Schluss von n auf $n + 1$ wollte mir nicht gelingen. Um einen Begriff von der Schwierigkeit des Gegenstandes zu geben, will ich hier einen Beweis für den Fall dreier unabhängiger Variabeln mittheilen, sehe mich aber genöthigt, denselben noch denjenigen für zwei Variabeln voranzuschicken.

Um aber das anzustrebende Ziel gleich Anfangs vor Augen zu stellen, lasse ich den verallgemeinerten Lagrangeschen Satz folgen.

» Wenn $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ irgend eine gegebene
» Funktion der Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnet, welche
» durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1 + \alpha_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2 &= t_2 + \alpha_2 \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ etc.} \\ x_n &= t_n + \alpha_n \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

» von den unabhängigen Variabeln $t_1, t_2, \dots, t_n, \alpha_1, \alpha_2,$
» $\dots, \alpha_n$ abhängig gemacht sind, und man stellt sich die
» die Aufgabe, die erstgenannte Function F (welche ex-
» plicite nur $x_1, x_2, \dots, x_n$ enthält) nach den Produkten
» der steigenden Potenzen von $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ zu entwickeln,
» so wird hiezu die Kenntniss des Differentialcoefficienten

$$\frac{d^{m_1 + m_2 \dots + m_n} F}{d\alpha_1^{m_1} d\alpha_2^{m_2} \dots d\alpha_n^{m_n}} \text{ erfordert.}$$

» Nun hat man für denselben den abgekürzten sym-
» bolischen Ausdruck:

$$\frac{d^{m_1 + m_2 \dots + m_n - n}}{dt_1^{m_1 - 1} dt_2^{m_2 - 1} \dots dt_n^{m_n - 1}} \left[\frac{d^n \cdot F}{d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n} \right]$$

» wo die Klammern anzeigen sollen, dass man nach ge-
» schehener Umwandlung des eingeschlossenen Differen-
» tialcoefficienten in einen ganzen rationalen Ausdruck,
» worin nur nach $t_1, t_2, \dots, t_n$ genommene Differential-
» coefficienten vorkommen, in demselben die Grössen $\varphi_1,$
» $\varphi_2, \dots, \varphi_n$ resp. durch $\varphi_1^{m_1}, \varphi_2^{m_2}, \dots, \varphi_n^{m_n}$ zu er-
» setzen hat.“

Laplace beweist diesen Satz nur für den Fall, wo
sämmliche Variabeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ verschwinden, und

daher in der wirklichen Entwicklung des symbolischen Ausdrucks durchweg $x_1 = t_1, x_2 = t_2, \dots x_n = t_n$ gesetzt werden darf. Da aber der Satz für $n = 3$ auch noch gilt, wenn man $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nicht verschwinden lässt, so gilt er wahrscheinlich für ein beliebiges n auch dann noch, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ nicht verschwinden.

I. Dem Falle $n = 1$ entspricht der ursprüngliche Lagrangesche Satz: Wenn $\varphi(x), F(x)$ zwei gegebene Funktionen bezeichnen, die explicite nur die Variable x enthalten, welche durch die Gleichung

$$x = t + \alpha \varphi(x)$$

in Abhängigkeit von den beiden als unabhängig zu betrachtenden Variablen t und α gesetzt ist, so ist

$$\frac{dF}{d\alpha^m} = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[\frac{dF}{d\alpha} \right] \text{ und } \left[\frac{dF}{d\alpha} \right] = \varphi^m \frac{dF}{dt} \quad (1)$$

Diese Formel wird von Laplace selbst so bewiesen, dass sie auch für ein beliebiges α ihre Gültigkeit behält.

II. Die Variablen x, y sind durch die Gleichungen

$$x = t + \alpha \varphi(x, y) \quad (2)$$

$$y = u + \beta \chi(x, y) \quad (3)$$

in Funktion der unter sich unabhängigen Variablen t, u, α, β gesetzt. Wenn nun die gegebenen Funktionen $\varphi(x, y), \chi(x, y), F(x, y)$ explicite keine der Variablen t, u, α, β enthalten, so verlangt man für $\frac{d^m F}{d\alpha^m}, \frac{d^m + n F}{d\alpha^m d\beta^n}$ Ausdrücke, in denen keine nach α oder β genommenen Differentialcoefficienten vorkommen.

Um vorerst den Ausdruck für $\frac{d^m F}{d\alpha^m}$ zu erhalten, nehme man aus Gleichung (3) den Werth von y in Funktion von x, u, β und substituire sie in Gleichung (2), so wird die Funktion φ nur x, u, β enthalten, dagegen ex-

plicite von t , α frei sein. Also darf hier die Formel (1) angewendet werden, insofern u , β als constant gelten. Man hat also:

$$\frac{d^m F}{d\alpha^m} = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \cdot \varphi^m \frac{dF}{dt} = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[\frac{dF}{d\alpha} \right] = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left(\frac{F}{\alpha^m} \right). \quad (4)$$

Da nämlich das isolirte Symbol $\left[\frac{dF}{d\alpha} \right]$ die Potenz φ^m nicht anzeigt, welche an die Stelle von φ gesetzt werden soll, so werde ich künftig dafür dieses abkürzende Zeichen

$$\left(\frac{F}{\alpha^m} \right) = \varphi^m \frac{dF}{dt}$$

gebrauchen. Ebenso werde ich

$$\left(\frac{F}{\alpha^m, \beta^n} \right) = \left[\frac{d^2 F}{d\alpha d\beta} \right]$$

schreiben, wenn in der wirklichen Entwicklung des eingeklammerten Differentialcoefficienten φ^m, χ^n an die Stelle von φ, χ gesetzt werden. Mit der Formel (4) hängt diese

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{F}{\alpha^m} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{F}{\alpha^{m+1}} \right) \quad (5)$$

zusammen, von welcher wir sogleich Gebrauch zu machen haben.

Wenn wir ferner den Ausdruck für $\frac{d^m + n F}{d\alpha^m d\beta^n}$ suchen, so haben wir zunächst

$$\frac{d^m + 1 F}{d\alpha^m d\beta} = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \frac{d}{d\beta} \left(\frac{F}{\alpha^m} \right);$$

$$\frac{d}{d\beta} \left(\frac{F}{\alpha^m} \right) = \frac{d \cdot \varphi^m}{d\beta} \frac{dF}{dt} + \varphi^m \frac{d \frac{dF}{d\beta}}{dt} = \left(\frac{F}{\alpha^m, \beta} \right)$$

Nach (4) ist aber $\frac{dF}{d\beta} = \chi \frac{dF}{du}$; also ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{F}{\alpha^m, \beta} \right) &= \varphi^m \frac{d}{dt} \cdot \chi \frac{dF}{du} + \chi \cdot \frac{d \cdot \varphi^m}{du} \frac{dF}{dt} \\ &= \varphi^m \chi \frac{d^2 F}{dt du} + \varphi^m \frac{d\chi}{dt} \frac{dF}{du} + \chi \frac{d \cdot \varphi^m}{du} \frac{dF}{dt} \\ &= \chi \cdot \frac{d}{du} \cdot \varphi^m \frac{dF}{dt} + \varphi^m \frac{d\chi}{dt} \frac{dF}{du} \\ &= \chi \frac{d}{du} \left(\frac{F}{\alpha^m} \right) + \left(\frac{\chi}{\alpha^m} \right) \frac{dF}{du}. \end{aligned}$$

Gemäss dem zu beweisenden Satze müsste also:

$$\left(\frac{F}{\alpha^m, \beta^n} \right) = \chi^n \frac{d}{du} \left(\frac{F}{\alpha^m} \right) + \left(\frac{\chi^n}{\alpha^m} \right) \frac{dF}{du} \quad (6)$$

sein, was wir nun durch den Schluss von m auf $m + 1$ verificiren wollen. Mit Anwendung von (5) haben wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{F}{\alpha^m, \beta^n} \right) &= \chi^n \frac{d^2}{dt du} \left(\frac{F}{\alpha^m + 1} \right) + \\ &\frac{d}{dt} \left(\frac{\chi^n}{\alpha^m + 1} \right) \cdot \frac{dF}{du} + \varphi \frac{d \cdot \chi^n}{dt} \frac{d}{du} \left(\frac{F}{\alpha^m} \right) \\ &+ \left(\frac{\chi^n}{\alpha^m} \right) \frac{d}{du} \cdot \varphi \frac{dF}{dt} \end{aligned}$$

Das letzte Glied auf der rechten Seite wird

$$\begin{aligned} \varphi \left(\frac{\chi^n}{\alpha^m} \right) \frac{d^2 F}{dt du} + \left(\frac{\chi^n}{\alpha^m} \right) \frac{d\varphi}{du} \frac{dF}{dt} &= \left(\frac{\chi^n}{\alpha^m + 1} \right) \frac{d^2 F}{dt du} \\ + \frac{d \cdot \chi^n}{dt} \frac{d\varphi}{du} \left(\frac{F}{\alpha^m} \right). \end{aligned}$$

Hievon vereinigt sich der erste

Theil mit dem obigen zweiten Gliede zu $\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\chi^n}{\alpha^m + 1} \right)$

$\frac{dF}{du}$ und der zweite Theil mit dem obigen dritten Gliede

$$\text{zu } \frac{d \cdot \chi^n}{dt} \frac{d}{du} \cdot \varphi \left(\frac{F}{\alpha^m} \right) = \frac{d \cdot \chi^n}{dt} \frac{d}{du} \left(\frac{F}{\alpha^m + 1} \right).$$

Dieses aber mit dem obigen ersten Gliede zusammenge-
nommen giebt:

$$\frac{d}{dt} \cdot \chi^n \frac{d}{du} \left(\frac{F}{\alpha^m + 1} \right)$$

Wenn man nun Alles vereinigt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{F}{\alpha^m, \beta^n} \right) &= \frac{d}{dt} \left\{ \chi^n \frac{d}{du} \left(\frac{F}{\alpha^m + 1} \right) + \right. \\ &\left. \left(\frac{\chi^n}{\alpha^m + 1} \right) \frac{dF}{du} \right\} = \frac{d}{dt} \left(\frac{F}{\alpha^m + 1, \beta^n} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

Demnach, wenn

$$\frac{d^m + n F}{d\alpha^m d\beta^n} = \frac{d^m + n - 2}{dt^{m-1} du^{n-1}} \left(\frac{F}{\alpha^m, \beta^n} \right) \quad (8)$$

ist, so folgt daraus, dass dieselbe Formel auch noch be-
stehen muss, wenn darin $m + 1$ für m gesetzt wird,
was auch α, β sein mögen.

Aus (6) wollen wir noch eine Relation herleiten, die
wir im folgenden brauchen. Vertauschet man dort $t, \alpha,$
 φ, m gegen u, β, χ, n , so erhält man:

$$\left(\frac{F}{\alpha^m, \beta^n} \right) = \varphi^m \frac{d}{dt} \left(\frac{F}{\beta^n} \right) + \left(\frac{\varphi^m}{\beta^n} \right) \frac{dF}{dt}$$

und, wenn m in $m + 1$ übergeht,

$$\left(\frac{F}{\alpha^m + 1, \beta^n} \right) = \varphi^{m+1} \frac{d}{dt} \left(\frac{F}{\beta^n} \right) + \left(\frac{\varphi^{m+1}}{\beta^n} \right) \frac{dF}{dt}$$

Multipliziert man jene Gleichung mit φ und zieht sie
von dieser ab, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\left(\frac{F}{\alpha^m + 1, \beta^n} \right) - \varphi \cdot \left(\frac{F}{\alpha^m, \beta^n} \right) \\ &= \frac{dF}{dt} \cdot \chi^n \left(\frac{d \cdot \varphi^{m+1}}{du} - \varphi \frac{d \cdot \varphi^m}{du} \right) = \frac{dF}{dt} \chi^n \cdot \varphi^m \frac{d\varphi}{du} \\ &= \left(\frac{\varphi}{\beta^n} \right) \cdot \left(\frac{F}{\alpha^m} \right); \end{aligned}$$

wir bekommen somit die Relation

$$\left(\begin{matrix} F \\ \alpha^m + 1, \beta^n \end{matrix} \right) = \varphi \left(\begin{matrix} F \\ \alpha^m, \beta^n \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} \varphi \\ \beta^n \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} F \\ \alpha^m \end{matrix} \right) \quad (9)$$

III. Es sei

$$\left. \begin{aligned} x &= t + \alpha \varphi(x, y, z) \\ y &= u + \beta \chi(x, y, z) \\ z &= v + \gamma \psi(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Man soll $\frac{d^m + n + p}{d\alpha^m d\beta^n d\gamma^p} F(x, y, z)$ bestimmen, wenn $t, u, v,$

α, β, γ als die unabhängigen Variablen aufgefasst werden.

Die erste der Gleichungen (10) giebt x in Funktion von y, z, t, α . Man substituirt diesen Werth in den beiden andern Gleichungen und in der expliciten Form der Funktion F . Setzt man dann t, α constant, so lässt sich F als eine Function betrachten, welche explicite nur y, z enthält und von den unabhängigen Variablen u, v, β, γ frei ist. Folglich sind die frühern Formeln (6) und (8) auf dieselbe anwendbar, und man hat:

$$\begin{aligned} \frac{d^n + p}{d\beta^n d\gamma^p} F &= \frac{d^n + p - 2}{du^{n-1} dv^{p-1}} \left(\begin{matrix} F \\ \beta^n, \gamma^p \end{matrix} \right) \text{ und} \\ \left(\begin{matrix} F \\ \beta^n, \gamma^p \end{matrix} \right) &= \psi^p \frac{d}{dv} \left(\begin{matrix} F \\ \beta^n \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} \psi^p \\ \beta^n \end{matrix} \right) \frac{dF}{dv} \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\frac{d^n + p + 1}{d\alpha d\beta^n d\gamma^p} F = \frac{d^n + p - 2}{du^{n-1} dv^{p-1}} \left(\begin{matrix} F \\ \alpha, \beta^n, \gamma^p \end{matrix} \right)$$

so ergibt sich ganz leicht

$$\begin{aligned} \left(\begin{matrix} F \\ \alpha, \beta^n, \gamma^p \end{matrix} \right) &= \psi^p \frac{d}{dv} \left(\begin{matrix} F \\ \alpha, \beta^n \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} \psi^p \\ \alpha \end{matrix} \right) \frac{d}{dv} \left(\begin{matrix} F \\ \beta^n \end{matrix} \right) \\ &+ \left(\begin{matrix} \psi^p \\ \beta^n \end{matrix} \right) \frac{d}{dv} \left(\begin{matrix} F \\ \alpha \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} \psi^p \\ \alpha, \beta^n \end{matrix} \right) \frac{dF}{dv} \end{aligned}$$

Es fragt sich nun, ob diese Formel richtig bleibt, wenn darin das Symbol α durch α^m ersetzt wird.

Wenn

$$\frac{d^{m+n+p}F}{d\alpha^m d\beta^n d\gamma^p} = \frac{d^{m+n+p-3}}{dt^{m-1} du^{n-1} dv^{p-1}} \left(\begin{matrix} F \\ \alpha^m, \beta^n, \gamma^p \end{matrix} \right) \quad (11)$$

gesetzt wird, so soll durch den Schluss von m auf $m+1$ bewiesen werden, dass

$$\begin{aligned} \left(\begin{matrix} F \\ \alpha^m, \beta^n, \gamma^n \end{matrix} \right) &= \psi^p \frac{d}{dv} \left(\begin{matrix} F \\ \alpha^m, \beta^n \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} \psi^p \\ \alpha^m \end{matrix} \right) \frac{d}{dv} \left(\begin{matrix} F \\ \beta^n \end{matrix} \right) \\ &+ \left(\begin{matrix} \psi^p \\ \beta^n \end{matrix} \right) \frac{d}{dv} \left(\begin{matrix} F \\ \alpha^m \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} \psi^p \\ \alpha^m, \beta^n \end{matrix} \right) \frac{dF}{dv} \end{aligned} \quad (12)$$

ist. Um abzukürzen bezeichne ich die vier Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung der Reihe nach mit A, B, C, D und versehe sie, wenn darin $m+1$ für m gesetzt wird, mit Accenten. Es ist nun sogleich klar, dass es jetzt darauf ankommt, zu zeigen, dass

$$\frac{d(A+B+C+D)}{d\alpha} - \frac{d(A'+B'+C'+D')}{dt} = 0 \text{ ist.}$$

Zu dem Ende wollen wir die einzelnen Differenzen $\frac{dA}{d\alpha} - \frac{dA'}{dt}$, etc. vorzüglich mit Hülfe der Formel (9) zuerst möglichst reduciren und dann addiren.

Wir bekommen:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\alpha} - \frac{dA'}{dt} &= \\ \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \left\{ \varphi \frac{d}{dv} \left(\begin{matrix} F \\ \alpha^m, \beta^n \end{matrix} \right) - \frac{d}{dv} \left(\begin{matrix} F \\ \alpha^{m+1}, \beta^n \end{matrix} \right) \right\} \\ &= - \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \frac{d\varphi}{dv} \left(\begin{matrix} F \\ \alpha^m, \beta^n \end{matrix} \right) - \\ \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \cdot \frac{d}{dv} \cdot \left(\begin{matrix} \varphi \\ \beta^n \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} F \\ \alpha^m \end{matrix} \right) &= -H - I, \\ \frac{dB}{d\alpha} - \frac{dB'}{dt} &= \\ \varphi^m \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \left\{ \frac{d}{dv} \left(\begin{matrix} F \\ \alpha, \beta^n \end{matrix} \right) - \varphi \frac{d^2}{dt dv} \left(\begin{matrix} F \\ \beta^n \end{matrix} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \varphi^m \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \left\{ \frac{d}{dv} \left[\varphi \frac{d}{dt} \left(\frac{F}{\beta^n} \right) + \left(\frac{\varphi}{\beta^n} \right) \frac{dF}{dt} \right] - \varphi \frac{d^2}{dt dv} \left(\frac{F}{\beta^n} \right) \right\}$$

$$= \varphi^m \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \frac{d\varphi}{dv} \frac{d}{dt} \left(\frac{F}{\beta^n} \right) + \varphi^m \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \frac{d}{dv} \cdot \left(\frac{\varphi}{\beta^n} \right) \frac{dF}{dt} = K + L,$$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{d\alpha} - \frac{dC'}{dt} &= \\ \left(\frac{\psi^p}{\alpha^m, \beta^n} \right) \frac{d}{dv} \left(\frac{F}{\alpha^m} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi^p}{\beta^n} \right) \cdot \frac{d}{dv} \left(\frac{F}{\alpha^m + 1} \right) \\ &= \left(\frac{\varphi}{\beta^n} \right) \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \frac{d}{dv} \left(\frac{F}{\alpha^m} \right) \\ &\quad - \frac{d\varphi}{dv} \left(\frac{F}{\alpha^m} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi^p}{\beta^n} \right) = M - N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dD}{d\alpha} - \frac{dD'}{dt} &= \\ \left(\frac{\psi^p}{\alpha^m, \beta^n} \right) \frac{d}{dv} \cdot \varphi \frac{dF}{dt} - \left(\frac{\psi^p}{\alpha^m + 1, \beta^n} \right) \frac{d^2 F}{dt dv} \\ &= \frac{d\varphi}{dv} \cdot \left(\frac{\psi^p}{\alpha^m, \beta^n} \right) \frac{dF}{dt} - \left(\frac{\varphi}{\beta^n} \right) \left(\frac{\psi^p}{\alpha^m} \right) \frac{d^2 F}{dt dv} \\ &= O - P. \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} K - H &= \\ \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \frac{d\varphi}{dv} \left\{ \varphi^m \frac{d}{dt} \left(\frac{F}{\beta^n} \right) - \left(\frac{F}{\alpha^m, \beta^n} \right) \right\} \\ &= - \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \frac{d\varphi}{dv} \left(\frac{\varphi^m}{\beta^n} \right) \frac{dF}{dt}, \end{aligned}$$

$$L - I =$$

$$\begin{aligned} \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \left\{ \varphi^m \frac{d}{dv} \cdot \left(\frac{\varphi}{\beta^n} \right) \frac{dF}{dt} - \frac{d}{dv} \cdot \left(\frac{\varphi}{\beta^n} \right) \left(\frac{F}{\alpha^m} \right) \right\} \\ = - \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \frac{d \cdot \varphi^m}{dv} \left(\frac{\varphi}{\beta^n} \right) \frac{dF}{dt}, \end{aligned}$$

$$M - P =$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varphi}{\beta^n} \right) \left\{ \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \frac{d}{dv} \cdot \varphi^m \frac{dF}{dt} - \varphi^m \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \frac{d^2 F}{dt dv} \right\} \\ = \left(\frac{\varphi}{\beta^n} \right) \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \frac{d \cdot \varphi^m}{dv} \frac{dF}{dt}, \end{aligned}$$

$$O - N =$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dv} \frac{dF}{dt} \left\{ \left(\frac{\psi^p}{\alpha^m, \beta^n} \right) - \varphi^m \frac{d}{dt} \left(\frac{\psi^p}{\beta^n} \right) \right\} \\ = \frac{d\varphi}{dv} \frac{dF}{dt} \left(\frac{\varphi^m}{\beta^n} \right) \frac{d \cdot \psi^p}{dt} \end{aligned}$$

Wenn man endlich diese vier Gleichungen addirt, so bekommt man $(K - H + O - N) + (L - I + M - P) = 0$. Folglich ist wirklich

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{F}{\alpha^m, \beta^n, \gamma^p} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{F}{\alpha^m + 1, \beta^n, \gamma^p} \right),$$

was zu beweisen war. Also sind auch die zusammengehörigen Gleichungen (11) und (12) wahr, was auch die unabhängigen Variablen α, β, γ sein mögen. Wird der Ausdruck 12 entwickelt, so erhält er die symmetrische Gestalt

$$\begin{aligned} \left(\frac{F}{\alpha^m, \beta^n, \gamma^p} \right) &= \varphi^m \chi^n \psi^p \frac{d^3 F}{dt dv du} + \left(\frac{\chi^n \psi^p}{\alpha^m} \right) \frac{d^2 F}{du dv} \\ &+ \left(\frac{\psi^p \varphi^m}{\beta^n} \right) \frac{d^2 F}{dv dt} + \left(\frac{\varphi^m \chi^n}{\gamma^p} \right) \frac{d^2 F}{dt du} \\ &+ \left(\frac{\varphi^m}{\beta^n, \gamma^p} \right) \frac{dF}{dt} + \left(\frac{\chi^n}{\gamma^p, \alpha^m} \right) \frac{dF}{du} + \left(\frac{\psi^p}{\alpha^m, \beta^n} \right) \frac{dF}{dv} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \varphi^m \chi^n \psi^p \frac{d^3 F}{dt du dv} + \Sigma \varphi^m \frac{d \cdot \chi^n \psi^p}{dt} \frac{d^2 F}{du dv} \\
 &+ \Sigma \left\{ \chi^n \psi^p \frac{d^2 \cdot \varphi^m}{du dv} + \psi^p \frac{d \cdot \chi^n}{dv} \frac{d \cdot \varphi^m}{du} \right. \\
 &\quad \left. + \chi^n \frac{d \cdot \psi^p}{du} \frac{d \cdot \varphi^m}{dv} \right\} \frac{dF}{dt} \quad (13)
 \end{aligned}$$

Bei den Reductionen, deren der hier für drei unabhängige Variablen gegebene Beweis sich bediente, hat sich die Relation (9) besonders nützlich erwiesen. Wollte man nun die Ausdehnung des Satzes auf vier unabhängige Variablen versuchen, so scheint es, als bedürfte man dazu einer oder mehrerer mit (9) ähnlicher Relationen. Die Zahl der verschiedenartigen Glieder wird aber zu gross, als dass man hoffen kann, ohne Rechnungen von abschreckender Länge zur Verifikation des Satzes zu gelangen. — Zwar kann man an den Formeln (12) und (13) bereits das allgemeine Gesetz wahrnehmen, nach welchem die entsprechenden Formeln für eine beliebige Anzahl unabhängiger Variablen construiert werden müssen, so dass im Grunde nur ein schon bekannter Ausdruck als mit Null identisch zu verificiren ist. Aber nach welchem Plane soll diese Reduktion successiv vorgenommen werden, da sie bei der ungeheuren Vielartigkeit der einzelnen durch Differentiation nach α oder t entstandenen Glieder schwerlich auf einmal geschehen kann?

Bei der symbolischen Einfachheit des fraglichen Satzes bleibt es eine dringende Forderung, einen Beweis desselben aufzufinden, und es wäre zu wünschen, dass derselbe in angemessener Kürze vielleicht ebenso wie der von Laplace unter der Bedingung des Verschwindens der Unabhängigen α, β, γ , etc. gegebene, durch stets wechselnde Annahmen hindurch sich bewegen möchte. Ich glaube, dass ein

Gewinn für die analytische Methode daraus hervorgienge, wenn die hier angedeutete Schwierigkeit beseitigt würde.

Anmerkung. Bei Laplace haben die Gleichungen, welche die gegenseitige Abhängigkeit der Variabeln feststellen, die Form

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(t_1 + \alpha_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)), \\x_2 &= f_2(t_2 + \alpha_2 \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)), \\&\text{etc.}\end{aligned}$$

Die Allgemeinheit der Untersuchung leidet aber gar nicht darunter, wenn man auch die abhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots$ durch $f_1(x_1), f_2(x_2)$ etc. und $\varphi \cdot (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f^n(x^n))$ durch $\varphi_1(x_1, x_2, \dots)$ ersetzt, wodurch obige Gleichungen auf die einfachere Gestalt

$$\begin{aligned}x_1 &= t_1 + \alpha_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\&\text{etc.}\end{aligned}$$

zurückkommen.

R. Wolf, Auszüge aus Briefen an Albrecht von Haller, mit litterarisch- historischen Notizen.

CXCIII. ¹⁶⁰⁾.... *De ma Retraite, 16. October 1770* :
A propos de visite ; vous devez avoir eu celle de notre confrère *La Lande*, célèbre astronome de l'Académie de Paris. Je suis lié avec lui depuis environ 12 ans. Il était venu dîner avec moi en allant en Suisse, et m'avait demandé une lettre de recommandation pour vous.... Mr. de La Lande devait passer à Yverdun pour voir Félice,

¹⁶⁰⁾ Charles Bonnet.